G O T T F R I E D W I L H E L M

L E I B N I Z

SÄMTLICHE
SCHRIFTEN UND BRIEFE

HERAUSGEGEBEN
VON DER

BERLIN-BRANDENBURGISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN

SIEBENTE REIHE
MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

SECHSTER BAND

2012

Inhaltsverzeichnis

G O T T F R I E D W I L H E L M
L E I B N I Z

MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

HERAUSGEGEBEN
VON DER
LEIBNIZ-FORSCHUNGSSTELLE HANNOVER
DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN
BEIM LEIBNIZ-ARCHIV DER
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
HANNOVER

SECHSTER BAND

1673–1676

ARITHMETISCHE KREISQUADRATUR

2012

Inhaltsverzeichnis

LEITER DES LEIBNIZ-ARCHIVS MICHAEL KEMPE

BEARBEITER DIESES BANDES
UWE MAYER · SIEGMUND PROBST

Inhaltsverzeichnis

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT XI

EINLEITUNG XV

ZUR TEXT- UND VARIANTENGESTALTUNG XXXVIII

ARITHMETISCHE KREISQUADRATUR 1673–1676

1. Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo [Herbst 1673 und Juli (?) 1676] 3
2. Aus und zu Huygens, De circuli magnitudine inventa [30. Dezember 1673 bis Mitte 1674] 41
   2_1. Auszug 41
   2_2. Ex Hugenio De circuli magnitudine 45
   2_3. Ad Hugenium De circuli magnitudine 45
3. Series convergens ad Circulum [30. Dezember 1673 — Mitte 1674] 51
4. Quadratura circuli arithmetica, sive per infinitam seriem numerorum rationalium [Erste Hälfte 1674] 53
5. La raison du diamètre à la circonference du cercle [September – Oktober 1674] 75
6. Accessiones memorabiles ad Arithmeticam infinitorum [10. September – Oktober 1674 u. November 1675 – Herbst 1676] 77
7. La quadrature du cercle par une progression rationelle [10. September bis Oktober 1674] 88
8. Reductio Circuli ad Figuram Rationalem aequivalentem [Oktober 1674] 92
9. De serie ad segmentum circuli [Oktober 1674 (?)] 107
10. De frusto coni recti. De quadratura hyperbolae et circuli arithmetica [10. – 11. Oktober 1675] 108
11. Quadratura arithmetica circuli [Herbst 1674 – September 1676 (?)] 110
12. Series ad circulum. Extractio radicis quadraticae [April (?) 1676] 112

13. Aus und zu Mengolis Circolo [Ende April 1676] 113
13_1. Constructio tabularum 113
13_2. Pars 2 Excerptorum ex Circulo Mengoli, et ad eum annotatorum 120
14. Dissertationis de arithmetica circuli quadratura propositiones septem [Frühjahr 1676] 132
15. Propositiones et definitiones pro quadratura arithmetica circuli [Juni 1676] .. 151
16. De momentis figurae angulorum. De locis curvarum [Juni 1676] 155
16_1. De momentis figurae angulorum 155
16_2. De locis curvarum 158
17. Berekening van de sinus [Januar – Sommer 1676] 161
18. Impossibilitas quadraturae circuli universalis. Transmutatio figurae analyticae simplicis 164
18_1. Impossibilitas quadraturae circuli universalis [April – Juni 1676] 164
18_2. Transmutatio figurae analyticae simplicis [April – Juni 1676] 167
19. Praefatio opusculi de Quadratura Circuli Arithmetica [April – Juni 1676] 169
20. Quadraturae Circuli Arithmeticae pars prima [April – Juni 1676] 178
21. De quadratura circuli et parabolae. De problemate Perralti. De triangulis rectangulis [April – September (?) 1676] 258
22. De seriebus. De quadratura circuli et hyperbolae [Mai – 4. Juni 1676] 266
23. Quadratura arithmetica Circuli et Hyperbolae nonnihil variata 8. Juni 1676 . 273
24. Calculus arcus circuli ex tangente [Anfang Juni – 29. Juni 1676] 287
25. Trigonometria per quadraturam arithmeticam. De seriebus convergentibus [Anfang Juni – 29. Juni 1676] 295
26. Approximatie van den arcus [Anfang Juni – 29. Juni 1676] 299
27. Compendium pro trigonometria sine tabulis 29. Juni 1676 303
28. Quadraturae circuli arithmeticae pars secunda [Juni – Juli 1676] 317
29. Ad prop. 6. [Juni – Juli 1676] 356
30. De retorta et segmento cycloidali [Juni – Juli 1676] 358
31. Ad sectionis conicae cujuslibet centrum assignabile habentis quadraturam generalem [Juni – Juli 1676] 360
32. Quadratura Circuli et Hyperbolae Arithmetica. Logarithmi Juli 1676 369
33. Calculus minuti secundi [29. Juni – 27. August 1676] 378

34. De inventione logarithmorum sine tabulis [Juli – 24. August 1676] 380
35. De inventione logarithmorum sine tabulis. De inventione sinus ex arcu [Juli bis 24. August 1676] 393
36. De functionibus circuli et hyperbolae. De serierum summatione et de methodo tangentium inversa [Juli – 24. August 1676] 410
36_1. Notae 410
36_2. Calculus sinus complementi 18 graduum 418
37. Calculus sinus complementi anguli 18 graduum ex arcu [Juli – 24. August 1676] 423
38. Berechnung des Sinus complementi [Juli – August 1676] 425
39. Introductio ad praefationem libelli geometrici [Juli – 27. August 1676] 427
40. De studio intentiore Geometriae [Juli – 27. August 1676] 433
41. De operis argumento et auxiliis [Juli – 27. August 1676] 437
42. De calculo tabulae arcuum [1. – 27.] August 1676 440
43. De calculo anguli et logarithmi [1. – 27. August 1676] 446
44. Variae notae [Juli – September 1676] 453
45. A circulo partem imperatam abscindere [Juli – September 1676] 458
46. Polygonum Circuli [August (?) 1676] 462
47. De seriebus ad arcum circuli [Mai – September 1676] 464
48. De calculo logarithmorum hyperbolicorum [August – September 1676] 469
49. Dissertatio exoterica de usu geometriae, et statu praesenti, ac novissimis ejus incrementis 483
49_1. Dissertatio exoterica de usu geometriae, et statu praesenti, ac novissimis ejus incrementis [August – September 1676] 483
49_2. Geometriae utilitas medicina mentis [24. August – September 1676] 514
50. Ad prop. 6. demonstrationem [August – September 1676] 519
51. De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae [Juni – September 1676] 520

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS 679

SCHRIFTENVERZEICHNIS 683

SACHVERZEICHNIS 697

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS 726

Fundstellen 726

Cc-2-Konkordanz 727

Erwähnte Leibniz-Handschriften 727

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN, BERICHTIGUNGEN 728

VORWORT

Der sechste Band von Leibniz' mathematischen Schriften umfasst die Aufzeichnungen und Studien aus den Jahren 1673 bis 1676 zur arithmetischen Kreisquadratur. Damit werden die Texte aus der Entstehungsgeschichte und dem Umkreis der *Quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae* zusammen mit dieser wohl umfangreichsten mathematischen Abhandlung, die Leibniz jemals verfasst hat, zum größten Teil erstmals publiziert. Darin enthalten sind die ersten mathematischen Ergebnisse des Paris-Aufenthalts, mit denen sich Leibniz ursprünglich der wissenschaftlichen Öffentlichkeit präsentieren wollte, vor allem die Summierung von unendlichen Reihen, die von ihm als „arithmetisch" bezeichnete Quadratur des Kreises und der Kegelschnitte sowie der Logarithmus-Kurve. Die Bedeutung der Schrift liegt nicht zuletzt in der ersten strengen Begründung der infinitesimalgeometrischen Methode der Kurvenquadratur. Leibniz wendet diese Methode exemplarisch auf die Quadratur der Zykloide und der höheren Hyperbeln und Parabeln an. Besonderen Wert legt er auf die praktische Anwendung der von ihm behandelten Reihen für Näherungsrechnungen.

Dr. Uwe Mayer bearbeitete die Stücke N. 1, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 20, 22, 26, 32, 34, 35, 38, 47, Dr. Siegmund Probst die übrigen Stücke bis auf N. 51, das zwischen den Bearbeitern aufgeteilt wurde. Die Schlussredaktion (einschließlich Datierungen und Verzeichnissen) wurde gemeinsam durchgeführt. Für die Erfassung der Stücke ist Susanne Bawah, Manuela Mirasch-Müller und Yixiao Wang zu danken.

Der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen danke ich für die finanzielle Unterstützung unserer Arbeit und der Leitungskommission der Göttinger und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften für die stete Betreuung der Belange der Editionsstelle.

Dem Ltd. Direktor Dr. Georg Ruppelt und den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek Hannover ist für die hilfreiche Unterstützung und gute Zusammenarbeit zu danken. Bei der Bearbeitung konnten gelegentlich Transkriptionen von Prof. Dr. Conrad Müller (Hannover) aus den 30er und 40er Jahren des 20. Jahrhunderts verglichen werden. Für Hinweise ist Florin-Stefan Morar (Bielefeld/Harvard) zu danken.

Prof. Dr. Manfred Breger hat freundlicherweise die unter Linux laufenden Programme und Datenbanken bis Juni 2012 betreut. Der Satz ist mit Hilfe des von John Lavagnino (Massachusetts) und Dominik Wujastyk (London) entwickelten TEX-Macropakets EDMAC und den von Prof. Dr. Herbert Breger für die Leibniz-Ausgabe erarbeiteten Anpassungen erstellt worden. Dr. Uwe Mayer, der die Macro-Erstellung unter TEX weiterentwickelt hat, ist ebenso zu danken wie Jürgen Herbst für die Linux-Betreuung. Die Figuren wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris (Phillips Exeter Academy, Exeter, NH) erstellt und in TEX weiter bearbeitet. Für gute Zusammenarbeit danke ich Herrn Peter Heyl vom Akademie-Verlag in Berlin. Der Verlag hat wieder eine pdf-Datei zum Ausdruck erhalten. Seit November 2009 standen Teile des Bandes in unkorrigierter Fassung im Internet. Auf die Konkordanzen und Kumulierungen im Internet (http://www.leibniz-edition.de) sei verwiesen.

Hannover, September 2012 Michael Kempe

EINLEITUNG

Der vorliegende Band enthält die Studien, Entwürfe und Aufzeichnungen des Zeitraums von 1673 bis 1676 zur arithmetischen Kreisquadratur, soweit sie nicht aus formalen Gründen schon im Briefwechselband (III, 1 N. 29, 38_2, 39_2, 72, 73) oder wegen des Überwiegens anderer thematischer Schwerpunkte in früheren Bänden der Reihe VII abgedruckt wurden (VII, 1 N. 34; VII, 3 N. 23–26, 34; VII, 4 N. 42–45; VII, 5 N. 68, 69).

Die Texte des Bandes wurden zu 51 Hauptnummern zusammengefasst, von denen nur vier, alle von Juni bis August 1676 entstanden, von Leibniz selbst datiert wurden (N. 23, 27, 32, 42). Zwei Drittel des Bandes sind Erstdrucke, fünf Stücke (N. 8, 19, 20, 49, 51) waren bisher ganz oder teilweise im Druck zugänglich. Den größten Anteil daran hat die Abhandlung *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus Corollarium est trigonometria sine tabulis* (N. 51). Sie wurde 1934 in einem Teildruck der Marburger Dissertation von L. Scholtz erstmals in Auszügen gedruckt (vgl. S. 178 u. S. 520). Eine vollständige kritische Edition der Abhandlung publizierte schließlich E. Knobloch 1993 (*LQK*). In N. 8 wird ein ursprünglich in Band III, 1 N. 39_1 ohne Lesarten gedruckter Text in revidierter Form ediert. Die *Praefatio opusculi de Quadratura Circuli Arithmetica* (N. 19) wurde bereits von C. I. Gerhardt veröffentlicht. Zwei weitere, ursprünglich von Gerhardt separat gedruckte Texte, einer davon ist auch in VI, 3 N. 54_1 ediert, bilden zusammen mit dem erstmals in VI, 3 N. 54_2 publizierten Manuskript einen umfangreicheren Entwurf eines Teils der Einleitung für die Abhandlung zur arithmetischen Kreisquadratur (N. 49).

Chronologisch lassen sich die Texte dieses Bandes im Wesentlichen in drei Gruppen gliedern: Die erste besteht aus Aufzeichnungen von Herbst 1673 bis Herbst 1674 und umfasst längere Darstellungen der arithmetischen Kreisquadratur (N. 1, 4) und Vorarbeiten (N. 5, 7, 8) für die Abhandlung, die Leibniz im Oktober 1674 an Huygens gegeben hat (III, 1 N. 39_2). Hinzu kommen Exzerpte aus von Leibniz studierten Schriften von Huygens und Gregory (N. 2, 3) sowie ein Stück mit verschiedenen Notizen und Rechnungen (N. 6). Zum weiteren Umkreis dieser Gruppe gehören Studien, die in früheren Bänden der Ausgabe publiziert wurden (VII, 3 N. 23–26, 34; VII, 4 N. 42–45).

Aus dem folgenden Jahr stammt lediglich eine Aufzeichnung mit der Kreisreihe (N. 10), die in Zusammenhang mit einem Gespräch mit Dechales vom 10. Oktober 1675

(VII, 5 N. 32) steht; etwa aus derselben Zeit gibt es eine Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus, die ebenfalls die Kreisreihe enthält (VII, 5 N. 42). In einem weiteren Band der Ausgabe sind aus diesem Jahr außerdem zwei Texte in französischer Sprache gedruckt, die Entwürfe für einen Aufsatz zur Kreisquadratur im *Journal des Sçavans* enthalten (III, 1 N. 72, 73). Schwer zu datieren sind die kurzen Aufzeichnungen N. 9 u. N. 11, die möglicherweise 1674 bzw. 1674–1676 entstanden sind.

Die umfangreichste Gruppe bilden die Entwürfe und Ausarbeitungen einer umfassenden Abhandlung über die arithmetische Kreisquadratur aus dem Jahr 1676 (N. 14, 15, 20, 28, 51) mit zahlreichen Ergänzungen und Erweiterungen (N. 16, 18, 21, 24, 25, 27, 29–37, 42, 43, 48, 50) sowie den Entwürfen für eine Einleitung zu dieser Abhandlung (N. 19, 39, 40, 41, 49). Hinzu kommen ein Exzerpt aus Mengolis *Circolo* (N. 13), gemeinsam mit Ozanam (N. 44) bzw. Tschirnhaus (N. 22, 36_1) angefertigte Gesprächsnotizen, sowie Aufzeichnungen mit Approximationsrechnungen, die Mohr (N. 17, 26) und Tschirnhaus (N. 38) für Leibniz durchgeführt haben. Weitere Detailuntersuchungen und Aufzeichnungen sind enthalten in N. 12, 23, 45–47. Insgesamt machen die im Jahr 1676 entstandenen Texte einen Anteil von etwa 85 % des Bandumfangs aus.

Quellen

Im Vergleich zu den vorhergehenden Bänden der Reihe VII ist das Schriftenverzeichnis des vorliegenden Bandes deutlich umfangreicher. Dies hat seinen Grund vorwiegend darin, dass die historischen Darstellungen in den Entwürfen für die Einleitung und entsprechende Bemerkungen in den Abhandlungstexten selbst naturgemäß eine Vielzahl von Quellen nennen, die Leibniz direkt oder indirekt zugänglich waren. Diese bilden im Wesentlichen zwei Gruppen: Die erste besteht aus Autoren, deren Werke den historischen und in mancher Hinsicht auch den theoretischen Hintergrund der arithmetischen Kreisquadratur abstecken, der von Leibniz ausführlich diskutiert wird. Viele dieser Quellen erscheinen nur in den oben genannten Texten und besitzen in der Regel keinen engeren inhaltlichen Bezug zur Abhandlung. Dies gilt beispielsweise für die antiken Autoren mit Ausnahme von Archimedes. Erwartungsgemäß ist dieser der weitaus am häufigsten erwähnte antike Mathematiker, natürlich vor allem wegen seiner Abhandlung zur Kreismessung, aber auch wegen seiner Quadraturmethoden (N. 2, 7, 8, 14, 19, 20, 28, 39–41, 49, 51). Genau wie bei den anderen Autoren seiner Epoche erscheint sein Name aber hauptsächlich in den historischen und systematischen Abschnitten der Entwürfe für die Einleitung. Euklid wird nur selten genannt (N. 7, 19, 20, 49), in der letzten Fassung der Abhandlung fehlt sein Name ganz. Namentliche Erwähnung finden außerdem noch

Apollonius (N. 7, 20, 49), Diophant, Eutokios und Pappus (N. 49). Eine ähnliche Rolle spielen bei den mittelalterlichen und modernen Autoren Bombelli, Cardano, Clavius, dal Ferro, Ferrari, Galilei, Girard, Ibn-al-Haitham, Kepler, al-Khwārizmī, Prestet und Tartaglia (N. 49). Wichtiger sind die Tangenten- und Extremwertmethoden bzw. -sätze, bei denen Leibniz auf Descartes und Fermat (N. 20, 49) bzw. Ricci und Sluse (N. 15, 20, 51) verweist, und die Verwendung von konvergierenden Ordinaten bei Desargues und Pascal (N. 14, 20, 49, 51). Relativ großen Umfang nehmen die Auseinandersetzungen mit der von Viète (N. 7, 14, 20, 23, 27, 28, 40, 41, 49, 51) begründeten symbolischen Algebra und deren Anwendung auf die Geometrie durch Descartes (N. 1, 7, 14, 15, 19, 20, 40, 41, 49, 51) ein.

Die für den Inhalt der Studien und der Abhandlungen zur arithmetischen Kreisquadratur wichtigen Quellen lassen sich wiederum grob in zwei Gruppen unterteilen, die sich aber durchaus überschneiden: Die erste besteht aus denen, die direkten Bezug zur Kreisreihe haben oder die Kreisquadratur bzw. Kreisapproximationen behandeln, die zweite aus solchen, die für die weiteren Themen der Abhandlung, nämlich die Grundlegung der Quadraturmethode mit Infinitesimalen, die Summierung unendlicher Reihen oder die Quadratur verschiedener Kurven von Bedeutung sind.

Neben der Approximation in der *Dimensio circuli* von Archimedes bilden die Ergebnisse von Ludolph van Ceulen (N. 1, 2, 13, 19, 27, 28, 41) und Snell (N. 1, 2, 19, 41) einen wiederkehrenden Bestandteil des Hintergrundwissens von Leibniz, sie werden aber in den späteren Fassungen der Abhandlung selbst nicht mehr erwähnt. Gregorys Ergebnisse zur Kreisquadratur kennt Leibniz durch Artikel in den *Philosophical Transactions* und seit 1673 aus seinem Exemplar der *Exercitationes geometricae* (vgl. VII, 4 N. 8 u. VII, 5 N. 47), er spielt auf sie schon in N. 1 an. Am 30. Dezember 1673 leiht er sich von Huygens dessen *De circuli magnitudine inventa* (vgl. N. 2) und Gregorys *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (vgl. N. 3); auf beide Werke bezieht sich Leibniz kurze Zeit später in N. 4. Gregorys Werk zitiert oder verwendet er mehrmals in den Texten von 1676 (N. 18, 19, 28, 41, 48, 49), in N. 51 erwähnt er ihn aber nicht mehr. Ebenso spielen die vorher studierten Approximationsmethoden von Huygens (N. 2, 46) und das unendliche Produkt von Wallis (N. 7, 19, 41) dort keine Rolle. In der *Praefatio opusculi de quadratura arithmetica circuli* (N. 19) verweist Leibniz außerdem auf die bei A. Metius überlieferte Kreisapproximation, die er höchstwahrscheinlich aus seiner Lektüre von Barrows *Lectiones geometricae*, 1672, kennt.

Mit den Kreisreihen von Newton und Gregory, die Oldenburg im Brief vom 22. April 1675 (III, 1 N. 49_2 S. 232–235) übermittelt, befasst sich Leibniz anscheinend zunächst

nicht, wie sein Brief an Oldenburg vom 20. Mai 1675 (III, 1 N. 51 S. 247) und das Fehlen von Rezeptionsspuren in den überlieferten Handschriften vermuten lassen. Erst 1676, nach einer Mitteilung von Georg Mohr, nimmt er die Kreisreihe von Newton zur Kenntnis, über die er sich im Brief an Oldenburg vom 12. Mai 1676 äußert (III, 1 N. 80_1 S. 375 f.; vgl. N. 17 u. N. 47). Leibniz' Lektüre der *Epistola prior* von Newton (III, 1 N. 88_5) Ende August 1676 findet dann unmittelbaren Niederschlag in einer Ergänzung zu N. 2 und in N. 51 im ergänzten Scholium zu prop. XXIX. Gregorys Kreisreihe scheint Leibniz weiterhin nicht zu berücksichtigen, bis er sie bei seinem zweiten Aufenthalt in London im Oktober 1676 aus der *Historiola* exzerpiert (III, 1 N. 88_2 S. 496).

Eingehend setzt sich Leibniz dagegen mit Gregorys Beweisversuch der Unmöglichkeit einer algebraischen Kreisquadratur aus der *Vera quadratura* auseinander, vor allem in N. 28 und dem etwa zeitgleich entstandenen VII, 3 N. 60. Schließlich verlegt er aber die Behandlung dieses Themas in die Entwürfe für die Einleitung (N. 41, 49) und setzt an den Schluss seiner Abhandlung einen eigenen Beweisversuch (N. 51 prop. LI). Für diesen und die Vorarbeiten dazu verwendet Leibniz Ergebnisse über Winkelteilungen von Viète (N. 27, 28, 51), dessen Beitrag zur Kreisapproximation er ebenfalls kennt (N. 41).

Seine strenge Begründung der Quadraturen mit infinitesimalgeometrischen Methoden sieht Leibniz als Weiterführung der archimedischen Traditionslinie in der Geometrie an. Mit ihnen will er die seiner Ansicht nach zu begrenzten Ansätze von Cavalieri (7, 14, 20, 28, 41, 49, 51) und Guldin (N. 7, 20, 41, 49) erweitern und die seitdem erreichten Ergebnisse auf eine sichere Grundlage stellen. Von seinen Vorläufern auf dem Gebiet der Quadratur der höheren Parabeln und Hyperbeln setzt sich Leibniz in erster Linie mit Cavalieri (N. 28), Fermat (N. 20, 28, 49, 51) und Wallis (N. 1, 20, 28, 49, 51) auseinander. Für die Quadratur der Hyperbel sind neben den bereits genannten Brouncker und Mercator auch Saint-Vincent (N. 1, 7, 20, 34, 41, 49, 51) und Sarasa (N. 1) von Bedeutung, durch deren Ergebnisse die Quadratur der Hyperbel auf den Logarithmus zurückgeführt wurde. Außerdem erwähnt Leibniz die Ergebnisse von Wallis bei der Quadratur der Konchoide (N. 49), von Huygens und Wallis bei der Zissoide (N. 4, 20, 49, 51) und geht ausführlich auf die Autoren ein, die sich mit der Zykloide befasst haben (N. 18_1, 20, 41, 49, 51). Erwähnt werden außerdem noch Torricellis Solidum hyperbolicum acutum (N. 20, 34, 49, 51) und die Slusesche Perle (N. 49).

Im Herbst 1672 löst Leibniz das Problem der Summierung der reziproken Dreieckszahlen ohne unmittelbare Verbindung zum Problem der Kurvenquadraturen (VII, 3 N. 2). Es wird ihm jedoch schnell bewusst, dass er mit Brouncker (vgl. N. 28, 41, 49, 51) und Mercator (vgl. N. 1, 4, 6, 7, 41, 48, 49, 51) Vorläufer auf diesem Gebiet hat, welche

bei der Hyperbel die Reihensummierung für die Lösung eines Quadraturproblems ausnutzten. Diese Autoren nennt er wiederholt in den Texten des vorliegenden Bandes, von Mercator übernimmt er die Entwicklung eines Bruches mit einem Binom im Nenner in eine unendliche Reihe durch fortgesetzte Division, wodurch er letztlich seine Kreisreihe gewinnt. Auch die verschiedenen Resultate von Wallis erwähnt Leibniz mehrfach (N. 1, 4, 7, 41, 49). Im Zusammenhang mit der Darstellung einiger seiner Reihensummierungen im harmonischen Dreieck geht Leibniz auch auf Pascals arithmetisches Dreieck ein (N. 28, 51). Anders verfährt er im Fall von Mengoli, der schon früher Reihensummierung und Quadraturen systematisch verbunden hatte. Obwohl Leibniz bereits 1673 in einem Brief von Oldenburg auf die Reihensummierungen in Mengolis *Novae quadraturae arithmeticae*, 1650, hingewiesen wird (III, 1 N. 13_2 S. 60), die seine Summierung der reziproken figurierten Zahlen vorwegnehmen, hat er wohl erst im April 1676 Gelegenheit, ein Werk Mengolis zu studieren. Es handelt sich dabei um eine aktuellere Publikation, *Circolo*, 1672, in der Mengoli außer seinen früheren Ergebnissen auch das Wallis'sche Produkt für den Kreis herleitet und das harmonische Dreieck verwendet. Leibniz fertigt umfangreiche Exzerpte daraus an (N. 13; VII, 3 N. 57_2), erwähnt Mengoli aber in seiner Abhandlung zur Kreisreihe nicht.

Gespräche mit Tschirnhaus (N. 22, 36_1) und Ozanam (N. 44) sind durch Handschriften mit gemeinsamen Notizen dokumentiert. Eine Bemerkung über einen Hinweis von Tschirnhaus zum Zusammenhang von Hyperbel und Sekans hat Leibniz in N. 20 u. in N. 51 gestrichen. Aufzeichnungen von Mohr (N. 17, 26) und Tschirnhaus (N. 38) für Leibniz enthalten Näherungsrechnungen mit der Kreisreihe und der Sinus- bzw. Kosinusreihe und Fehlerabschätzungen. Leibniz' Aufzeichnung N. 47 geht auf eine Mitteilung von Mohr zurück. Eine mündliche Mitteilung von Roberval über Fermats Quadratur der höheren Parabeln und Hyperbeln erwähnt Leibniz in N. 49, in N. 51 hat er sie gestrichen.

Themenschwerpunkte

In der Zeit seines Aufenthalts in Mainz hat Leibniz sich wohl vereinzelt mit Quadraturen beschäftigt (z. B. VII, 4 N. 4), sich dann aber – zumindest was die praktische Anwendung betrifft – mit Näherungslösungen zufrieden gegeben, die er für beliebige Kurven entwickeln wollte (II, 1 (2006) N. 84 S. 262 f.; II, 1 (2006) N. 87 S. 286). Dies ändert sich in Paris, als er die ihm von Huygens gestellte Aufgabe zur Summierung der Reihe der reziproken Dreieckszahlen löst. Bereits seit Ende 1672/Anfang 1673 entstehen Studien, in denen er sich mit Kreispolygonen und der Kreisquadratur befasst (VII, 1 N. 3 u. 6; VII, 3 N. 6). Die Suche nach einer Lösung für das Problem der Kreisquadratur bildet

auch den thematischen Schwerpunkt seiner Untersuchungen zur Infinitesimalmathematik im Jahr 1673 (VII, 4). Leibniz erarbeitet sich im Laufe dieses Jahres die wesentlichen mathematischen Hilfsmittel, die ihn zur Entdeckung der Kreisreihe führen, die Transmutationsmethode zur Berechnung von Flächen unter Kurven und die von Nicolaus Mercator übernommene Methode der Reihenentwicklung durch fortgesetzte Division, wie aus den in den Bänden VII, 3 und VII, 4 publizierten Texten hervorgeht.

(1) Arithmetische Kreisquadratur

(a) Entstehungsgeschichte

Im Herbst 1673 findet Leibniz die Kreisreihe und versucht, das Ergebnis in einer Abhandlung darzustellen, die in zwei Entwürfen erhalten ist: Im ersten Ansatz (VII, 4 N. 42) unterläuft ihm ein Rechenfehler, den er nur ansatzweise korrigiert. Danach unternimmt er einen neuen Anlauf und leitet die Kreisreihe in dieser zweiten Fassung korrekt ab (N. 1). Zum direkten Umkreis dieser frühesten Abhandlung gehören außerdem einige Texte, die in den Bänden VII, 3 (N. 23–25) und VII, 4 (N. 43–45) gedruckt sind.

Etwas später, jedenfalls bis Mitte 1674, arbeitet Leibniz eine neue Fassung aus (N. 4), in die er Näherungswerte aufnimmt, die sich teilweise auf die Rechnungen in VII, 3 N. 26 stützen. Kurz nach N. 4 dürften die Rechnungen von VII, 3 N. 34 anzusetzen sein. Anschließend arbeitet Leibniz an einer Darstellung, die zur Verbreitung seines Ergebnisses bestimmt ist. Während er einen Entwurf (N. 8) wie die früheren Fassungen in lateinischer Sprache schreibt, gibt er seinem Mentor Huygens anschließend eine französische Version zur Einsicht (III, 1 N. 39_2). Weitere französische Entwürfe aus dieser Zeit sind N. 5 u. N. 7. Ein Jahr später arbeitet Leibniz an einem Text in französischer Sprache, der als Aufsatz für das *Journal des Sçavans* konzipiert ist. Davon sind drei Entwürfe überliefert: Die ersten beiden geben eine kurze Darstellung der Quadratur (III, 1 N. 72), der dritte, fragmentarische, stellt einige Sätze ausführlicher dar (III, 1 N. 73).

Im Jahr 1676 verfasst Leibniz in lateinischer Sprache die weiteren Entwürfe und Ausarbeitungen N. 14, 20, 28, 51. Die früheste Ausformulierung, welche die ersten sieben von insgesamt 51 Theoremen der letzten Fassung der *Quadratura* und einige der danach folgenden Definitionen enthält, stammt wahrscheinlich aus dem Frühjahr 1676 (N. 14). Das danach entstandene Stück N. 15 überliefert ein Inhaltsverzeichnis, das von den ersten acht Sätzen jeweils das Initium bzw. eine Zusammenfassung angibt, insgesamt etwa den prop. I–XV von N. 51 entspricht und damit mehr als N. 14 und weniger als N. 20 umfasst. Die darin genannten Sätze von Sluse und Ricci sind vor dem Äquivalent von prop. XV eingeordnet und als einzige Einträge mit Seitenangaben (pag. 42 bzw.

pag. 43) gekennzeichnet. Leibniz entscheidet sich möglicherweise zu diesem Zeitpunkt, die prop. XV zu den Tangenten der einfachen analytischen Kurven mit den Sätzen von Ricci bzw. Sluse zu beweisen und auf die in VII, 5 N. 68 u. 69 überlieferten Ansätze zu verzichten. Während die erhaltenen Manuskripte von N. 14, 20, 28 und 51 auf unpaginierte Bögen im Format 2° geschrieben sind, müsste sich das Inhaltsverzeichnis in N. 15 auf ein paginiertes Manuskript beziehen, dessen durch das Inhaltsverzeichnis abgedeckter Teil aus etwas mehr als 43 Seiten bestand. Da dieser Teil inhaltlich höchstens einem Anteil von 25 Seiten des auf insgesamt 28 Seiten geschriebenen N. 20 entspricht, müsste dieses Manuskript auf Blättern oder Bögen im Format 4° geschrieben worden sein. Ein solches ist bisher nicht gefunden worden, möglicherweise war aber das Blatt mit der Reinschrift von N. 18_1 ursprünglich dafür vorgesehen. N. 20 besteht aus 20 nummerierten Sätzen, die inhaltlich ungefähr den prop. I–XXV von N. 51 entsprechen. N. 28 enthält eine Fortsetzung von N. 20, die etwa den prop. XXV–XLII u. XLIX–LI von N. 51 entspricht, die Sätze sind in N. 28 aber noch nicht nummeriert. Eine Reihe weiterer Texte dokumentiert die Ausarbeitung der Abhandlung zwischen N. 20 bzw. N. 28 und N. 51: N. 24, 25 u. 27 sind vor dem Abschluss von N. 28 entstanden, ihre Resultate übernimmt Leibniz aber erst in N. 51. N. 29–31 schreibt Leibniz im Anschluss an N. 28. Vermutlich danach sind N. 32–35, 37, 42, 43 u. 48 während der Arbeit an N. 51 entstanden. N. 32 ist auf Juli 1676 datiert, N. 42 auf August 1676. Im Anschluss verfasst Leibniz N. 43 u. 48; er verwendet Werte, die er in diesen Texten berechnet, in prop. L von N. 51.

Leibniz berichtet wiederholt, dass er die Entdeckung der Kreisreihe noch 1673 seinen Freunden mitgeteilt habe (z. B. N. 39, 49). Bereits auf LH 35 XII 2 Bl. 162 v°, der letzten Seite des Bogens mit der ersten Ausarbeitung zur Kreisquadratur vom Herbst 1673 (VII, 4 N. 42), befinden sich noch nicht gedruckte Aufzeichnungen von Leibniz und Ozanam. Dieser erfährt also möglicherweise bereits damals von der Kreisreihe, die auf der Vorderseite des Blattes notiert ist. Einen späteren Beleg von Juli – September 1676 liefert die Gesprächsaufzeichnung N. 44, in der sich die Kreisreihe auf derselben Seite des Blattes befindet wie einige Notizen von Ozanam, die darunter geschrieben sind. Anlässlich eines Besuches zum Jahreswechsel 1673/74 leiht Huygens Leibniz zwei Bücher zur Kreisquadratur (vgl. N. 2 u. 3); es ist zu vermuten, dass Leibniz spätestens bei dieser Gelegenheit über seine neueste mathematische Entdeckung berichtet. Jedenfalls ist es höchst unwahrscheinlich, dass Leibniz Huygens nicht vor seinem Schreiben vom 15. Juli 1674 an Oldenburg (III, 1 N. 30 S. 120) informiert. Im Oktober 1674 gibt Leibniz eine französische Ausarbeitung (III, 1 N. 39_2) an Huygens und erhält sie von diesem mit dem Brief vom 6. November 1674 zurück (III, 1 N. 40). Ebenfalls im Oktober 1674 teilt Leibniz

Mariotte in einem Gespräch die Kreisreihe mit (VII, 1 N. 137), außerdem vermutlich in einer weiteren Mitteilung (III, 1 N. 38; vgl. III, 2 N. 31). Tschirnhaus erfährt kurz nach seiner Ankunft in Paris, wohl im Oktober 1675, von der Kreisreihe (VII, 5 N. 42; vgl. auch N. 22). Mohr verwendet die Kreisreihe in N. 26.

Leibniz lässt bei seiner Abreise aus Paris Anfang Oktober 1676 ein Manuskript mit einer Fassung der *Quadratura* zurück, die sein Freund Soudry abschreiben und für den Druck vorbereiten soll. Wann Leibniz dieses Manuskript an Soudry gibt, lässt sich nicht genauer bestimmen. Möglicherweise dienen auch das Figurenblatt von N. 20 und das Manuskript von N. 51 Soudry zeitweise als Vorlage, denn sie enthalten Hinweise zur Gestaltung der Figuren bzw. zur Anordnung des Textes in französischer Sprache (vgl. S. 179, 183, 214, 217, 535, 587, 590). Es gibt allerdings keine Hinweise darauf, dass eines dieser beiden überlieferten Manuskripte erst nach der Abreise aus Paris am 4. Oktober 1676 wieder in den Besitz von Leibniz gelangt ist. Die Publikation des Textes verzögert sich, Soudry kommt 1678 ums Leben und das bei ihm verbliebene Manuskript gelangt über einen Bruder von Soudry an F. A. Hansen (I, 2 N. 357 S. 372). Dieser wiederum lässt es im August 1679 Brosseau, dem hannoverschen Residenten in Paris, übergeben, der es im Oktober 1679 mit anderen Besitztümern von Leibniz dem Kaufmann Arontz (vermutlich Isaac Aron bzw. Ahrends) anvertraut (I, 2 N. 516 S. 519, N. 519 S. 521): Das Paket mit der Handschrift für Leibniz geht jedoch, wohl durch Diebstahl oder Raub, auf dem Transport nach Hannover verloren (*HO* VIII, N. 2285 S. 403; I, 3 N. 520 S. 579). Es könnte sein, dass es sich bei dem verschollenen Manuskript um die aus N. 15 erschließbare Handschrift in 4° handelt, jedenfalls verwendet Brosseau am 25. August 1679 für das ihm übergebene Manuskript eine solche Formatangabe (I, 2 N. 509 S. 515).

(b) Inhaltsübersicht

Die Entwürfe für die Abhandlung, in der Leibniz seine arithmetische Kreisquadratur der Öffentlichkeit präsentieren will, enthalten bis zum Herbst 1674 im Wesentlichen die Herleitung der Kreisreihe, indem er durch die Transmutation aus dem Kreis die figura segmentorum gewinnt, deren Gleichung in eine unendliche Reihe entwickelt und schließlich die Quadratur für jeden Term der Reihe durchführt.

Zwischen Ende 1675 und Sommer 1676 fügt Leibniz den Darstellungen sukzessive weitere Inhalte hinzu und erweitert sie schließlich zu einer Abhandlung, in der er Quadraturen mit der Infinitesimalmethode überhaupt streng begründet (vgl. Scholtz, *Grundlegung*, S. 13–40) und die Quadratur der höheren Parabeln und Hyperbeln sowie die arithmetische Quadratur der Kegelschnitte leistet. Neben der Darstellung weiterer Reihensummierungen, vor allem im harmonischen Dreieck, versucht er, die durch die arithmetischen

Quadraturen gewonnenen Reihen für die praktische Berechnung von trigonometrischen Größen und Logarithmen nutzbar zu machen und die Unmöglichkeit einer allgemeinen Kreisquadratur zu beweisen.

Wie E. Knobloch festgestellt hat (*LQK* S. 14–19), lässt sich der Inhalt der Abhandlung in drei Gruppen gliedern, die Leibniz durch die Scholien zu prop. XI und XXV zusammenfasst: einen ersten Teil (prop. I–XI) mit allgemeinen Sätzen zur Grundlegung der Quadraturen mittels der Infinitesimalmethode und zur Transmutationsmethode, einen zweiten Teil (prop. XII–XXV) mit Anwendungen auf spezielle Kurven wie die Zykloide, den Sekans, die Parabel und die höheren Parabeln und Hyperbeln. Der dritte Teil (prop. XXVI–LI) ist durch Einfügungen nach dem Abschluss von N. 28 sehr umfangreich ausgefallen. Diese bestehen im Wesentlichen aus den prop. XLIV–XLVIII, mit denen Leibniz die Eingliederung der praktischen Anwendung der trigonometrischen und logarithmischen Reihen in prop. L vorbereitet. Ursprünglich wollte er diese *Trigonometria sine tabulis* der Abhandlung als Anhang anfügen. Der Schlussteil umfasst nun neben der Summierung verschiedener unendlicher Reihen die arithmetische Quadratur des Kreises, der Ellipse und der Hyperbel, die Reihenentwicklung von Sinus, Kosinus und Logarithmus und ihre Verwendung für die praktische Berechnung dieser Größen sowie einen Beweisversuch für die Unmöglichkeit einer allgemeinen Kreisquadratur.

Prop. I, als Lemma bereits in N. 1 sowie in III, 1 N. 72 u. 73 enthalten, beschreibt die Umwandlung einer Dreiecksfläche in eine bestimmte Rechtecksfläche und ermöglicht so in prop. VII die Transmutation eines in infinitesimale Dreiecke zerlegten Kurvensegments in ein flächengleiches Segment einer geeigneten Kurve, das in infinitesimale Rechtecke zerlegt ist. Im ursprünglichen Ansatz von N. 14 folgt das Äquivalent von prop. VII unmittelbar auf prop. I. Leibniz erarbeitet dann sukzessive in umgekehrter Reihenfolge die für den Beweis von prop. VII verwendeten prop. II–VI. Prop. IV enthält eine Dreiecksungleichung für die Differenzen von Folgentermen. Die strenge Grundlegung der Kurvenquadratur in prop. VI operiert nicht mit einer Approximation durch ein- und umbeschriebene Polygone, sondern mit Treppenfiguren. Ihre Gültigkeit erstreckt sich auf alle Abschnitte einer Kurve, in denen diese stetig ist und weder zur Abszissenachse senkrechte Tangenten noch Wendepunkte besitzt. Leibniz zeigt, dass die Differenz zwischen der Fläche unter der Kurve und der Fläche der Treppenfigur so klein gemacht werden kann, dass sie jede beliebige vorgegebene Größe unterschreitet. Die Zerlegung einer Kurvenfläche in infinitesimale Parallelogramme, die mit dem Verfahren der Indivisiblenmethode korrespondiert, stellt einen einfacheren Spezialfall dar, wie Leibniz betont, und ist durch prop. VI ebenfalls abgedeckt. Den Transmutationssatz formuliert Leibniz in seiner

allgemeinen Form (prop. VII) in N. 14 und gibt für ihn einen klassischen Widerspruchsbeweis. Der speziellere Segmentsatz (prop. VIII) erscheint bereits in N. 1 und geht auf die infinitesimalmathematischen Studien von 1673 zurück (vgl. VII, 4). Die prop. IX–XI sind Anwendungen von prop. VII und stellen weitere Beziehungen zwischen einzelnen Flächen der ursprünglichen und der durch die Transmutation erzeugten Kurve her.

Der Abschnitt der Anwendungen auf spezielle Kurven bzw. Kurventypen beginnt mit zwei Sätzen zur Zykloide: Die Quadratur der Retorta der Zykloide (prop. XII) geht auf N. 20 und 30 zurück, die Quadratur eines speziellen Zykloidensegments (prop. XIII) hat Leibniz auf andere Weise bereits 1673 bewiesen (VII, 4 N. 17). Dies gilt auch für die folgende prop. XIV über den Sekans, die besagt, dass die Flächen unter der Kurve den Winkeln der zugehörigen Kreissektoren proportional sind (vgl. VII, 4 N. 34). Die Satzgruppe prop. XV–XXV befasst sich mit der Quadratur der einfachen analytischen Kurven, also vor allem der höheren Hyperbeln und Parabeln. Leibniz hebt im Scholium nach prop. XXV hervor, dass er diese bekannten Quadraturen als Erster streng und umfassend beweist. Ansätze für die Einbeziehung dieses Themas in die Abhandlung zur Kreisquadratur finden sich schon in III, 1 N. 73, besonders hinsichtlich der Quadratur der höheren Parabeln, die für die Quadratur der Terme der Kreisreihe erforderlich ist (prop. XXIV–XXV). Neu hinzugekommen ist hier ab N. 20 vor allem die Behandlung der Quadratur unendlich langer Figuren endlichen Flächeninhalts (prop. XX–XXIII). Im Scholium zu prop. XXIII verteidigt Leibniz den Einsatz fiktiver unendlich kleiner und unendlicher Größen, den er für weniger fehleranfällig hält als die Indivisiblenmethode.

Im dritten Teil befasst sich die erste Hälfte der Sätze mit der Anwendung der Transmutation auf den Kreis. Zunächst formuliert Leibniz die Verhältnisgleichung zur Summe der geometrischen Reihe (prop. XXVI), die er bereits Ende 1672 in III, 1 N. 2 verwendet. Die prop. XXVII–XXIX befassen sich dann mit der figura segmentorum des Kreises. Um deren Ordinate auszudrücken, verwendet Leibniz seit N. 1 eine Verhältnisgleichung. In N. 28 variiert er diese Formel, wobei ihm ein Fehler unterläuft, den er in prop. XXVII zunächst übernimmt und dann korrigiert. Die prop. XXX–XLIII sind der Herleitung der Kreisreihe, dem Vergleich mit anderen unendlichen Reihen, z. B. für die Hyperbel, gewidmet und gipfeln in der Formel für die allgemeine Kegelschnittreihe (prop. XLIII), die auf N. 31 zurückgeht. Leibniz teilt sie Oldenburg in seinem Brief vom 27. August 1676 mit (III, 1 N. 89_2 S. 575). In prop. XXXIV bezeichnet Leibniz die Kreisreihe als Differenz zweier harmonischer Reihen. Im modernen Sprachgebrauch ist dies nicht zulässig, da die beiden harmonischen Reihen divergieren. Nach der Auffassung von Leibniz sind jedoch selbst konvergente unendliche Reihen nie als Ganzes gegeben, und ihre Summen stellen

lediglich Grenzwerte der Folgen von Partialsummen dar, die beliebig genau angenähert werden können (VI, 3 N. 69 S. 503). Die Differenz der unendlichen harmonischen Reihen in prop. XXXIV kann daher als Grenzwert der Folge der Differenzen der endlichen Partialreihen aufgefasst werden. Einige Resultate gehören zu den frühesten Ergebnissen von Leibniz: Sie finden sich in den prop. XXXVI u. prop. XXXIX–XLI (vgl. VII, 3 N. 2 u. 15), darunter die Summierung der reziproken figurierten Zahlen durch das Differenzenschema der harmonischen Reihe, das Leibniz als harmonisches Dreieck bezeichnet (vgl. VII, 3 N. 30 u. 53).

Die zweite Hälfte des dritten Teils beginnt mit den prop. XLIV–XLVII zu Hyperbelquadratur und Logarithmusberechnung durch Reihenentwicklung, deren Inhalt Leibniz hauptsächlich in N. 32, 34 u. 35 erarbeitet. In prop. XLV beweist er die Unendlichkeit der Hyperbelfläche und die Divergenz der harmonischen Reihe aufgrund der Unbeschränktheit des Logarithmus. Die mehrfach umgearbeitete prop. XLVIII gibt Reihenentwicklungen einiger trigonometrischer Größen aus dem Bogen und beruht im Wesentlichen auf Newtons Reihenentwicklung für den Sinus, die Leibniz bekannt ist (vgl. N. 17, 47). In N. 32, dat. Juli 1676, erkennt Leibniz, dass er auf ähnliche Weise wie beim Logarithmus eine unendliche Reihe für den Sinus aus dem Bogen gewinnen kann, seine verschiedenen Ansätze führen aber zu keinem konkreten Ergebnis. Im Anschluss daran gewinnt er aus der Sinusformel von Newton die Formel für den Sinus versus durch Integration der Reihenterme, die folgenden Überlegungen werden durch einen Integrationsfehler beeinträchtigt. Mit Oldenburgs Sendung vom 5. August 1676 erhält Leibniz am 24. August 1676 auch Newtons Formel für den Sinus versus (III, 1 N. 88_5 S. 542). Im auf denselben Tag datierten Entwurf des Antwortbriefes an Oldenburg schreibt Leibniz mit Bezug auf die rekursive Formel $n -$ summa n aequ. l für den Logarithmus: „Simili methodo sinus complementi vel recti inventio ex dato arcu demonstrabitur, tantum in locum summarum substituendo summas summarum“ (III, 1 N. 89_1 S. 566 f.). Er kennt zu diesem Zeitpunkt also die korrekte Rekursionsformel. In der Abfertigung vom 27. August heißt es: „Quod regressum ex arcubus attinet, incideram ego directe in regulam, quae ex dato arcu sinum complementi exhibet“ (III, 1 N. 89_2 S. 577). Letztere Aussage lässt sich mit den überlieferten Manuskripten nicht belegen: In diesen (N. 32, 35) geht Leibniz immer von der Sinusformel aus und leitet erst danach die Formel für den Kosinus (Sinus complementi) bzw. Sinus versus ab. Auch prop. XLVIII formuliert er zunächst ebenfalls mit der Formel für den Sinus, in einer Überarbeitung für den Sinus complementi und dann erst für den Sinus versus, was er in der Endfassung beibehält. Allerdings weist Leibniz bereits in der ersten Fassung auf seine Rekursionsmethode hin und merkt an, dass die Formel

für den Sinus complementi auch unabhängig von der Sinusformel bewiesen werden kann. Zusammen mit prop. XLIX, die das Konvergenzkriterium für alternierende Nullfolgen enthält, bilden die genannten Sätze die Grundlage für die praktische Anwendung der arithmetischen Kreis- und Hyperbelquadratur in prop. L: Im ersten von drei Abschnitten führt Leibniz vor, wie für ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebenen Seiten mittels einiger Terme der Kreisreihe näherungsweise die Winkel bestimmt werden können. Der zweite Abschnitt befasst sich mit der umgekehrten Aufgabe, aus dem gegebenen Bogen bzw. Winkel und einer Seite des Dreiecks die restlichen Seiten zu bestimmen, wofür Formeln aus den Reihen von prop. XLVIII verwendet werden. Für Leibniz ist von Bedeutung, dass die Regeln so einfach gehalten sind, dass sie leicht im Gedächtnis behalten werden können und so erlauben, die Berechnungen jederzeit und überall auch ohne Rückgriff auf trigonometrische Tafeln durchzuführen. Der letzte Abschnitt ist den Logarithmen gewidmet, deren Reihenentwicklung Leibniz nicht nur für zahlenmäßige Berechnungen, sondern auch für eine geometrische Näherungskonstruktion verwendet. Die abschließende prop. LI unternimmt den Versuch, zu beweisen, dass eine allgemeine Kreisquadratur mit einer endlichen algebraischen Formel nicht möglich ist. Vorstufen hat Leibniz in N. 19 u. 28 erarbeitet: Sie beruhen alle auf dem Satz, dass die allgemeine Winkelteilung durch eine solche Formel nicht geleistet werden kann. Leibniz nimmt irrtümlich an, dass dies bewiesen ist.

(2) Andere Themen

Die Rolle der Grundlegung der Quadraturmethode mit Infinitesimalen, der Quadratur verschiedener Kurven und der Summierung unendlicher Reihen im Rahmen der Abhandlung zur Kreisquadratur wurde bereits skizziert. Darüber hinaus finden sich in den Texten des Bandes weitere Überlegungen zu diesen Themen: Die Idee, aus iterierten Summierungen bzw. Integrationen von unendlichen Reihen Rekursionsformeln zu gewinnen, erscheint in einem späteren Zusatz zu N. 1 und wird von Leibniz in N. 32 auf die Logarithmus- und die Sinusreihe angewandt. Wiederholt untersucht er, welche Quadraturen auf die Kreis- bzw. Hyperbelquadratur zurückgeführt werden können (N. 6, 8, 23). Einzelprobleme spielen eine geringe Rolle: Einen Spezialfall des Keplerschen Problems untersucht Leibniz in N. 45, das Perraultsche Problem tritt in einer Figur in N. 21 auf.

Wie die Entwürfe für die Einleitung (N. 19, 39–41, 49), die verschiedenen Fassungen der Abhandlung und einige andere Texte zeigen, ist für Leibniz die historische und systematische Einordnung seiner Studien zur Kreisquadratur von großer Bedeutung. Dabei arbeitet er die Themen weiter aus, die er in seiner Studie *Fines geometriae* vom Sommer 1673 (VII, 4 N. 36) kurz angerissen hat. Er versucht vor allem, den praktischen und

theoretischen Nutzen der mathematischen Forschung und seiner eigenen Resultate gegenüber den skeptischen Laien unter den Gelehrten zu vertreten und speziell die neuen Methoden der Infinitesimalmathematik gegen die Kritiker unter den Mathematikern zu rechtfertigen. Um die Infinitesmalmethoden zu verteidigen, versucht Leibniz schon im Sommer 1673 (VII, 4 N. 36), diese als Fortsetzung der archimedischen Tradition darzustellen und ihnen so das Stigma einer nicht gerechtfertigten Neuerung zu nehmen. Diese Methoden müssten in der höheren Geometrie dort eingesetzt werden, wo die Methoden von Viète und Descartes, welche in der apollonischen Tradition stehen, versagen (N. 7). Die gegen Descartes gerichtete Diskussion um die in der Geometrie zulässigen Kurven führt er in N. 14, 20, 41 u. 49. Den theoretischen Nutzen sieht Leibniz in der Anwendung der strengen Methodik und Denkweise der Geometrie, die er nicht nur den anderen mathematischen Disziplinen zugesteht, sondern z. B. auch der aristotelischen Logik. Er besteht in erster Linie in einer Vervollkommnung der Fähigkeiten des menschlichen Verstandes. Dies erlaubt Leibniz, die Anwendung der Geometrie nicht nur für die meisten Naturwissenschaften und die Technik, sondern auch für Metaphysik und Staatslehre zu propagieren. Ausführlich zählt er als Belege nicht nur die antiken Vorbilder, sondern vor allem die neuen Errungenschaften von Copernicus, Stevin, Galilei, Kepler, Descartes, Fermat, Torricelli, Guericke, Pascal, Boyle und vielen anderen auf. Gleichzeitig dienen diese als Beispiele für den praktischen Nutzen der Anwendung der Geometrie. Die arithmetische Kreisquadratur von Leibniz soll in der Praxis vor allem eine Trigonometrie ohne die Verwendung von Tafelwerken ermöglichen.

Gesprächsnotizen und Aufzeichnungen für Leibniz (Mohr, Ozanam, Tschirnhaus)

In N. 17 berechnet Mohr eine Näherung für den Sinus der Winkel von 18°, 36° und 45° mit den ersten zwei bzw. drei Termen der Sinusreihe von Newton und vergleicht die Ergebnisse mit den Werten einer Sinustafel. Nach demselben Schema und für dieselben Winkel ermittelt Tschirnhaus in N. 38 die Werte für den Kosinus (Sinus complementi) mit der Kosinusreihe in der von Leibniz gebrauchten Formel. Mohr berechnet auf ähnliche Weise in N. 26 verschiedene Näherungen für mehrere Winkel mit der Kreisreihe und schätzt ab, welche verbesserten Werte durch Winkelteilungen erzielt werden können. In den Notizen zu einem Gespräch mit Tschirnhaus (N. 22) finden sich eine Vorstufe der fig. 9 von N. 51, die Kreisreihe sowie geometrische und harmonische Reihen, insbesondere die für die Hyperbelquadratur wichtige alternierende harmonische Reihe. Eine weitere Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus (N. 36_1) enthält geometrische Figuren mit Kreisen, Zykloiden, Hyperbeln; Betrachtungen zu Tangenten und zum Zusammenhang von Differential- und

Integralrechnung sowie zur Kreisrektifikation. Mit Ozanam erörtert Leibniz eine Vielfalt von Themen: Die Notizen enthalten u. a. die Kreisreihe, quadratische Gleichungen und diverse geometrische Figuren mit Betrachtungen zu Schwerpunkten, Kurvennormalen sowie zur Optik (N. 44).

Terminologie

In seinen Entwürfen für die Abhandlung zur Kreisquadratur definiert Leibniz zahlreiche Begriffe, die im Sachverzeichnis unter dem Eintrag Definition aufgeführt sind.

(1) Transmutation

Bei der Transmutation verwendet Leibniz als Ordinate der erzeugten Kurve eine Subtangente der Ausgangskurve. Diesen Achsenabschnitt bezeichnet er als resecta bzw. rescissa, die erzeugte Figur als figura (curva, linea) resectarum. Sie tritt als figura segmentorum oder als figura sectorum auf, ein Spezialfall der figura sectorum ist die figura angulorum des Kreises (N. 20, 51). Die Fläche der durch die Transmutation erzeugten Kurve ist gleich der doppelten Fläche des entsprechenden Sektors bzw. Segments der Ausgangskurve: Leibniz nennt allgemein eine Kurve, deren Fläche kontinuierlich den Wert der Fläche der Ausgangskurve angibt, curva bzw. figura σύγνωτος (N. 1), symmetros (N. 1, 8), aequivalens, syntomos, homogenea (N. 8), aequipollens (N. 20, 49, 51) oder figure equivalente (N. 7).

(2) Klassifizierung der Quadraturen

Leibniz unterscheidet zwischen allgemeinen Quadraturen (quadratura generalis, plena, universalis) und solchen für Spezialfälle (quadratura particularis, specialis; z. B. N. 18, 19). Beide können empirisch messen oder theoretisch ermitteln (quadratura empirica bzw. rationalis). Letztere können exakte oder Näherungslösungen liefern (quadratura exacta bzw. appropinquans oder mechanica; z. B. N. 1, 19) und rechnerisch oder durch geometrische Konstruktion durchgeführt sein (quadratura numerica bzw. linearis). Eine exakte Lösung kann durch einen endlichen algebraischen Ausdruck (quadratura analytica) oder durch eine unendliche Folge gegeben sein. Im ersten Fall ist die Lösung eine algebraische Zahl (numerus algebraicus; N. 19). Ist im zweiten Fall die Lösung durch eine unendliche Reihe rationaler Zahlen gegeben, handelt es sich um eine quadratura arithmetica (z. B. N. 4, 19, 20, 49, 51).

(3) Algebraische und transzendente Kurven

Im Herbst 1673 führt Leibniz die Bezeichnung figura transcendens für Kurven ein, die nicht durch einen endlichen Ausdruck dargestellt werden können, algebraische Kurven

nennt er aequabiles (VII, 3 N. 23). Im vorliegenden Band verwendet er dafür ebenfalls curva bzw. figura transcendens (N. 1, 20, 23, 51) und curva bzw. figura analytica (aequabilis, ordinaria; N. 14, 20, 51). Eine transzendente Kurve, die durch eine unendliche Reihe gegeben wird, nennt er figura semi-analytica (N. 20). Mit figura analytica simplex bezeichnet Leibniz jede Kurve, deren Ordinate sich durch eine beliebige konstante Potenz der Abszisse darstellen lässt, also die Gerade und die einfachen und höheren Hyperbeln und Parabeln (N. 14, 20, 51).

(4) unendlich klein

Leibniz gebraucht in den Texten des vorliegenden Bandes hauptsächlich folgende Bezeichnungen für unendlich klein: In der Regel bezeichnet er eine unendlich kleine Größe mit infinite parva. Den Begriff indivisibilis verwendet Leibniz zum größten Teil zur Bezeichnung der Indivisibiliengeometrie bzw. -methode, den Unterschied zwischen indivisibilis und infinite parva diskutiert er in N. 20 u. 49. Den von ihm im Jahr 1673 aus Mercators Artikel *Some illustration of the Logarithmotechnia*, 1668, übernommenen Ausdruck infinitesima verwendet er in den Abhandlungen von 1673/1674 sowie in der letzten Fassung und in Entwürfen für die Einleitung (N. 1, 4, 8, 40, 41, 51).

Zur Notation und Rechentechnik

(1) Vorzeichen:

Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen verwendet Leibniz seit dem Sommer 1673 Doppelvorzeichen (signa ambigua). Ihre Bildung erfolgt überwiegend paarweise. Offenbar bevorzugt Leibniz bis etwa Mitte 1674 die Form $\mp$, $\mp\!\!\!\mp$; danach bis Ende 1674 $\dagger$, $\ddagger$; später hauptsächlich $\dagger$, $\dagger$ (N. 6, 31 etc.). 1676 verwendet er auch die gebräuchlichen $\pm$, $\mp$ (z. B. N. 31, 34, 51). Beispiele für Doppelvorzeichen:

$$\frac{y^{2z}}{\boxed{2} \dagger 1 \dagger y} \text{ (N. 6)}$$

$$EAC \sqcap EBC \pm ABC \sqcap EBC \dagger ABC. \text{ (N. 31)}$$

$$EP \sqcap \frac{a^2}{\frac{a^2}{CB} \mp AD} \sqcap \frac{a^2}{CB \pm BE}. \text{ (N. 34)}$$

Nam signum ambiguum, $\mp$, in Hyperbola est $-$, in Circulo et Ellipsi $+$, quemadmodum contrarium, $\pm$ in Hyperbola est $+$ in Ellipsi et Circulo $-$. (N. 51)

(2) Operationen:

Bei den arithmetischen Grundoperationen, vor allem mit Brüchen, verzichtet Leibniz manchmal auf die sonst von ihm gebrauchten Zeichen $+$, $-$, $\frown$, $\smile$ sowie auf ein Gleichheitszeichen und setzt das Ergebnis lediglich durch einen größeren Zwischenraum von den Operationen ab. Häufiger werden aber die Verbindungen von Zählern und Nennern durch Striche angezeigt, bei Addition, Subtraktion und Division dementsprechend meist durch liegende Kreuze und zusätzliche Zeichen (N. 27). Zeitgemäß sind die Überwärtsdivision (N. 6) und das Überwärtswurzelziehen (N. 24, 43) mit ihren charakteristischen Streichungsschemata. Beispiele:

Überwärtsdivision (N. 6):

$$\begin{array}{l}
\cancel{2} \\
\cancel{3}\,\cancel{1}\quad\ \cancel{1} \\
\cancel{1}\,\cancel{9}\,\cancel{8}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{7}\,8 \\
\cancel{4}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\not{f}\ 1\,2\,9\,0\,3\,2 \\
\cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1} \\
\ \cancel{3}\,\cancel{3}\,\cancel{3}\,\cancel{3}\,\cancel{3}
\end{array}$$

Überwärtswurzelziehen (N. 24):

$$\begin{array}{c}
1 \\
\cancel{2}\ 1 \\
\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{4}\,\cancel{2}\,4 \\
\cancel{2}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0} \\
\cdot\quad\ \cdot\quad\ \cdot \\
\hline
\cancel{1}\quad 4\quad 2 \\
\hline
\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{4}\,\cancel{4}\,\cancel{3} \\
\cancel{1}
\end{array}$$

Zu Beginn seines Parisaufenthalts verwendet Leibniz für Gleichheit manchmal ein f. oder f für facit, das er auch später in stilisierter Form $\not{f}$ noch bei Nebenrechnungen gebraucht (z. B. N. 35), meist aber unser heutiges Gleichheitszeichen. Dies gilt für alle datierten mathematischen Handschriften von 1673 bis Anfang 1674, ab Juni 1674 ist der Gebrauch des Gleichheitszeichens $\sqcap$ (stilisierter Waagebalken mit zwei gleichen Gewichten) belegt. Ein wechselnder Gebrauch der beiden Symbole (von offensichtlich späteren Zusätzen abgesehen) ist bei Handschriften Pariser Provenienz selten. Im Laufe des Jahres 1676 kommen zusätzlich aequ. bzw. aeq. (auch ohne Punkt) in Gebrauch (N. 14, 20 etc.).

Potenzen stellt Leibniz meist mit hochgestellten Exponenten dar, daneben benutzt er $\boxed{2}$ u. ä. Beispiele:

$$\frac{y^2}{\boxed{2}\,\overline{a^2+y^2}} \text{ und } \frac{y^0}{1+y^2} \text{ (N. 6)}$$

$$\frac{a^2}{2a-x,\square} \text{ (N. 8)}$$

x^{-1} idem est quod $\frac{1}{x^1}$. et x^{-2} idem quod $\frac{1}{x^2}$. (N. 14)

$$\frac{\boxed{e+1}\,A1B}{e+1,\,\boxed{e-1}\,AP} \text{ (N. 28)}$$

Für die Darstellung von Wurzeln verwendet Leibniz ab dem Frühsommer 1673 das Wurzelsymbol, wobei er in der Regel keinen Wurzelbalken setzt, wenn der Radikand eindeutig bestimmt ist (z. B. N. 2_3). Bei Potenzen und Wurzeln werden die Operatoren den Operanden sowohl vor- wie nachgestellt.

Beispiele für höhere und unbestimmte Wurzeln:

$\sqrt{(\gamma)\ 1-\frac{x}{2}}$ mit der Erläuterung: γ exponens radicis.

$\sqrt{(\frac{\gamma}{2})\ 1-\frac{x}{2}}$ und $\sqrt{(\gamma)\,\text{cub. de } 1-\frac{x}{2}}$ (N. 2_3)

v aeq. $\sqrt{③}\,py^2$ (N. 51)

Beispiel für verschiedene Schreibweisen und Umrechnungen:

$$\frac{\sqrt[3]{\overline{\omega R}^2}}{\sqrt[3]{\overline{CA}^2}} \text{ aequ. } \sqrt[3]{\frac{\overline{\omega R}^2}{\overline{CA}^2}} \text{ aequal. } \sqrt[\frac{3}{2}]{\frac{\omega R}{CA}} \text{ aequal. } \boxed{\frac{2}{3}}\frac{\omega R}{CA} \text{ (N. 51)}$$

Ab Ende Oktober 1675 führt Leibniz schrittweise die Symbole d und $\int$ für Differentiation und Integration ein (vgl. VII, 5), woran sich manchmal spätere Ergänzungen zu früher entstandenen Texten erkennen lassen (z. B. in N. 1, 6, 8). Dennoch verwendet er auch danach noch ältere Bezeichnungen wie diff. (N. 32), omn. (z. B. N. 1) und sum. bzw. summ. (N. 1, 8, 28, 32, 34), teilweise auch neben den neuen Symbolen, und sehr häufig weiterhin β bzw. ω für die Differenzen der Abszissen bzw. der Ordinaten. Beispiel:

$\sqrt{a^2-z^2}-\sqrt{a^2-z^2-2z\beta-\beta^2}\ \sqcap\ \omega\ \sqcap\ d\overline{y}$. (N. 36_1)

(3) Klammern:

Die Klammern variieren stark nach Größe und Form. Sie werden nicht immer konsequent gesetzt. Außer den heute üblichen Zeichen verwendet Leibniz den Klammerbalken

(vinculum) sowie ein- und zweiseitige Halbklammern (im Text durch , bzw. ⌞ und ⌟ wiedergegeben). Beispiele:

$$\sqrt{\frac{ax}{2} \frown \llcorner\!\llcorner a^2 + a^2 - \frac{ax}{2} - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}\lrcorner\!\lrcorner} \quad (\text{N. } 2_3)$$

$$y, \frown 1 - \frac{y^2}{3} + \frac{y^4}{5}. \text{ seu } y,,,1,, - y^2, \overline{\frac{1}{3} - \frac{y^2}{5}} \quad (\text{N. } 27)$$

$$\frac{b}{\overline{\overline{a+b}, \text{in } \overline{a+2b}}} \quad (\text{N. } 28)$$

(4) Wiederholungszeichen und Indexbezeichnungen:

Bei mehrzeiligen Schemata bezeichnet Leibniz wiederholt auftretende Bestandteile der Formeln (sowohl Operatoren wie Terme) durch entsprechende Punktierung bzw. durch einfaches Freilassen. Die Punktierung gibt manchmal die Dimension des wiederholten Elements wieder. Beispiele:

$$\frac{2a \frown \dfrac{4a^2b^4}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}}{a^2 - \dfrac{4a^2b^4}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}} = \frac{\dfrac{8a^3b^4}{\cdots\cdots}}{\dfrac{a^6 - 2a^4b^2 + \cancel{a^2b^4} - 3\cancel{4}a^2b^4}{\cdots\cdots}} \quad (\text{N. } 4)$$

$$\left.\begin{array}{lllllllll} ECT & \sqcap & + & EAL & - & EAT & - & CTL & \text{Ellips.} \\ & & - & \ldots & + & \ldots & + & \ldots & \text{Hyp.} \end{array}\right\} \quad (\text{N. } 31)$$

Als Indexbezeichnung verwendet Leibniz nach dem Vorbild von Descartes gelegentlich vorangestellte Ziffern (z. B. N. 20). Üblich ist bei ihm auch sukzessive Klammerung. Beispiele (N. 32):

$$s - \textcircled{2}s$$

$$a \sqcap \frac{y}{1} \qquad a \sqcap \frac{(y)}{2} \qquad a \sqcap \frac{((y))}{4} \qquad a \sqcap \frac{(((y)))}{8} \qquad a \sqcap \frac{((((y))))}{16}$$

(5) Auslassungszeichen:

Nicht auftretende bzw. wegfallende Terme werden wie bei Descartes durch den Asterisk $*$ angezeigt (N. 49). Ausgelassene Zeichen können durch einen Punkt gekennzeichnet sein. Bisweilen verzichtet Leibniz auch auf Auslassungszeichen. Beispiele:

$$d\ \overline{\frac{x}{1}\ \frac{x^5}{5}\ \frac{x^9}{9}\ \frac{x^{13}}{13}} \sqcap x\ .\ x^4\ .\ x^8\ .\ x^{12} \quad (\text{N. } 31)$$

$$x \quad x^2 \quad x^3 \text{ etc. } \sqcap \frac{x}{1-x}. \; x^3 + x^4 + x^5 \sqcap \frac{x^3}{1-x} \quad (\text{N. } 31)$$

$$\overbrace{1.1.1.1}^{4} + \overbrace{1.1}^{2} \sqcap \overbrace{1.1.1.1.1.1}^{6} \quad (\text{N. } 35)$$

(6) Ungleichungen:

Leibniz verwendet die Symbole $\sqcap$ für größer und $\sqcap$ für kleiner. Beispiele:

$$c \sqcap 355 - \frac{1}{b}. \quad c + \frac{1}{b} \sqcap 355.$$

$$c \sqcap 355 + \frac{1}{b} \qquad (\text{N. } 19)$$

$$\begin{aligned} l. \text{ ab } n \quad &\sqcap \quad n \\ &\sqcap \quad \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} \\ &\sqcap \quad \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \\ &\sqcap \quad \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} \quad (\text{N. } 32) \end{aligned}$$

(7) Leibniz rechnet gelegentlich fortlaufend, d. h. er verwendet bei Gleichungsketten Zwischenergebnisse ohne Neuansatz weiter. Beispiele:

$$4x^2 = -\frac{64}{16}x^2 + \frac{x^2}{16} = \frac{63}{16}x^2 \; (\text{N. } 2_3)$$

$$\begin{aligned} \frac{a^3b}{a^2+b^2} &= \frac{a^3b}{a^2+b^2} - \frac{a^3b^3}{a^4+b^2a^2} + \frac{a^5b^5}{a^8+b^2a^6} - \frac{a^{11}b^7}{a^{16}+b^2a^{14}} \text{ etc.} \\ &\quad \frac{ab}{1} - \frac{b^3}{a} + \frac{b^5}{a^3} - \frac{b^7}{a^5} \text{ etc. } (\text{N. } 4) \end{aligned}$$

$$34 \frown 5 \sqcap \frac{170}{25} \sqrt{\sqcap} \frac{13}{5} \; (\text{N. } 24)$$

(8) Leibniz schreibt in Anlehnung an Viète Gleichungen oft homogen. Das Verfahren dient überwiegend zur Rechenkontrolle, ohne dass es immer konsequent durchgeführt wird. Wechsel zwischen homogener und inhomogener Schreibweise kommen manchmal vor (z. B. in N. 23).

(9) An verschiedenen Stellen verwendet Leibniz mnemotechnische Hilfsmittel, insbesondere Zuordnungsstriche und Punkte (z. B. in N. 1). Beispiele:

Jam sector est Fulcrum + Segm.

$$\frac{a^3b}{a^2+b^2} \quad + \text{ semirectang. } - \text{ serie}$$

$$\frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7} \text{ etc.}$$

$$\frac{b^3a}{b^2+a^2} = \frac{b^3}{a} - \frac{b^5}{a^3} + \frac{b^7}{a^5} - \frac{b^9}{a^7} \text{ etc.}$$

$$\frac{a^3b+b^3a}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \frown ab = ab \qquad \text{(N. 4)}$$

$$\frac{b^{11}}{11} \sqcap \frac{204147}{461737344} \text{ (N. 47)}$$

(10) Umformungen:

Rechenschritte zur Vereinfachung von Gleichungen und Termen werden von Leibniz mittels mehrfacher Klammerung, Streichungen oder abgerundeter Umrahmungen angezeigt. Davon zu unterscheiden ist die Hervorhebung gültiger Terme, die durch kreisförmige, ovale oder eckige Umrahmungen wiedergegeben wird. Die Reihenfolge der Rechenschritte kennzeichnet Leibniz mitunter durch Mehrfachstreichungen oder durch beigefügte Zähler. Beispiele:

$$l \sqcap \frac{\cancel{2}\boxed{4a-2x}, \frown \frac{\cancel{a^2}x}{\boxed{2a-x}}}{a^2 + \frac{a^2x}{2a-x} \sqcap \frac{\cancel{2}a^{\cancel{3}}\boxed{-a^2x+a^2x}}{2a-x}} \text{ (N. 8)}$$

$$AE\overset{\frown}{A} + ALE \boxed{+ADL} (\sqcap ADE\overset{\frown}{A}) \sqcap \overset{\frown}{A}LE\overset{\frown}{A} \boxed{+AL\overset{\frown}{A}} \boxed{+ADL}$$

$$ADL \quad \boxed{+AL\overset{\frown}{A}} \qquad \text{(N. 30)}$$

$$r \underset{+}{-} \frac{2y^2r}{r^2+y^2} \sqcap r \underset{+}{-} \frac{a^2}{1,2} \underset{-}{+} \frac{a^4}{1,2,3,4} \underset{+}{-} \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6} \text{ etc. (N. 45)}$$

(11) Besondere Zeichen:
Es finden verschiedene Darstellungen für Zehnerpotenzen Anwendung. Mohr schreibt für 100000 in N. 26: $1\textcircled{5}$. Leibniz verwendet ebenso eingekreiste Exponenten:

$$11437 \sqcap \omega. \text{ et } \frac{11437}{120\,000} \sqcap \frac{\omega}{12\ \textcircled{4}} \quad (\text{N. } 48)$$

Zudem benutzt er für Zehnerpotenzen auch die Null mit hochgestelltem Exponenten:

$$\frac{864\overline{0}^{8}\omega - 36\overline{0}^{4}\omega^2 + \omega^3}{6,1728,\ \textcircled{12}} \quad (\text{N. } 48)$$

Leibniz verwendet in N. 42 das Komma sowohl zur Abtrennung von Dezimalstellen als auch als Multiplikationssymbol; er schreibt $r \sqcap \frac{391,6,6,6,6,00,00,000}{7,3,3,3,3,3}$ für $r = \frac{391 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 100.00.000}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$.

Zur Kennzeichnung von Kürzungen in Brüchen benutzt Leibniz bisweilen spezielle Symbole:

$$\frac{144}{1296} \overset{2}{\Big|} \frac{72}{648} \overset{9}{\Big|} \frac{8}{72} \Big| \frac{1}{9} \quad (\text{N. } 33)$$

$$\begin{matrix} 360 \\ 45 \end{matrix} \overset{9}{\Big|} \frac{40}{5} \Big| \frac{8}{1} \quad (\text{N. } 35)$$

Zu den im Band auftretenden mathematischen Zeichen vgl. auch S. 731.

Siegmund Probst Uwe Mayer

ZUR TEXTGESTALTUNG

In der Textgestaltung werden die Grundsätze befolgt, die in den Vorworten zum fünften Band der Reihe I und zum sechsten Band der Reihe VI entwickelt wurden. Insbesondere gilt:

1. Jedes unbetitelte Stück erhält eine Überschrift in der Sprache des Stückes.

2. Die Groß- und Kleinschreibung lateinischer Texte wird normalisiert. Ebenso werden i und j sowie u und v vereinheitlicht. Vollständige Sätze werden mit einem Punkt abgeschlossen. Jeder Satzanfang wird groß geschrieben. Akzente fallen weg. Bei französischen Texten wird das Schriftbild beibehalten, jedoch werden Akzente dort ergänzt, wo Missverständnisse entstehen können.

3. Die Leibnizsche mathematische Notation wird grundsätzlich beibehalten. Bei schwankender Bezeichnung von Strecken und Größen wird nach dem Mehrheitsprinzip vereinheitlicht. Aufgrund des Konzeptcharakters der meisten Stücke treten häufig Flüchtigkeiten auf. So fehlen gelegentlich Wurzelbalken, Klammern, Multiplikationszeichen, besonders oft aber Pluszeichen. In solchen Fällen wird nach sonstigem Leibnizschen Gebrauch stillschweigend ergänzt (bei stärkeren Eingriffen mit Dokumentation im Apparat). Leibniz neigt dazu, in seinen Konzepten auch einfachste numerische Rechnungen wie $11 \times 11, 18 \times 3$ schriftlich auszuführen. Solche Nebenrechnungen werden nicht abgedruckt. Rechenfehler werden grundsätzlich im Apparat angezeigt. Ausnahme: Verschreibungen im Rechengang; diese werden stillschweigend verbessert.

4. Die Leibnizsche Interpunktion wird bewahrt. Hinzugefügte Zeichen werden — abgesehen von den in Punkt 2 und 3 genannten Fällen — in eckige Klammern gesetzt. Es ist anzumerken, dass bei Leibniz ein Komma oder auch ein Semikolon oft die Funktion hat, eine längere Phrase vor der Verbindung mit dem zugehörigen Prädikat zusammenzufassen.

5. Die Leibnizschen Zeichnungen werden möglichst genau nach der Vorlage und mathematisch korrekt wiedergegeben. Linien in Blindtechnik, die also nur im Papier eingedrückt oder eingeritzt sind, werden im Druck gekennzeichnet.

Weitere Einzelheiten zur Textgestaltung siehe unter Siglen, Abkürzungen, Zeichen.

ZUR VARIANTENGESTALTUNG

Auch die Variantengestaltung erfolgt gemäß den Regeln der Ausgabe. Die Variante ist durch Zeilenangabe sowie vorderen und hinteren Anschluss eindeutig mit dem Haupttext verknüpft. Einer dieser Anschlüsse kann insbesondere bei Rechentexten fehlen. Streichungen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt, Ergänzungen durch bloße Angabe des hinzugefügten Textes dargestellt. Bei Korrekturen kennzeichnen vorgesetzte Ziffern *(1)*, *(2)*, *(3)* ... und Buchstaben *(a)*, *(b)*, *(c)* ... *(aa)*, *(bb)*, *(cc)* ... die Stufen der Gedankenentwicklung. Kleinere Streichungen bzw. Ergänzungen innerhalb der einzelnen Stufen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt. Jede nachfolgende Stufe hebt die vorhergehende auf. Nachgestellte Siglen (in diesem Band meist L) bezeichnen den Textzeugen, welchem die Variante entnommen ist.

In den Varianten werden Wortlaut und Zeichensetzung grundsätzlich nicht berichtigt, auch nicht bei offensichtlichen Fehlern. Abbrechende Wörter werden nicht vervollständigt. In der letzten Korrekturstufe werden aus dem Text übernommene Abschnitte durch Pünktchen abgekürzt wiedergegeben.

ARITHMETISCHE KREISQUADRATUR 1673–1676

1. DISSERTATIO DE ARITHMETICO CIRCULI TETRAGONISMO [Herbst 1673 und Juli (?) 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 87–88, 91–92, 240–241. 3 Bog. 2°. 9 S. Haupttext auf Bl. 87–88, 240–241 und 91 r°, späterer Zusatz auf Bl. 91 v°–92 r°. Bogenmarkierungen. Auf Bl. 87–88 sowie 240–241 Textverluste durch Papierschäden an den Rändern und im Falz.
Cc 2, Nr. 563, 1233 A tlw.

Datierungsgründe: Das Stück stellt einen zweiten Ansatz zur in VII, 4 N. 42_1 (LH 35 II 1 Bl. 89–90) unternommenen Kreisquadratur dar. Dabei hat Leibniz die Markierung von VII, 4 N. 42_1 als Bogen (1) (ursprünglich durch VII, 4 N. 42_2 fortgesetzt) auf den vorliegenden 3 Bögen fortgeführt (Bogenmarkierung (3) auf Bl. 240–241 im Falz ausgerissen, Zusammenhang aber durch Kustoden gesichert), mit der Nummerierung von Figuren und Theoremen jedoch neu eingesetzt. N. 1 dürfte kurz nach dem vom Hrsg. auf Herbst 1673 datierten VII, 4 N. 42 entstanden sein; es ist auf dem gleichen für November 1673 belegten Papier notiert. Das vom Hrsg. ebenfalls auf Herbst 1673 datierte VII, 4 N. 45 ist eine eigenständige Fortsetzung des vorliegenden Stücks. Der spätere Zusatz auf Bl. 91 v°–92 r° hingegen behandelt ein Theorem, auf das Leibniz in der auf Juli 1676 datierten Aufzeichnung N. 32 Bezug nimmt, und dürfte etwa zur selben Zeit entstanden sein.

L e m m a.

„Si per Trianguli tres angulos, A. B. C. totidem transeant rectae parallelae, intermi-
„natae, et latus aliquod CB (vel CA) producatur, si opus est, donec Anguli oppositi
„A (vel B) parallelae occurrat in D (vel E): Rectangulum sub AD (vel BE) intervallo

---

20–4,15 Deleantur quae in parenthesi et fiat pro illis alia figura iisdem literis quae extra parenthesin.

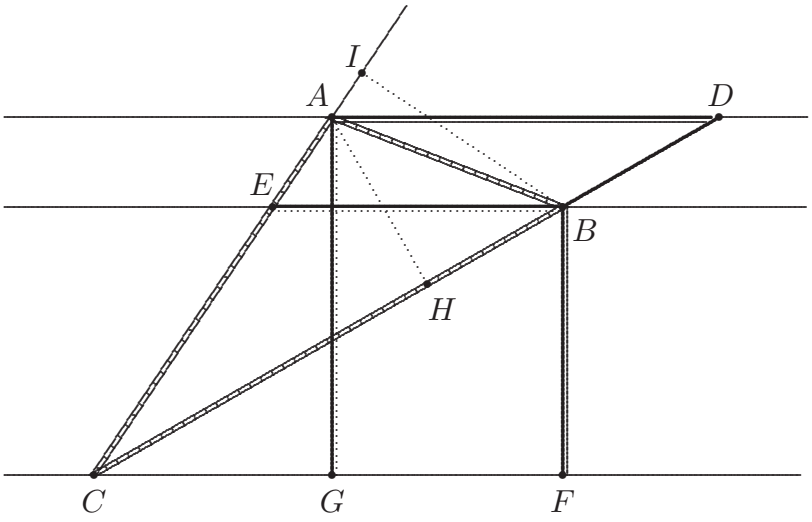


fig. 1.

„Anguli supra-dicti, punctique occursus; et BF (AG) intervallo parallelarum duorum „reliquorum Angulorum; aequatur Triangulo duplicato.

Ex Angulo opposito A (vel B) ducatur perpendicularis AH (vel BI) in latus assumtum CB, et si opus est productum in D (vel CA productum in I). Manifestum est duo haberi Triangula rectangula similia AHD (vel BIE) et BFC (vel AGC) quorum illud intervallo anguli oppositi a puncto occursus velut hypotenusa, perpendiculari autem ex angulo opposito in latus assumtum, velut altero latere comprehenditur; hoc vero latere assumto velut hypotenusa, intervallo parallelarum duorum angulorum quos latus assumtum cum aliis Trianguli lateribus facit, velut altero latere, continetur. Similia autem esse haec Triangula manifestum esse ajo, nam angulus ADH (vel BEI) angulo BCF (vel ACG) aequalis est, quoniam uterque acutus est, cum sit in Triangulo rectangulo, et efficitur per eandem rectam CBD (vel CEA) ad duas parallelas AD, CF. (vel BE, CG). Ergo $AD : BC :: AH : BF$ (vel $BE : AC :: BI : AG$) ac proinde Rectangulum $AD \frown BF =$ Rectangulo $BC \frown AH$ (vel $BE \frown AG = AC \frown BI$) id est Triangulo ABC duplicato.

S c h o l. Obiter hoc loco annoto, fieri non posse, ut ex tribus illis parallelis plusquam una Triangulum secet.

17 f. S c h o l. . . . secet. *erg. L*

Theorema I

„Si ex sumto in linea curva $ACBL$ puncto A, ducatur recta interminata AD versus „convexum curvae latus; et ex omnibus curvae punctis sequentibus B. ductae tangen- „tes BD ei rectae occurrant, partes hujus rectae occursu tangentium Resectae, „inde ab initio sive a primo puncto sumtae, quas compendii causa, Resectas „imposterum appellabimus AD. alii cuidam, rectae ad priorem normali intra figurae „concavitatem ductae, AE, velut Axi ordine ad perpendiculum applicatae intelli- „gantur, $E\delta$; ea lege ut $E\delta$ productae si opus sit in punctum curvae respondens B, „(a cujus tangente resectae sunt,) sive in sinus ex curva in axem perpendiculariter „actos EB, incidant: his ita positis area figurae novae ex Resectis conflatae $AE\delta\delta\cup A$ „aequabitur duplo segmento, recta primum postremumque assumtorum curvae punc- „torum jungente, curvaeque intercepta portione comprehenso $ACBLA$.

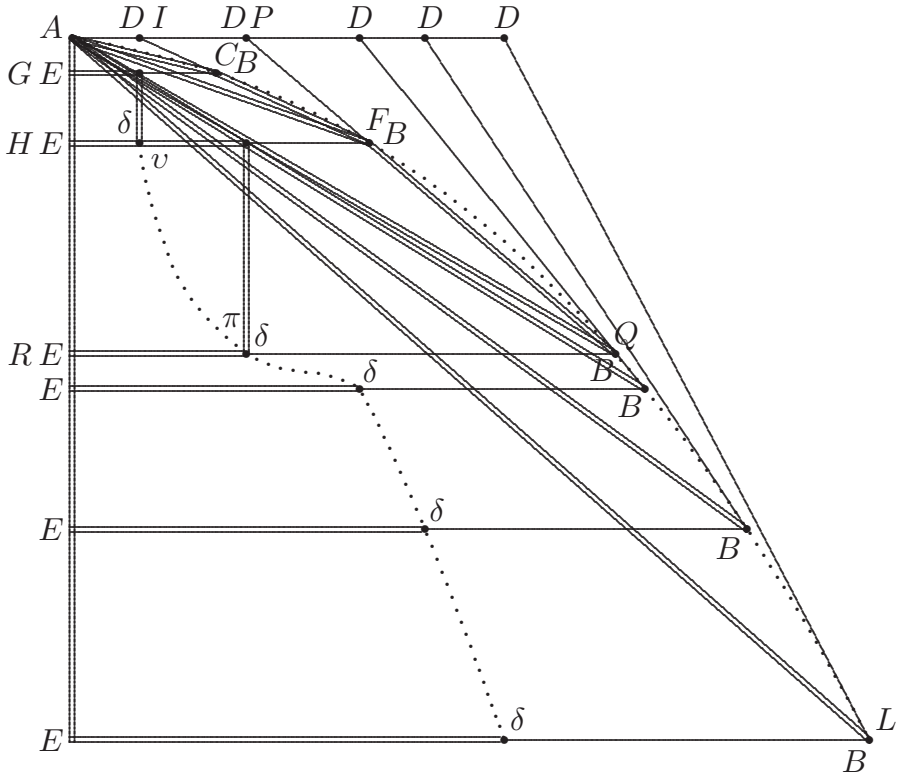


fig. 2.

5 *Über* Resectas*:* Rescissas

Intelligantur infinita curvae puncta $B.$ v. g. $C.$ $F.$ sive aequaliter sive inaequaliter a se distantia, modo intervallum BB; v. g. $CF.$ sit infinite parvum nam ita etiam sinuum EB v. g. $GC.$ HF intervallum $EE.$ v. g. GH erit infinite parvum, ac proinde recta BB v. g. FC duo proxima curvae puncta jungens, producta, nempe BBD, v. g. $FCI.$ erit tangens curvae. Jam ductis omnibus BB, jungantur omnes AB v. g. $AC.$ AF, fient totidem Triangula infinita $ABB.$ etc. v. g. $ACF.$ AFQ et per uniuscujusque tres apices sive angulos totidem, tres inquam, transibunt rectae parallelae; AD per apicem A, EB una per unum, altera per alterum punctum B, v. g. GC per C, HF per F. Ergo per Lemma praecedens AD, v. g. AI, ducta in EE respondentem, v. g. GH, sive rectangulum $E\delta$, v. g. $G\cup$. aequatur Triangulo ABB, v. g. $ACF.$ duplicato. Ergo summa omnium Triangulorum ABB duplicata, id est positis intervallis punctorum $B.$ $B.$ proximorum v. g. $C.$ $F.$ infinite parvis, segmentum ipsum $ACFBLA$ duplicatum; aequabitur summae omnium rectangulorum $E\delta.$ v. g. $G\cup$ id est $\langle — — —\rangle$ figurae novae ex Resectis infinitis $E\delta = AD$, v. g. $H\cup = AI$, ordinatim ita scilicet ut punctis $B.$ curvae e regione respondeant, sive si producantur, incidant; axi AE ad perpendiculum applicatis conflat⟨ae⟩ $\langle AE\delta\delta\rangle\cup A$. Quod er⟨at demonstrandum.⟩

Theorema II

„Iisdem positis si curva proposita ABL fig. 3 sit arcus circuli, et Resecta ex puncto „primo assumto $A.$ ducta $AD.$ circulum tangat, erit Resecta $AD.$ ad radium ut sinus „versus sive Abscissa $AE.$ ad sinum rectum sive Applicatam Circuli, $EB.$

In $BD.$ productam agatur perpendicularis $AO.$ Cum Angulus ODA sit aequalis angulo DBE, erit supplementum illius ad rectum, nempe Ang. $OAD.$ = supplemento hujus ad rectum, nempe Angulo $EBM.$ ideoque ob Triangula similia AOD, et BEM, erit $AO : EB :: AD : MB$. Jam $AO = AE$. Nam $AO = BN$ quia AN sinus rectus perpendicularis ad MB radium, ergo parallelus ad OB tangentem. Jam $AN = EB$, ideoque $BN = AE.$ ob circuli uniformitatem, ut patet. Ergo $AO = AE.$ ac proinde repetita priori aequatione, sed substituto AE, in locum AO, erit $AE : EB :: AD : MB$.

13 est | $\langle — — —\rangle$ *im Falz erg.* | figurae *L*

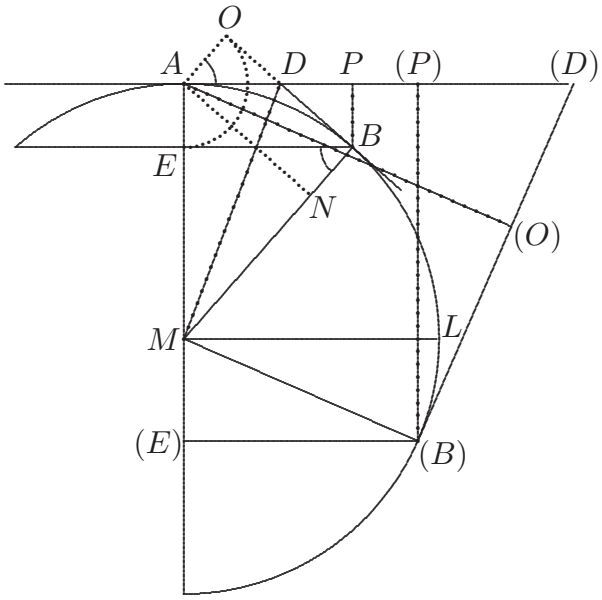


fig. 3.

S c h o l. Obiter annoto; ob circulum, AD resectam esse aequalem ipsi BD. et esse T a n g e n t e m C a n o n i c u m arcus dati AB, dimidiati sive semilatus polygoni sectori circumscripti, quia S e c a n s C a n o n i c u s MD arcus dimidiati arcum AB. bisecat. 5

T h e o r e m a I I I

„In Circulo si Resectae ex Tangente, v. g. AI. et AP. sint ut numerus ad numerum ra-

7 *Darüber:* (s u p r a f i g. 2)

6 f. T h e o r e m a *(1)* I V. *(2)* I I I *(a)* Iisdem positis *(aa)* Resecta *(bb)* in eadem fig. 3 Resecta Circuli, AD, ⟨—⟩ AN aeqvatur applicatae ⟨—⟩ *(b)* Si Resecta ad Resectam, v. g. AI. ad IP. sit *(c)* | In Circulo *erg.* | Si . . . et | IP. *ändert Hrsg.* | sint ut numerus *(aa)* ad numerum, etiam *(bb)* rationalis scilicet ad numerum | scilicet *nicht gestr.* | *(cc)* ad L

1 fig. 3: Die im Text nicht benutzten Punktbezeichnungen und Linien sind vermutlich nachträglich im Zusammenhang mit N. 4 ergänzt. Fig. 3 dürfte Vorlage für die dort fehlende fig. 2 (s. N. 4 S. 56 Z. 2) gewesen sein.

„tionalis scilicet ad rationalem, etiam segmentum segmento, v. g. $ACFA$ ipsi $ACQA$, „commensurabilis erit.

Iisdem positis, in fig. 2 Curvam $ACFBL$ esse circularem, et Resectam AD esse tangentem, sive Axem AE esse diametri portionem, si recta AD interminata in qua Resectae sumantur, in partes aequales numero infinitas magnitudine infinite parvas, DD. v. g. AI. IP divis⟨a⟩ per quas Resectae uniformiter, sive arithmetica progressione crescant, ut scilicet esse possint commensurabiles, sive ut numeri habentes unitatem, quanquam infinite parvam, quae omnes metitur, et ex quolibet divisionis puncto D tangens DB, v. g. IC. PF ad arcum circuli ducta, intelligatur: Elementa segmentorum circuli habebimus resoluta in progressionem quae infinita serie numerorum rationalium exprimi, aut finita mechanice quanquam summa cum exactitudine et facilitate adumbrari potest, sive Triangula ABB, per quae Segmenta Circuli ad applicatarum instar continue crescunt, quemadmodum denique etiam ipsa Segmenta $ACBBA$ ex iis conflata, imo et portiones circulares a sinubus rectis abscissae $ACBEA$, crescent ut numeri. Sed ut hoc obtineamus, ante omnia demonstrandum est Lemma sequens:

Lemma II

Si ea sit natura (fig. 4) figurae $AT\delta\delta A$, ut perpetuo quoties duae Abscissae $A\Delta$, v. g. $A\Upsilon$. $A\Pi$ sunt ut numerus ad numerum, etiam Applicatae $\Delta\delta$, v. g. $\Upsilon\upsilon$. $\Pi\pi$ sint ut numerus ad numerum rationalis scilicet ad rationalem; vel contra: tunc Portiones quoque a figura abscissae, sive spatia, lineis abscissa, applicata, et curva, comprehensa; $A\Delta\delta A$, v. g. $A\Upsilon\upsilon A$, $A\Pi\pi A$ erunt commensurabilia.

1 f. ACQA, | imo et ipsa portio Circularis sinu recto abscissa v. g. ACFHA, alteri, v. g. ACFQRA *erg. u. gestr.* | commensurabilis *L* 7 f. ut ... metitur. *erg. L* 11 exprimi *(1)* potest, sive ⟨—⟩ Triangulum | qvodlibet *erg.* | ABB. ad aliud Triangulum, *(a)* aut *(b)* v. g. ACF, *(c)* qvodcunqve v. g. *(2)*, aut *L*

2 commensurabilis: Die Aussage ist nur für infinitesimale IP korrekt, wird aber im Übergang zu endlichen Größen wegen S. 10 Z. 7–9 falsch. Dies beeinträchtigt die weitere Diskussion bis S. 14 Z. 11.
22 f. commensurabilia: vgl. die Erl. zu Z. 2.

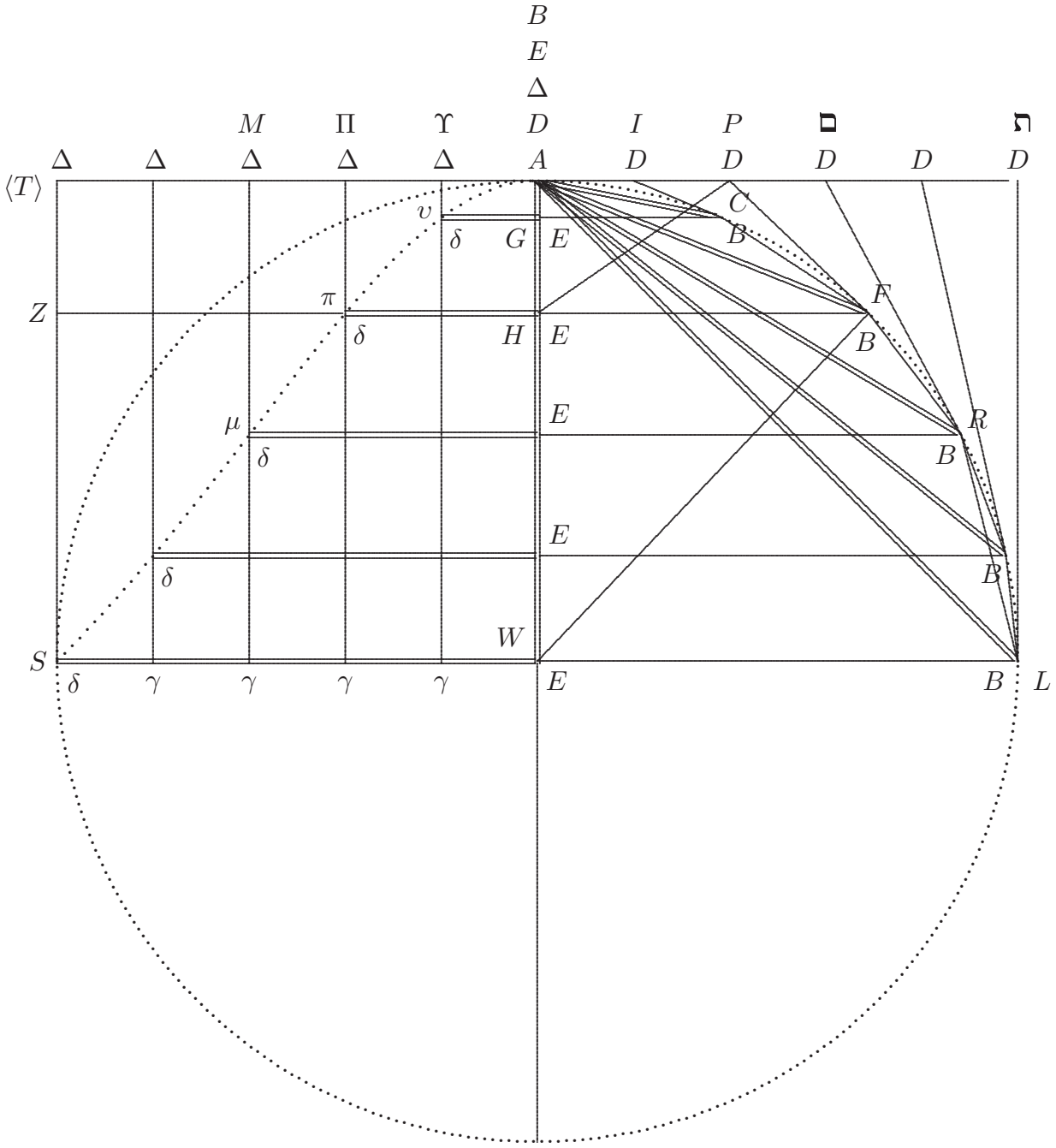


fig. 4.

Positis enim abscissis $A\Delta$ numero infinitis, intervallisque duorum Δ proximorum, $\Delta\Delta$, v. g. $A\Upsilon$, $\Upsilon\Pi$ infinite parvis, patet spatium abscissum $A\Delta\delta A$, v. g. $A\Pi\pi\upsilon A$ aequari summae rectanguloru⟨m⟩ ex applicatis in differentias abscissarum ductis, $\Delta\Delta$ qualia sunt

v. g. $A\Upsilon\upsilon$, $\Upsilon\Pi\pi$. Posito jam Abscissas omnes crescere ut numeros, v. g. Arithmetica progressione; ac proinde differentias quoque earum, quae posita Abscissarum progressione Arithmetica, sunt inter se aequales. Et sane si crescant Abscissae, vel earum differentiae ut numeri statim fieri potest unica subdivisione, ut crescant arithmetica progressione. His inquam positis ideo ex Hypothesi, ob natura⟨m⟩ figurae; etiam Applicatae omnes continue crescent ut Numeri quare et Rectangula ex Applicatis et differentiis abscissarum quare denique et Rectangulorum summae, id est spatia abscis⟨sa.⟩ Impossibile est enim ex additione, multiplicatione commensurabilium cum commensurabilibus, etiamsi infinities repetita fieri aliud quam commensurabile. Semper enim unitas constructionis, quanquam infinite parva infinitiesque repetita, productum metietur. Unde s e q u i t u r posse assignari aliam quandam unitatem, finite parvam, communem earum quantitatum quae ex unitatis cujusdam com⟨munis⟩ quanquam infinite parvae, infinita repetitione ortae sunt ⟨—⟩ finities repetendam, et quantitates fore, ut repetitionu⟨m — —⟩finite parv⟨ae⟩ unamquamque earum quantitatum ⟨—⟩

Consequentiam autem istam ita ostendo: cum enim duae Quantitates propositae, ex Hypothesi, infinita repetitione unitatis cujusdam communis infinite parvae gignantur, numeri repetitionum, quanquam infiniti, erunt inter se commensurabiles. Quod si jam duo Numeri infiniti homogenei, per alium infinitum, homogeneum dividantur, producentur duo numeri finiti. H o m o g e n e o s voco qui sunt ejusdem dimensionis, seu qui sunt inter se ut Ratio ad Rationem seu punctum ad punctum, vel ut Linea ad Lineam, vel ut superficies ad superficiem, scilicet finita ad finitam, quae omnia eodem recidunt, nam et linea finita ad lineam finitam, est ut ratio ad rationem id est ut Numerus, sive ille sit surdus sive rationalis, ad numerum. Deinde: duo Numeri commensurabiles per alium quendam commensurabilem divisi, producunt duos alios commensurabiles. Ideoque etiam Numeri Repetitionum supradicti, quanquam infiniti, attamen inter se commensurabiles, divisi per alium quendam Numerum infinitum commensurabilem, producent duos numeros finitos commensurabiles seu rationales; ac proinde etiam ante divisionem; erunt inter

3–5 Et ... crescant | Abscissae vel *(1)* diff *(2)* earum differentiae *erg.* | ut ... crescant *(a)* per unitates *(b)* arithmetica ... positis *erg. L*

7–9 Impossibile ... commensurabile: Die Behauptung ist nicht richtig; vgl. Erl. zu S. 8 Z. 2.

se ut illi duo numeri rationales. Nam duae quantitates sunt inter se, ante divisionem, ut producti ex applicatione divisoris communis. Ita exempli causa si duae Lineae commensurabiles a. b. (id est duo Numeri punctorum infiniti homogenei, commensurabiles,) alia linea commensurabili, c (id est alio Numero infinito homogeneo commensurabili), divisae intelligantur, constat utique producta, $\frac{a}{c}\,\frac{b}{c}$ esse numeros commensurabiles, sive rationem earum $\frac{a}{b}$ esse numerum sive integrum sive fractum rationalem. Idemque est, si pro linea spatium intelligatur.

S c h o l. Hujus Lemmatis ut appareat universalitas, ususque amplissimus, notandum est quotiescunque curvae propositae aequatio, Cartesii methodo sane praeclara, per relationem y. ad x. sive abscissarum ad applicatas vel contra, interveniente tantum una alterave quadam recta constante, a. sive Parametro; expressa est, et vero fieri potest, per naturam aequationis, ut altera v. g. x. sola puraque id est ab omni potestate alteriusve aut sui ipsius ductu libera; ab uno aequationis latere constitui possit; ab altero vero aequationis latere ipsa x. non reperiatur; et quicquid ibi reperitur, nulla surditate affectum sit; brevius: quoties valor alterutrius indeterminatarum, v. g. x. pure et absolute sine asymmetria exhiberi potest. Tunc posita x. velut applicata, y. velut abscissa, semper dici poterit; si abscissae sint ut numerus ad numerum rationalis scilicet ad rationalem, etiam applicatas, imo et portiones a figura per applicatam abscissas, abscissa, applicata et curva contentas, fore commensurabiles. Exempli causa, si curva $A\delta S$ sit parabolica, cujus Axis AW. aequatio figurae est $ax - y^2 = 0$. positis AE, vel $\Delta\delta$, x, et $A\Delta$ vel $E\delta$, y. Quod si jam semiparabolae $A\delta SWA$ abscissae sumantur $x = AE$ applicatae $y = E\delta$ positis licet omnibus abscissis AE, arithmetica progressione, seu instar numerorum naturalium deinceps ab unitate crescentibus, applicatae non erunt commensurabiles, erit

1–7 *Am Rand:* Imo cum semper figura complemento suo sit commensurabilis, erit etiam segmentum quadrantis quadrato Radii commensurabile et ideo Circumferentia erit Diametro commensurabilis.

24–26 Imo ... commensurabilis: Die Voraussetzung und die daraus abgeleitete Aussage sind nicht korrekt.

enim $y = \sqrt{ax}$. At si in Trilineo parabolico concavo $ATS\delta A$, abscissae $A\Delta = y$ intelligantur esse basi, applicatae vero $\Delta\delta = x$ axi semiparabolae parallelae, ac proinde Abscissae Trilinei applicatis semiparabolae, et contra, aequales; positis jam $A\Delta = y$. commensurabilibus arithmetica progressione crescentibus, seu $\Delta\Delta$, v. g. $A\Upsilon$ et $\Upsilon\Pi$ aequalibus, etiam applicatae $\Delta\delta = x$. erunt commensurabiles quoniam $x = \dfrac{y^2}{a}$. Idemque est in paraboloeidibus simplicibus, ut voco, in infinitum, v. g. in Cubica Simplice aequationis $a^2x = y^3$. aliud est in Compositis, v. g. in Cubica Quadratiformi, ut vocare soleo, in qua $ax^2 = y^3$. Ducemur autem hoc Parabolae ac paraboloeidum simplicium exemplo, fieri posse, ut etsi una indeterminatarum, y posita arithmetice crescente, altera x crescat commensurabiliter, non tamen idem inverso modo ab y semper expectandum esse, etsi x arithmetice crescente.

In Hyperbola autem, et Hyperboloeidibus simplicibus in infinitum, si $\delta\delta\delta\delta$, v. g. $\delta\delta\pi\upsilon$ sit curva, TA et TS, ἀσύμπτωτοι, spatiumque sit Quinquelineum v. g. $TZ\pi\upsilon\Upsilon\Pi T$. Nihil refert, applicatae an abscissae in $T\Upsilon$ an $\Upsilon\upsilon$, assumantur, utraque enim indeterminatarum x vel y. absolute sine asymmetria explicari potest. Posito enim $T\Pi$ vel $T\Upsilon$ esse x. et $\Upsilon\upsilon$ vel $\Pi\pi$ esse y cum aequatio Hyperbolae sit $a^2 = xy$. erit $y = \dfrac{a^2}{x}$, et $x = \dfrac{a^2}{y}$. Idemque est in Hyperboloeidibus simplicibus secus in compositis. Caeterum cum ex inventis profundissimi Geometrae P. Gregorii a S. Vincentio, P. Sarrasa Analogiam Logarithmorum ad spatia Hyperbolica ingeniose admodum deduxerit, hinc sequitur, si termini rationum sint commensurabiles etiam Logarithmos eorum, quanquam eos geometrice hactenus nemo

7–12 $ax^2 = y^3$. | *(1)* Qvibus c *(2)* Ducemur ... etsi *(a)* absciss *(b)* una ... arithmetice *(aa)* proportionalit *(bb)* crescente ... crescente. *erg.* | In *L* 13 ἀσύμπτωτοι, *(1)* spatiumqve sit v. g. $\Upsilon\upsilon\pi\Pi$ duabus asymptoti unius TS. parallelis $\Pi\pi$, $\Upsilon\upsilon$, portioneqve Asymptoti alterius $\Pi\Upsilon$ et curva $\pi\upsilon$ comprehensum, nihil refert qvamnam comprehendentium altitudinemne $\Pi\pi$, an basin | $\Pi\Upsilon$ *nicht gestr.* | *(a)* appellas, x. an y. utraqve enim *(b)* abscissae applicataeve loco assumas, cum utraqve *(2)* spatiumqve *L*
19 ingeniose admodum *erg. L*

17 inventis: G. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI. 19 deduxerit: A. A. de Sarasa, *Solutio*, 1649, insbes. S. 7 f. 19 sequitur: Die Folgerung ist nicht korrekt; vgl. Erl. zu S. 8 Z. 2.

construxerit neque numeris sive rationalibus sive surdis exacte exhibuerit, inter se fore ut numeros rationales.

Continuatio Demonstrationis Theorematis III

Lemmate ergo praecedente demonstrato, ad Theorematis ipsius III^{tii} demonstrationem, nihil aliud desideratur, quam ut ostendamus, si in fig. 4. curva $ACFBBL$ sit arcus circuli, AD tangens in A, et AE axis, diametri portio; tunc Curvae Resectarum terminatricis, $A\upsilon\pi\delta S$, relationem ad omnia puncta Lineae Rectae AT, vel quod eodem redit, parallelae ejus SW, aut perpendicularium AW, TS. ejusmodi aequatione exprimi posse, quae patiatur ut sumtis in Trilineo $ATS\delta\pi\upsilon A$[,] TS velut basi, AT velut altitudine et $A\Delta = AD = E\delta$, resectis Circuli, velut abscissis (y), $\langle AE =\rangle\Delta\delta = A\langle G\rangle$ sinubus ve⟨rsis ad⟩ Resectas respondentibus; velut applicatis ($\langle x\rangle$) hujus Figurae Resectar⟨um⟩ $A\delta\delta EA$ ad Rectangulum $A\delta$. complementi $A\delta\delta\Delta A$ ut inquam, his factis valor ipsius x absolute ac pure sine asymmetria enuntietur; vel quod idem est, ut magis Geometrice ac minus Algebraice loquamur, nihil aliud requiritur quam ut ostendamus positis abscissis, $A\Delta$ v. g. $A\Upsilon$ et $A\Pi$ ut commensurabilibus, etiam applicatas $\Delta\delta$, v. g. $\Upsilon\upsilon$ et $\Pi\pi$ fore commensurabiles. Hoc enim ostenso sequetur per Lemma 2. etiam portiones complementi Figurae Resectarum abscissas, $A\delta\Delta A$, v. g. $A\upsilon\Upsilon A$ et $A\pi\Pi A$ fore commensurabiles. Cumque etiam rectangula $A\delta$ v. g. $A\upsilon$, $A\pi$ quippe ex commensurabilibus facta, sint commensurabilia, ipsae portiones figurae Resectarum, quippe differentiae inter commensurabilia, complementa nimirum et Rectangula erunt commensurabiles, quare, et Segmenta ACA, $ACFA$, etc., quorum dupla portionibus figurae resectarum aequalia sunt commensurabilia erunt.

Aequationem autem quae ipsius x valorem pure atque absolute exprimat, haberi posse, sic ostendo: Demonstratum est Theoremate 2. resectam circuli esse ad radium, ut sinus versus est ad sinum rectum. Posito ergo Resectam circuli $AD = A\Delta$ sive abscissam complementi figurae Resectarum esse $= y$, Radium circuli esse a. sinum versum AE esse x. erit ex natura circuli sinus rectus $EB = \sqrt{2ax - x^2}$, et sequetur ex theor.

1 neqve ... exhibuerit *erg. L* 6 portio; *(1)* resectaeqve *(a)* sint ut numeri *(b)* AD *(aa)* vel *(bb)* = Eδ *(aaa)* sint ut *(bbb)* v. g. *(aaaa)* AI ad A *(bbbb)* AI = Hυ ad AP = Rπ, ut numerus ad numerum *(2)* figura Resectarum *(3)* tunc *L*

2. aequatio haec: $y = \dfrac{xa}{\sqrt{2ax - x^2}}$ unde $y^2 = \dfrac{x^2a^2}{2ax - x^2} = \dfrac{xa^2}{2a - x}$. Ergo $2ay^2 - xy^2 = xa^2$, vel transponendo $2ay^2 = xa^2 + xy^2$. Ac denique $\dfrac{2ay^2}{a^2 + y^2} = x$.

S c h o l i o n. Ex his apparet, posita constructione nostra, sive Resectis Circuli commensurabilibus, etsi segmenta ut ACA, $ACFA$, non tamen et portiones Circulares a sinubus rectis abscissas, ut $AGCA$, $AHFCA$, statim fore commensurabiles, nam positis x, sinubus versis, velut commensurabilibus sive cognitis, sinus recti quadam radice, $\sqrt{2ax - x^2}$ exprimuntur, ac proinde possunt esse, et sunt plerumque incommensurabiles. Ergo Triangula quoque AGC, AHF quae ex commensurabilibus, sinubus versis AG, AH, et cum ipsis non ideo commensurabilibus sinubus rectis, GC, HF, non ideo sunt commensurabilia. Ergo nec portiones circulares abscissae, quae segmentis, commensurabilibus differunt his ipsis Triangulis.

P r o b l e m a

Aream Circuli aut segmenti circularis repraesentare infinita serie numerorum Rationalium.

Cum enim Area segmenti cujuslibet, (quorum maximum est semicirculus) portionibus figurae Resectarum, $A\delta\delta EA$ respondentibus [dimidiis], aequalis sit[,] portiones autem istae sint differentiae Rectangulorum $A\delta$ a complementis $A\delta\delta\Delta A$, et complementa ista fiant ex sinubus rectis $\Delta\delta$ in differentias $\Delta\Delta$ resectarum $A\Delta$ ductis; ideo compendiosioris

15 f. semicirculus) *(1)* componatur ex infinitis Triangulis ABB, qvae duplicata Rectangulis Aδ aeqvalia *(2)* portionibus L

4 f. non ... commensurabiles: Die Aussage ist korrekt, aber die Begründung ist falsch; vgl. Erl. zu S. 8 Z. 2. 7 f. incommensurabiles: Es gilt $\sqrt{2ax - x^2} = \dfrac{ax}{y} = \dfrac{2a^2y}{a^2 + y^2}$, weshalb die sinus recti entgegen Leibniz' Behauptung kommensurabel sind, wenn dies für die resectae y angenommen wird. Die Folgerung bzgl. der Kreissegmente $AGCA$ ist dadurch nicht korrekt; vgl. S. 8 Z. 14 f.

calculi causa, posito Resectas crescere arithmetica progressione, earumque differentias inter se aequales infinite parvas esse 1. exponi poterunt primum Resectae (y), deinde sinus versi, (x). Inde jam ad areas portionum $A\delta\delta EA$, dupliciter perveniri potest, primum investigando differentias EE v. g. AG. GH duarum proximarum x seu sinuum versorum AE, v. g. AG. AH. Hinc in Tabula I Seriem 1. quae est omnium y. et Seriem 2. quae est omnium x. Series 3 erit differentiarum inter omnes x. ductarum in y respondentes seu dimidiorum Rectangulorum δEE = Triangulis ABB. Quarta denique series erit summarum horum Rectangulorum, seu portionum $A\delta\delta EA$ sive segmentorum $ABBA$. Altera harum Portionum sive segmentorum areas investigandi via haec est, Tabula II, nimirum post seriem ejus 1. omnium y, et seriem ejus 2 omnium x. quae coincidit cum serie omnium Rectangulorum $\Delta\Delta\delta$, v. g. $\Upsilon\Pi\pi$, quoniam rectangula haec producuntur ex ipsis x seu $\Delta\delta$, v. g. $\Pi\pi$ ductis in unitatem $\Delta\Delta$, v. g. $\Upsilon\Pi$, quae non numeros, sed tantum gradum dimensionis mutat. Series 3. erit summarum horum Rectangulorum infinite parvorum sive x in unitatem: seu erit arearum, complementorum, $A\delta\delta\Delta A$. Series quarta erit Rectangulorum communium

2 f. sinus *(1)* recti, (x) inde sinuum rectorum differentiae, non opus autem est rectangula | $\Delta\Delta\delta$, v. g. $\Upsilon\Pi\pi$ *erg.* | ex sinubus rectis in Resectarum differentias separata Tabula | serie *erg.* | exponi, cum eae *(a)* inter *(b)* aeqvales sint = 1. unitas autem non multiplicat; *(aa)* deniqve *(bb)* inde | tertio loco *erg.* | poterunt exponi Sinuum Rectorum | *(aaa)* seu *(bbb)* seu qvod idem est, si in *(aaaa)* recta *(bbbb)* unitatem ducti cogitentur, rectangulorum $\Delta\Delta\delta$ *erg.* | summae, qvae dabunt *(aaaaa)* fi *(bbbbb)* areas complementorum A$\delta\delta\Delta$A; qvarta Tabula erit sinuum rectorum differentiae EE, v. g. AG. GH, ductae in Resectas seu Numeros Arithmetice proportionales AΔ, v. g. AΥ. AΠ. id est Rectangula δEE, v. g. $\cup$GH. duplicata vel Triangula ipsis aeqvalia ABB duplicata; Elementa segmentorum circularium. Qvarta deniqve *(aaaaaa)* Tabula *(bbbbbb)* erit summarum horum postremorum Rectangulorum seu portionum figurae Resectarum, *(aaaaaaa)* A$\delta\delta$EA, v. g. *(bbbbbbb)* v. g. A$\delta\delta$EA, vel segmentorum duplicatorum ipsis aeqvalium ABBA, cuius *(2)* versi *L* 4 investigando *(1)* areas complementorum, A$\delta\delta\Delta$A, deinde et areas rectangulorum, Aδ, et illas ab his subtrahendo. Areae autem Complementorum *(2)* | investigando *gestr.* | differentias *L* 7 Triangulis | BCC scilicet dimidiatis *ändert Hrsg.* | Qvarta *L*

5 Tabula I: s. u. S. 17 f. 6 omnium x: Richtig wäre omnium $\frac{x}{2a}$. Leibniz korrigiert entsprechend konsequent in Tabelle I, aber nur punktuell im Text. Vgl. auch S. 16 Z. 14–18. 10 Tabula II: s. u. S. 19 f.

sive assignabilium $A\delta$, denique series quinta erit differentiarum inter terminos tertiae et quartae; seu inter Rectangula et Complementa portionum figurae Resectarum ad Rectangulum, seu erit ipsarummet portionum figurae Resectarum, $A\delta\delta EA$, sive segmentorum $ABBA$, quorum area quaerebatur. Hujus ultimae Tabulae cum termini omnes sint inter se et terminis caeterarum serierum commensurabiles, per Theorem. 3. primae autem Tabulae termini possint exhiberi Numeris naturalibus continue crescentibus deinceps ab unitate, ergo hujus ultimae Tabulae termini exhiberi poterunt numeris rationalibus. Quod ut reapse perficiatur et ut Tabula secunda sinuum versorum, (x) construatur, resumenda est aequatio ipsius, $x = \dfrac{2ay^2}{a^2+y^2}$ quae dupliciter numeris explicari potest, vel, ponendo $a = 1$. aut, in certa determinata ad 1. ratione, et $y = \dfrac{1}{\text{infinitesimae}}$ vel $\dfrac{2}{\text{infinitesimis}}$ $\dfrac{3}{\text{infinitesimis}}$ etc. vel ponendo $a =$ numero ipsarum y infinito, ut $y = 1$. vel 2. vel 3. vel 4. etc. sive $y = \beta$. 2β. 3β. 4β. posita minima $\Delta\Delta$ seu unitate, infinite parva $= \beta$. Quorum utrumque eodem redire manifestum est.

Antequam autem ad calculum acced⟨a⟩mus, praenotandum est, loco $x = \dfrac{2ay^2}{a^2+y^2}$, rectius adhiberi $\dfrac{x}{2} = \dfrac{ay^2}{a^2+y^2}$, omnibus scilicet omnium Tab⟨u⟩larum terminis dimidiatis, quoniam etiam segmenta eorumque elementa, portionum figurae resectarum, et elementorum ex quibus conflantur dimidia sunt. Deinde divisis omnibus per a, sufficit iniri summam omnium: $\dfrac{x}{2a} = \dfrac{y^2}{a^2+y^2}$. neque enim opus est omnia multiplicari per a sigillatim, cum enim a sit constans et invariabilis, sufficit repetitionum evitandarum causa admoneri, ⟨— — —⟩versum ⟨om⟩nia per ⟨a⟩ multiplicari debere, vel salte⟨m⟩ eorum summam. Tabulae a⟨u— —⟩

8 perficiatur *(1)* et ut Tabula secunda sinuum rectorum x, qvae est num *(2)* resumend *(3)* et ... sinuum *(a)* rectorum *(b)* versorum *L*

TABULA I

⟨Ser. I⟩	0 ...	1	2	3	4	5
$\langle E\delta\rangle = y$	0 ...	β	2β	3β	4β	5β
Ser. II $\dfrac{\langle\Delta\delta\rangle = AE = x}{2a} = \dfrac{y^2}{a^2+y^2}$ vel ut res numeris illustretur	0 ...	$\dfrac{1\beta^2}{a^2+1\beta^2}$	$\dfrac{4\beta^2}{a^2+4\beta^2}$	$\dfrac{9\beta^2}{a^2+9\beta^2}$	$\dfrac{16\beta^2}{a^2+16\beta^2}$	$\dfrac{25\beta^2}{a^2+25\beta^2}$
posito a sinu toto, $= 1000$, fiet:	0 ...	$\dfrac{1}{1000,001}$	$\dfrac{4}{1000,004}$	$\dfrac{9}{1000,009}$	$\dfrac{16}{1000,016}$	$\dfrac{25}{1000,025}$
Ser. III $\dfrac{EE = \Delta\delta - \Delta\delta}{2a}$ Differentiae duarum		$\boxed{1\ldots}$	$\boxed{6\ldots}$	$\boxed{15\ldots}$	$\boxed{28\ldots}$	$\boxed{45\ldots}$
$\dfrac{x}{2a}$ proximarum:	0 ...	$\dfrac{1\beta^2}{a^2+1\beta^2}$	$\dfrac{3a^2\beta^2}{a^4+5a^2\beta^2+4\beta^4}$	$\dfrac{5a^2\beta^2}{a^4+13a^2\beta^2+36\beta^4}$	$\dfrac{7a^2\beta^2}{a^4+25a^2\beta^2+144\beta^4}$	$\dfrac{9a^2\beta^2}{a^4+41a^2\beta^2+400\beta^4}$
vel simpliciter; vel si numeratoris loco sumas quod velut insulae cuidam inclusum est;	0 ...	$\dfrac{1}{1000,001}$	$\dfrac{\boxed{6\ldots\ldots}\ 3000,000}{1000,000,000,000}$	$\dfrac{\boxed{15\ldots\ldots}\ 5000,000}{1000,013,000,036}$	$\dfrac{\boxed{28\ldots\ldots}\ 7000,000}{1000,025,000,144}$	$\dfrac{\boxed{45\ldots\ldots}\ 9000,000}{1000,041,000,400}$
in y, ductae, seu dimidia Rectangula $\delta EE = \langle$Tri$\rangle$angulis ABB; si utraque per a. divisa intelligantur.			$5,000,000$ / 4			
Ser. IV $\dfrac{A\delta\delta EA}{2a} = \dfrac{ABBA}{a} =$ Portio⟨nes⟩ Figurae Resectarum, sive Terminorum seriei tertiae, numeratoribus sumtis insulae inclusis, sive in Terminos seriei primae ductis, summa.						

17 BCC *L ändert Hrsg.*

TAB. II.

Series I. $\frac{y}{2a}$ Ser. II. $\frac{x}{2a}$	eadem cum seriebus I. et II. Tabulae praecedentis					
Ser. III. $\frac{A\delta\delta\Delta A}{2a}$. summa Rectang. $\Delta\Delta\delta$, seu sinuum versorum x, in $\beta = \Delta\Delta, = 1$. ductorum per $2a$ divisorum.	0	$\frac{1\beta^2}{a^2+1\beta^2}$	$\frac{5a^2\beta^2+8\beta^4}{a^4+5a^2\beta^2+4\beta^4}$	$\frac{14a^4\beta^2+98a^2\beta^4+108\beta^6}{a^6+14a^4\beta^2+49a^2\beta^4+36\beta^6}$	etc.	etc.
Series IV. $\frac{A\delta = xy}{2a}$		$\frac{1\beta^3}{a^2+1\beta^2}$	$\frac{8\beta^3}{a^2+4\beta^2}$	$\frac{27\beta^3}{a^2+9\beta^2}$	$\frac{64\beta^3}{a^2+16\beta^2}$	$\frac{125\beta^3}{a^2+25\beta^2}$
Series V. $\frac{A\delta\delta EA}{2a} = \frac{ABBA}{a}$ Segmenta per a. divisa, residuum terminorum seriei quartae, detractis terminis seriei tertiae.		$\frac{A\delta}{2a} - \frac{A\delta\delta\Delta A}{2a} = \frac{ABBA}{a}$				

S c h o l. Sed et Serie quarta Tab. II careri potest, nam ad propositum aliquod segmentum $ACFA$, vel aequalem ei duplicato portionem $A\cup\pi HA$ figurae Resectarum calculandum, sufficit haberi aream non omnium praecedentium sed ultimi rectanguli $A\delta$, simplici multiplicatione xy. a quo termini seriei tertiae, seu complementa detracta dabunt portiones figurae Resectarum, seu segmenta. Et ideo ex his duabus methodis calculus posterioris Tabulae nonnihilo brevior videtur. Interim sciendum est, quoniam β. est infinite parva, ideo s e r i e s alterutrius Tabulae in infinitum continuandas, si ad segmentum aliquod assignabile pervenire velimus. Ideo habemus aream segmenti alicujus dati, v. g. $ACFA$ infinita serie numerorum rationalium expressam, infinita scilicet serie ipsarum x, cujus summa complemento ad Rectangulum segmenti duplicati, vel portionis $A\cup\pi HA$ ei aequalis aequatur. Termini autem seriei omnium x, tot sunt, quot unitates $\Delta\Delta, = DD = \beta$. in segmenti dati Resecta $AP = A\Pi$ esse intelliguntur. Ideo si numerus omnium β in toto Radio $AT = AW$. sit finitus, v. g. 1000. ⟨Atque⟩ ita Tabula, 1000 terminorum cujusque seriei, condita intelligatur, adjicianturque segmentis Triangula ABW, habebuntur sectores, sed non ideo in Numeris rationalibus. ⟨In⟩ datis Angulis licet m e c h a n i c e ⟨— —⟩ sinus vicissim. Dato sinu verso et recto segmenti cujus area postulatur, Resectae ejus quantitas seu Numerus omnium β quae continet, ac proinde et area, per a p p r o p i n q u a t i o n e m habebitur. Sed aliam mox incomparabiliter commodiorem exponemus.

Problema II:

„Quadratura Mechanica Circuli sectorumve datae ad circulum rationis; p⟨art⟩i-
„⟨umque⟩ ⟨—⟩ omnem, quae ⟨—⟩ methodo omnibus hactenus repertis abs⟨ol—⟩
„quandoquidem illa nullis radicum extractionibus utitur, et in ipsis Circuli partibus
„nullam ut hactenus omnes, Tabulam vel sinuum vel polygonorum ⟨jam⟩ compu-
„tatam supponit.

Ac primum de sectoribus quorum arcus ad circumferentiam habet cognitam nobis rationem ⟨unum⟩ est quod separatim dicamus, cum sufficiat aream Circuli cognitam, per rationem circumferentiae ad arcum sectoris dati, dividi. Sector autem datus ut $AWFCA$ cujus arcus ACF sinus habet rectum HF, versum AH, notae ad sinum totum seu radium, AW relationis, (id enim est Geometrice describi posse;) secetur in duas partes: Triangulum AFW quod f u l c r u m appellare soleo, et segmentum $AFCA$, quoniam Trianguli area separatim haberi potest, segmentum ⟨autem⟩ methodo mox tradenda in-

13–16 ⟨Atque⟩ ... vicissim *erg. L* 29 rectum AH, versum HF *L ändert Hrsg.*

vestigabitur. Vel potius, sector iste secetur in alias duas partes semisegmentum AHF, et semifulcrum HWF. ita enim area semifulcri seu Trianguli statim sine ullo calculo habetur. Constat autem dato radio et alia praeterea recta ad arcum determinata, v. g. vel sinu recto, vel verso, vel tangente, vel secante, vel Resecta, seu tangente arcus dimidii, etiam caeteras ex istis Geometrice haberi. Si qua porro alia circuli portio datur, ut Lunula, Arbelus, Trilineum concavum aut convexum, modo sinus arcuum comprehendentium dentur (dabuntur autem vel Geometrice, Geometria scilicet plana, aut altiore, vel quo casu ad Tabulas jam supputatas confugiendum est, ex sinuum canone) facile ad Segmenta reducentur. Segmenta autem quadrabunt⟨ur quadra⟩tis portionibus F i g u r a e R e s e c t a r u m , quae ipsis duplicatis aequantur. Hae vero portiones (v. g. $A\cup\pi HA$) quadratae erunt quadratis earum ad Rectangula (v. g. $A\pi$) ejusdem basis et altitudinis, sive ut quidam vocant isoparallela, complementis, (v. g. $A\cup\pi\Pi A$.) Complementa autem ista sunt summae ipsarum x, seu $\Delta\delta$, (v. g. $\Upsilon\cup$, $\Pi\pi$) sinuum versorum ad Resectam $A\Delta = AD$, v. g. $A\Pi = AP$ applicatorum; seu summae ipsarum x simpliciter, si in infinitesimam arcus segmenti velut u n i t a t e m c o n s t r u c t i o n i s ductae intelligantur. Est autem $\frac{x}{2a} = \frac{y^2}{a^2+y^2} = \frac{y^2 + \frac{y^4}{a^2} - \frac{y^4}{a^2}}{a^2+y^2} = \frac{y^2}{a^2} - \frac{y^4}{a^4+a^2y^2}$. Cujus Residui terminus auferendus $\frac{y^4}{a^4+a^2y^2}$ eodem modo tractetur, idemque in residui residuo factum intelligatur in infinitum. Porro quoties residuum quoddam auferendum est ab aliqua quantitate, a quantitate illa deminuenda auferetur tantum Terminus qui in residuo diminuendus est, vero addetur is qui in Residuo est subtrahendus, permutatis nimirum additionis et subtractionis signis, ut constat. Unde haec omnium productorum series erit: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{y^4}{a^4} + \frac{y^6}{a^6} - \frac{y^8}{a^8} + \frac{y^{10}}{a^{10}} - \frac{y^{12}}{a^{12}}$ etc. in infinitum. Quod ex Tabula subjecta elegantius apparebit:

---

22 NB. summa omnium $\frac{a^2}{y^2+a^2} = \frac{a^2}{y^2} - \frac{a^4}{y^4} + \frac{a^6}{y^6}$ etc. Ergo $\frac{a^2}{y^2} + \frac{y^2}{a^2}$, et ita porro $= \frac{a^4+y^4}{y^2a^2}$ etc. idemque in altioribus, summa eorum haberi potest.

7 f. Geometria ... altiore, *erg. L* 15 velut ... c o n s t r u c t i o n i s *erg. L*

---

12 quidam: vgl. z. B. H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 315.

$$\frac{y^2}{a^2+y^2} = \frac{+y^2+\frac{y^4}{a^2}-\frac{y^4}{a^2}}{a^2+y^2} = \frac{y^2}{a^2} - \frac{\frac{y^4}{a^2}}{a^2+y^2} = \frac{y^2}{a^2} - \frac{y^4}{a^4+a^2y^2}$$

$$= \frac{y^2}{a^2} \Bigg\| -\frac{y^4}{a^4+a^2y^2} = \frac{-y^4-\frac{y^6a^2}{a^4}+\frac{y^6}{a^2}}{a^4+a^2y^2} = -\frac{y^4}{a^4} + \frac{y^6}{a^6+a^4y^2}$$

$$-\frac{y^4}{a^4} \Bigg\| +\frac{y^6}{a^6+a^4y^2} = \frac{+y^6+\frac{y^8a^4}{a^6}-\frac{y^8}{a^2}}{a^6+a^4y^2} = \frac{y^6}{a^6} - \frac{y^8}{a^8+a^6y^2}$$

$$+\frac{y^6}{a^6} \Bigg\| \frac{-y^8-\frac{y^{10}a^6}{a^8}+\frac{y^{10}}{a^2}}{a^8+a^6y^2} = -\frac{y^8}{a^8} + \frac{y^{10}}{a^{10}+a^8y^2}$$

$$-\frac{y^8}{a^8} \Bigg\| +\frac{y^{10}}{a^{10}+a^8y^2} = \frac{+y^{10}+\frac{y^{12}a^8}{a^{10}}-\frac{y^{12}}{a^2}}{a^{10}+a^8y^2} = +\frac{y^{10}}{a^{10}} - \frac{y^{12}}{a^{12}+a^{10}y^2} \text{ etc.}$$

$$\frac{y^2}{a^2+y^2} = +\frac{y^2}{a^2} - \frac{y^4}{a^4} + \frac{y^6}{a^6} - \frac{y^8}{a^8} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad +\frac{y^{10}}{a^{10}} - \frac{y^{12}}{a^{12}} + \text{etc.}$$

$$= \frac{y^2}{a^2+y^2} = \frac{x}{2a} = \frac{\Delta\delta}{2a} = \frac{\Upsilon\upsilon, \text{ vel } \Pi\pi \text{ etc.}}{2a}$$

vel $+\frac{y^2}{a} - \frac{y^4}{a^3} + \frac{y^6}{a^5} - \frac{y^8}{a^7} + \frac{y^{10}}{a^9} - \frac{y^{12}}{a^{11}} = \frac{x}{2} = \frac{y^2a}{a^2+y^2}$ omnibus scilicet per a multiplicatis, ut assumta initio quantitas $\frac{y^2a}{a^2+y^2}$ restituatur.

Quoniam vero series ista non nisi uni x aequivalet, et vero ineunda est summa omnium; ipsae x, autem inter se non differunt forma aequationis, sunt enim omnes $= \frac{y^2a}{a^2+y^2}$ sed unico termino ingrediente $y = A\Delta$ qui continue major atque major arithmetica progressione assumitur; ideoque eadem series omnibus sigillatim applicari sive infinities repeti potest. Sed ut omnes illae series repetitae invicem addantur, opus est ut diversitas ipsarum y exprimatur. Posito ergo $\Delta\Delta = \beta = A\Upsilon = \Upsilon\Pi = \Pi M$ etc. sive positis intervallis omnium x, ipsi resectae AT vel minori normaliter applicatarum, sive, differentiis abscissarum $A\Delta$, aequalibus tunc ipsae y, seu abscissae, complementi $A\delta\delta STA$ alteriusve minoris ut $A\delta\delta\mu MA$ arithmetice crescent, ponatur ergo prima $y = A\Upsilon = \Delta\Delta = 1\beta$ secunda $y = A\Pi = \Delta\Delta + \Delta\Delta = 2\beta$, tertia $y = AM = 3\beta$. atque ita porro in infinitum; supposito scilicet altitudinem complementi seu resectam Circularem, $A\Delta$, sectam esse in

8 f. vel ... restituatur. *erg. L*

partes infinitas. Jam si y significat 1β, erit $\frac{x}{2} = \frac{ay^2}{a^2+y^2} = \frac{\beta^2}{a} - \frac{\beta^4}{a^3} + \frac{\beta^6}{a^5} + \frac{\beta^8}{a^7}$ etc. si y significat 2β, erit $\frac{x}{2} = \frac{ay^2}{a^2+y^2} = \frac{4\beta^2}{a} - \frac{16\beta^4}{a^3} + \frac{64\beta^6}{a^5} - \frac{256\beta^8}{a^7}$ etc., atque ita de caeteris, ut ex Tabula subjecta signo $\odot$ patet.

---

3 *Auf der übernächsten Seite, nachträglich über die Blindzeichnung zur Lesart zu S. 27 Z. 3 – S. 28 Z. 1 geschrieben:* Tab. $\odot$

($\frac{ay^2}{a^2+y^2} = \frac{x}{2}$:) applicatae complementi Figurae segmentorum,

(a) Radius Circuli,

(y) altitudines sive abscissae complementi figurae segmentorum, eaedemque Rescissae segmenti Circularis dati.

(β) Infinitesima abscissarum, sive abscissa minima, vel infinite parva, cujus repetitionibus infinitis caeterae abscissae constituantur: Differentia perpetuo eadem abscissarum arithmetice per minima crescentium. Unde prima abscissa erit 1β, secunda 2β, 3^{tia} 3β atque ita in infinitum. Abscissis ergo arithmetice crescentibus; applicatae ita crescent:

1ma $y = 1\beta$, dabit 1^{mam} $\frac{x}{2}$:	$+\frac{1\beta^2}{a}$	$-\frac{1\beta^4}{a^3}$	$+\frac{1\beta^6}{a^5}$	$-\frac{1\beta^8}{a^7}$	etc.
2da $y = 2\beta$, —— 2^{dam} — :	$+\frac{4\beta^2}{a}$	$-\frac{16\beta^4}{a^3}$	$+\frac{64\beta^6}{a^5}$	$-\frac{256\beta^8}{a^7}$	etc.
3^{tia} $y = 3\beta$, —— 3^{tiam} — :	$\frac{9\beta^2}{a}$	$-\frac{81\ldots}{\ldots\ldots}$	$+\frac{729\ldots}{\ldots\ldots}$	$-\frac{6561\ldots}{\ldots\ldots}$	etc.
4ta $y = 4\beta$, —— 4^{tam} — :	$\frac{16\ldots}{\ldots\ldots}$	$\frac{256\ldots}{\ldots\ldots}$	$\frac{4096\ldots}{\ldots\ldots}$	$-\frac{65536\ldots}{\ldots\ldots}$	etc.
etc. usque ad maximam y quae est arcus AF segmenti dati, sinus versus $\Pi\pi$.	etc.	etc.	etc.	etc.	

Summa omnium y, seu area Figurae

$A\Pi\pi\cup A$, dimidiata, erit: $+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a} - \frac{1}{5}\frac{b^5}{a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc.

cujus duplum si a Rectangulo $A\Pi\pi$, sub Rescissa et sinu verso comprehenso auferatur, restatur duplum segmentum. Atque ideo, si dicta area dimidiata, subtrahatur a Triangulo AHP, residuum erit segmentum $AFCA$.

Qua constructa non jam amplius diversae dimensiones ejusdem y, sive series in Tabula transversa considerentur, sed eaedem dimensiones diversarum y seriebus Tabulae descendentibus junctae intelligantur: v. g. series una descendens erit $+\beta^2 + 4\beta^2 + 9\beta^2 + 16\beta^2$ etc. quadratica; alia erit Quadrato-quadratica: a priori auferenda $-\beta^4 - 16\beta^4 - 81\beta^4 - 256\beta^4$ etc. et ita porro alternatis additionis subtractionisque signis: Ne autem a, ubique subscribatur, sufficit sub finem seriei descendentis sive in imo annotari quod ea per a, dimensione seriei affectam dividi debeat. Sed quoniam hoc modo summa omnium harum serierum, dat solum summam omnium $\frac{x}{2a}$. ideo ut det summam omnium $\frac{x}{2}$. sive ut omnia multiplicentur per a, ideo series quaelibet non per a, dimensione tanta, quanta seriei est, sed uno gradu minore affectam, divisa intelligatur, v. g. tota series $+\beta^2+4\beta^2+9\beta^2+16\beta^2$ etc. dividatur per a. loco a^2, et series: $-\beta^4-16\beta^4-81\beta^4-256\beta^4$ etc. per a^3. loco a^4.

Jam ut summa cujuslibet seriei descendentis ineatur, meminisse oportet, quod jam a tot aliis demonstratum est, quoniam coincidit cum Quadratura Paraboloeidum simplicium: Summam terminorum si crescant ut numeri Naturales deinceps ab unitate, aequari a l t i t u d i n i s , id est numeri terminorum i n b a s i n id est terminum maximum, producto rectangulo dimidiato: Si ut numeri quadrati tunc summam aequari Trienti rectangulo solido, ex altitudine, in quadratum ultimum, seu terminum; etc. Quando autem terminus maximus, ejusve radix, quadratica quidem in serie quadratica, cubica in serie cubica, etc. aequatur numero terminorum tunc simpliciter dici potest, seriei Naturalium, sive ut acutissimus Wallisius vocat primanorum, summam, aequari dimidio quadrato Numeri Terminorum sive altitudinis: seriei quadraticae sive secundanorum summam aequari Trienti cubi altitudinis; seriei cubicae sive Tertianorum summam denique aequari quadranti quadrato-quadrati; altitudinis; atque ita porro in infinitum.

Est mihi demonstratio quaedam universalis, qua omnium Paraboloeidum et Hyperboloeidum non tantum hujus naturae sive simplicium areae, seu primanorum, secundanorum, etc. item subprimanorum, subsecundanorum; horumque potestatum; ac omnium denique (demta prima Hyperbola,) reciprocorum summae exhibentur; sed et Paraboloeides atque Hyperboloeides compositae quadrantur, sive primano-secundanorum, secundano-tertianorum, primano-tertianorum, etc. horumque potestatum et reciproco-

14 aliis: z. B. J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 1 f. (*WO* I S. 365). 21–26,5 sive ... est: vgl. VII, 4 N. 39_1 S. 632 f. 21 vocat: J. Wallis, *Mechanica*, 1672, S. 144 f. (*WO* I S. 665 f.) bzw. *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 35 u. 54 (recte 44) (*WO* I S. 384 u. 390). 25 demonstratio: s. VII, 4 N. 39.

rum summae exhibentur. Quod hactenus apud neminem reperi. Neque enim est quod sciam, qui summam seriei hujusmodi Rq 1. Rq 8. Rq 27. Rq 64. Rq 125. etc. vel Rc 1. Rc 4. Rc 9. Rc 16. Rc 25. sive finitis sive infinitis terminis assumtis inierit. Quod tamen non in hac tantum, sed et infinitis aliis id genus seriebus ex demonstratione mea unica facile est. Sed ista non sunt hujus loci. Ut ergo summae harum serierum, quae Paraboloeidum progressionibus analogae sunt, ineantur, opus est determinare numerum terminorum qui in omnibus seriebus idem est, seu numerum unitatum β in altitudine $A\Delta$ v. g. AM, complementi quadrandi $A\delta\delta\mu MA$; vel quae eadem est in Resecta $A\square = AM$ sive maxima y. reperiendarum, seu quantitatem Resectae, $A\square$ segmenti ad quadrandum propositi $ACFRA$, quam datam esse suppono.

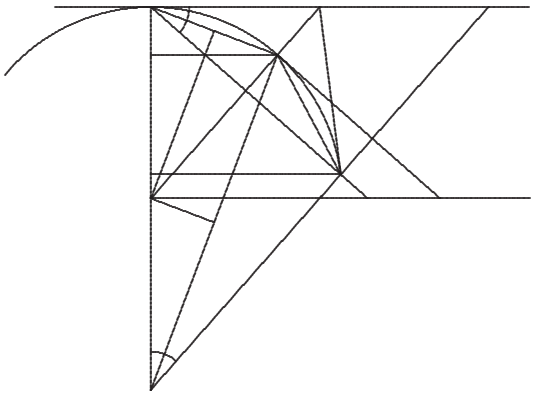
Nunc assumemus Resectam segmenti dati esse semper radio (a) minorem, quod et verum est quoties segmenti arcus quadrante minor est; si vero segmenti arcus sit quadranti circumferentiae circuli aequalis, ut si segmentum sit $ACFRLA$, tunc Resecta ejus $A\text{ת}$ est radio WL aequalis. Quodsi arcus $ACFRL$ esset quadrante major, Resecta quoque $A\text{ת}$ foret radio major, quae omnia sine prolixa demonstratione satis per se manifesta sunt. Quid ergo? In promtu remedium est, nam ob uniformitatem circuli, segmentum aliquod potest separari in duo vel plura minora, quorum singulorum arcus sunt quadrante minores; ita si poneremus segmenti dicti $ACFRLA$, arcum esse quadrante majorem. Manifestum est, hoc segmentum resolvi posse, in Triangulum ARL, et duo alia segmenta minora $ACFRA$, $RBLR$ quorum segmentorum area ex tradendis sigillatim ineunda, et area Trianguli ARL, quae ex communi Geometria facile habetur, addenda est, atque ita segmenti totius propositi arcus quadrante majoris area habebitur. Porro quanto minor est ratio Resectae ad radium, seu quanto minor est arcus segmenti ad quadrandum propositi ratio ad circumferentiam, eo minore opere et majore tamen exactitudine habetur area. Ideo utile est arcum propositum si nonnihil major quam expedit esse videatur, in duas aut quatuor aut octo etc. partes dividi, quod fieri Geometrice potest: Et haberi possunt sinus partis aliquotae, nullo plane negotio ex theorematibus nostris quoniam dato sinu recto versoque datur et Resecta per Theorem. 2. Resecta autem est Tangens arcus dimidii, quo habito etiam sinus rectus ac proinde et versus arcus dimidii facile

26–27,1 *Am Rand:* ℜ

1 neminem: Die Quadratur der höheren Parabeln bzw. Hyperbeln gelang vor Leibniz u. a. auch Fermat und Torricelli; vgl. J. E. Hofmann, *Leibniz in Paris*, S. 55–57. S. auch VII, 4 N. 34 S. 574.

habetur, ac per hos iterum arcus dimidii Resecta et ita porro. Et vero etiam ab aliis admonitum est, progressionem quandam existere, continua subsectione, ex geometrica et harmonica mixtam, ut adeo facile sine multo calculo datis sinubus arcus dati, octavae

3–28,1 octavae *(1)* et decimae sextae etc. partis sinus habeantur. Esto in fig. 5. Arcus circuli AEC



cuius ce⟨ntr⟩u⟨m D.⟩ Sinus | versus *erg.* | AB. rectus BC. Radium AD. = appellabimus a. sinum versum v. rectum r. Resecta AF erit $= \frac{\langle va\rangle}{r}$ *(a)* ergo GE sinus arcus dimidii cum sit GE = AF *(b)* Tangens *(c)* ejusqve dupla AI, $= (aa)^{2va}$ *(bb)* $\frac{2va}{r}$ *(aaa)* Jam BH = 2a−⟨v⟩ *(bbb)* deniqve notam etiam pono AC. chordam, qvam cum sit applicata parabolica vocabo p. Ergo cum sit

$$HI = \frac{AI\,\langle AH\rangle}{AC} = \frac{2a \frown \frac{2va}{r}}{p} = \frac{4va^2}{rp} \text{ Erit } DF = \frac{2va^2}{rp}.$$

Et qvia $GE = AF \frown \frac{DE}{DF} = \frac{\frac{ra}{r} \frown a}{\frac{\cancel{2xx^2}}{rp}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{2}{rp}} = \frac{rp}{2r} = \frac{p}{2}$ idemqve aliunde manifestum est GE esse $= \frac{AC = p}{2}$ qvia GE = AK *(aaaa)* Jam ut habeamus *(bbbb)* | porro DK = DG et ideo AG = EK *gestr. und wieder gültig gemacht* | *(aaaaa)* Cum ergo sit *(bbbbb)* hinc non opus est *(ccccc)* Jam ut inveniemus AE, manifestum est ∇^{lum} $EDH = \frac{DE \frown KC}{2} = \frac{ap}{4}$ at $\frac{AE}{2} = DL, \frown \frac{HE}{2} =$ eidem ergo $\frac{ap}{4} = \frac{AE \frown HE}{4}$ Ergo ap = AE ⌢ HE qvod aliunde constat. Nota Triangula FAD. et ABC. similia sunt qvia *(aaaaaa)* ut *(aaaaaaa)* AB a *(bbbbbbb)* AF ad AD, ita AB. ad BC. ergo etiam DF et *(aaaaaaaa)* FK *(bbbbbbbb)* AC. proportionalia *(bbbbbb)* $\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KD}$ *(2)* et decimae sextae etc. portionis sinus habeantur. | atqve ita habita arcus dati AFL. portione aliqvota AF, qvaeremus segmentum ACFA, eiqve addemus Triangulum seu Fulcrum AFW, ita habebitur sector AWFCA qvi ductus in rationem *(a)* partis ali *(b)* totius arcus dati, ad partem aliqvotam dabit sectorem, *(aa)* et sublato *(bb)* AWLFA *erg.* | Neqve vero Tabula hic, aut subsectione in minutas partes opus est. *(aaa)* Atqve ita praeparata jam figura cuius area qvaeritur *(bbb)* Sed et dummodo arcus datus minor sit qvadrante, subsectio omnino omitti potest. *(aaaa)* Atqve ita praepar *(bbbb)* Atqve ita praeparata jam figura cuius area qvaeritur *(3)* et *L*

---

1 aliis: vgl. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, insbesondere S. 30–46; ders., *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 2–5 [Marg.]. 4 fig. 5: Die Figur ist lediglich in Blindtechnik ohne Punktbezeichnungen ausgeführt. Leibniz bezieht sich ab Stufe *(2)* der Lesart wieder auf Fig. 4. Die Blindzeichnung hat Leibniz später mit der Tabelle ⊙ (s. S. 24 Z. 3) überschrieben.

et decimae sextae etc. portionis sinus habeantur, atque ita habita arcus dati v. g. AFL portione aliquota AF, quaeremus segmentum $ACFA$, eique addemus Triangulum seu fulcrum AFW. ita habebitur sector $AWFCA$, qui ductus in rationem totius arcus dati ad partem aliquotam assumtam, dabit sectorem totius arcus dati, $AWLFA$ ablatoque fulcro ejus seu Triangulo AWB relinquet aream segmenti dati quaesitam. Sed et subsectio omnino omitti potest, modo arcus dati segmenti sit nonnihil minor arcu quadrantis, et calculus quem nunc exponemus, paulo longius continuetur.

Ut ergo ad calculum ipsum, figura ita praeparata accedamus: sumenda est Rescissa v. g. AP segmenti v. g. $ACFA$ cujus Quadratura quaeritur, vel quod idem est $A\Pi$ altitudo complementi Respondentis $A\cup\pi\Pi A$ quae duplici via exprimi potest, vel, simpliciter, quoniam nota est, appellando eam b, vel relatione ad ipsam a. radium, ut si ponamus $b = A\Pi = \frac{a}{\gamma}$. Ergo quoniam Rescissa complementi altitudo est, summa seriei descendentis in Tabula

---

13 NB. Haec persequenda

$$\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{5} = \frac{2a^2}{15}$$
$$\frac{a^2}{7} - \frac{a^2}{9} = \frac{2}{63} \frown$$

vel $\frac{2a^2}{16-1} + \frac{2a^2}{64-1}$ etc. positaque $a = 1$ fiet $\frac{2}{16-1} + \frac{2}{64-1}$ etc., quae dimidiata dant: $\frac{1}{16-1} + \frac{1}{64-1}$ etc. Haec jam rursus ut supra dividi possent, haberemusque mera $+$. NB. Hoc si auferatur a: $\frac{16}{16-1} + \frac{64}{64-1}$ fiet $\frac{16-1}{16-1} = 1$ etc. $\frac{a^2}{y^2-a^2} = \frac{a^2 - \frac{a^4}{y^2} + \frac{a^4}{y^2}}{y^2-a^2} = \frac{a^2}{y^2} + \frac{a^4}{y^4-a^2y^2}$. $\frac{a^4}{y^4-a^2y^2} = \frac{a^4 - \frac{a^6}{y^2} + \frac{a^6}{y^2}}{y^4-a^2y^2} = \frac{a^4}{y^4} + \frac{a^6}{y^6-a^2y^4}$. NB. Continuanda haec methodus qua y semper veniatur. Sic et dividendum $\frac{y^2}{y^2-a^2}$ etc. NB.

14–21 Vgl. VII, 3 N. 25 S. 294–297.

$$\text{primae erit, } + \begin{cases} +\dfrac{b^3}{3a} = \dfrac{b^3}{3}, \text{ si } a = 1. \\[2ex] +\dfrac{a^3}{3\gamma^{[3]}a} = \dfrac{a^2}{3\gamma^3} \end{cases} \quad \text{secundae } - \begin{cases} -\dfrac{b^5}{5a^3} = \dfrac{b^5}{5} \\[2ex] -\dfrac{a^2}{5\gamma^5} \end{cases}$$

$$\text{tertiae } \begin{matrix} + \\ \\ + \end{matrix} \begin{cases} \dfrac{b^7}{7a^5} = \dfrac{b^7}{7}, \text{ si } a = 1. \\[2ex] \dfrac{a^2}{7\gamma^7} \end{cases} \quad \text{quartae } \begin{matrix} - \\ \\ - \end{matrix} \begin{cases} \dfrac{b^9}{9a^7} = \dfrac{b^9}{9} \\[2ex] \dfrac{a^2}{9\gamma^9} \end{cases} \quad \text{etc. etc.}$$

Quae series dupliciter reduci possunt vel deprimendo dimensiones, vel elidendo aliquem terminorum, nempe a: Deprimendo, quando, b resoluto in $\frac{a}{\gamma}$, summa omnium Terminorum ejus seriei dividitur per ipsam a dimensione exponentis binario minoris affectam quam est exponens potestatis ipsius b. summam seriei exprimentis. Unde fit ut summa omnium serierum, talis oriatur: $\frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^{[5]}} + \frac{a^2}{7\gamma^{[7]}} - \frac{a^2}{9\gamma^{[9]}}$ etc. id est infinita series portionum aliquotarum ipsius quadrati a radio. Cujus tamen summa finitam ad ipsum quadratum radii seu a^2, habet rationem, ut in aliis infinitis ejusmodi seriebus contingere solet, de quo pluribus suo loco, cum de G e o m e t r i c a q u a d r a t u r a quarundam figurarum quaestio erit. Illud interea hinc appare⟨t⟩ Q u a d r a t u r a m Circuli repertum iri. Elidendo autem terminum a, id est ponendo $a = 1$. unitati, ut tuto omitti possit perveniemus ad seriem M e c h a n i c a e q u a d r a t u r a e aptissimam, nempe: $\frac{b^3}{3} = \frac{a^3}{3\gamma^3}$ (et posito, $a = 1$) $= \frac{1}{3\gamma^3} - \frac{b^5}{5} = \frac{a^5}{5\gamma^5} = \frac{1}{5\gamma^5} + \frac{b^7}{7} = \frac{a^7}{7\gamma^7} = \frac{1}{7\gamma^7} - \frac{b^9}{9} =$

---

3 *Am Rand:* $\left.\frac{1}{3}\frac{b^3}{a}\left\langle\frac{a^3}{\gamma^3}\right.\right\} = \frac{a^2}{[3]\gamma^3}$

15 f. Illud ... iri *erg. L*

---

17 nempe: Die Vorzeichen in der anschließenden Formel haben zusätzlich Klammerfunktion.

$\frac{a^9}{9\gamma^9} = \frac{1}{9\gamma^9}$ etc. Et jam nunc ratio apparebit, cur debeat Resecta, v. g. $AP = A\Pi = b$ esse minor quam Radius $AT = a$. ita enim posita $a = 1$. et $b = \frac{1}{\gamma}$. erit $\frac{1}{\gamma}$ fractio minor unitate. At fractiones unitate minores hoc habent, ut multiplicando non augeant sed minuant quantitatem. Ideoque si repetitis saepe vicibus in se ducantur, continue imminuentur progressione geometrica ad eam usque parvitatem, ut tandem infiniti ductus potestatum altiorum qui adhuc supersunt, negligi possint. Exempli causa si ponatur $\gamma = 10$, seu $b = \frac{1}{10}$ ipsius a, manifestum est $\frac{1}{\gamma^{10}}$ esse $\frac{1}{10,000,000,000}$ unde facile intelligi potest quantae exiguitatis futura sint quae sequuntur $\frac{1}{\gamma^{11}}$. $\frac{1}{\gamma^{12}}$. etc. Differentia enim $\frac{1}{\gamma^{10}}$ a $\frac{1}{\gamma^{11}}$ est $\frac{9}{100,000,000,000}$. cujus differentiae ratio ad $\frac{1}{\gamma^{10}}$, est $\frac{10}{9}$, quod scilicet prodit diviso $\frac{1}{\gamma^{10}}$ per $\frac{1}{\gamma^{11}}$. Jam per hanc rationem multiplicetur $\frac{1}{\gamma^{10}}$ fiet $\frac{10}{90,000,000,000} = \frac{1}{9,000,000,000}$ quae scilicet fractio omnibus, quae sequentur in infinitum post $\frac{1}{\gamma^{10}}$, ipsius $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{10}$ potestatibus, simul sumtis aequalis est, eaeque proinde tuto negligentur. Fateor autem lubens hoc tractandi fractiones, et ad mechanicas quadraturas adaptandi inventum magnam partem deberi ingeniosissimo Viro Nicolao Mercatori Holsato, qui eo ad Hyperbolen et Logarithmos praeclare admodum usus est: Ita ut insignis Geometra, Joh. Wallisius qua est ingenuitate publice pronuntiaverit; eam esse tam absolutam tamque expeditam Hyperbolae quadraturam, ut nescire se profiteatur an

12 *Über* aequalis*:* $\mathfrak{A}$

6 Exempli causa: Die nachfolgende Restabschätzung führt Leibniz nicht für die Kreisreihe sondern die Summe über alle ganzzahligen Potenzen von $\frac{1}{10}$ durch. Leibniz unterlaufen kleinere Fehler und Ungenauigkeiten, die die allgemeine Diskussion jedoch nicht beeinträchtigen. 15 usus: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 25 u. 29 f. [Marg.]; vgl. VII, 4 N. 3_1. 16 pronuntiaverit: J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, 1668, S. 756.

melior sperari debeat. Et certe qui Logarithmorum ope quadravere Hyperbolam egregii Geometrae facile quidem sese absolvunt; sed supposita jam constructa Logarithmorum Tabula, at vero hoc artificio tractandarum fractionum, similibusque aliis in Mercatoris *Logarithmo-technia* expositis ipsa Logarithmorum constructio facilis redditur, omniaque velut a fundamentis repetuntur.

Caeterum nemo est qui non videat facilem hujus artificii ad Hyperbolam fuisse applicationem, cujus scilicet ordinatae ad asymptotam applicatae ad fractionum instar, numeris naturalibus reciprocarum, $\frac{a^2}{1}$ $\frac{a^2}{2}$ $\frac{a^2}{3}$ etc. progrediuntur. At vero Circulum ipsum ita tractari posse, nemo opinor vel sperare ausus est. Ego cum ad commodam Circuli dimensionem illud maxime obstare viderem, quod ordinatae ex curva ejus ad axem alium quemcunque demissae valore per relationem ad abscissas expresso nunquam absolvi possent ab irrationalitate, cum contra in parabola et Hyperbola omnibusque paraboloeidibus et Hyperboloeidibus simplicibus possint, (: quoniam enim in Parabola $ay = x^2$. erit $y = \frac{x^2}{a}$. et quoniam in Hyperbola $yx = a^2$, erit $y = \frac{a^2}{x}$:); observaremque numeros irrationales ne finitos quidem, nedum infinitos, praeterquam ubi aliunde figurae lux effulget, ut mihi in Paraboloeidibus et Hyperboloeidibus compositis contigit; in summam colligi posse, nisi forte signo + eas conjungere cum Analystis nostris, additionem si Diis placet, voces; jam pene de proferendis Cyclometriae pomoeriis post tot magnorum Virorum inventa, desperabam: donec venit in mentem alias figuras comminisci atque experiri circulo συγνώτους, quod praeter omnem spem aliis frustra tentatis, feliciter successit in Figura Resectarum, sed post maximas ratiocinationum ambages, quibus tandem eo enixus sum, Complementum Figurae Resectarum segmento duplicato aequale, ejus in circulo esse naturae, ut Rescissae v. g. AM, velut altitudinis, qualibet abscissa $A\Delta$ posita (y), applicata autem seu sinu verso $\Delta\delta$, posito (x) radio (a). Sit $x = \frac{y^2 a}{y^2 + a^2}$ sive $\frac{x}{a} = \frac{y^2}{y^2 + a^2} = 1 - \frac{a^2}{a^2 + y^2}$ revocata aequatione ad fractionem quandam Hyperbolicum

1 qvi | ex Gregorii a S. Vincentio inventis *erg. u. gestr.* | Logarithmorum *L* 8 vero *(1)* figuram aliqvam Circulo symme⟨t⟩ *(2)* Circulum *L* 12 f. omnibusqve ... simplicibus *erg. L* 20 aliis ... tentatis *erg. L*

1 qui: Gemeint sind wohl Gr. de Saint-Vincent und A. de Sarasa; vgl. die Erl. zu S. 12 Z. 17 u. S. 12 Z. 19.

quiddam prae se ferentem, quoniam hyperbolae communis ordinata ad Asymptotam ita explicari potest: $\dfrac{a^2}{a+y} = x$.

Tantae molis erat Circulum reddere ordinatarum Rationalium patientem. Hoc vero impetrato ausim dicere quadraturam hanc mechanicam esse omnibus hactenus inventis absolutiorem atque expeditiorem: Scilicet nulla supposita jam constructa aut continuata polygonorum sinuumque tabula: cum area propositae portionis circularis haberi ex ipsis problematis visceribus summa cum exactitudine ac facilitate, simplici multiplicatione atque additione, nulla radicum extractione, nullo ad Ludolphi Snelliique Numeros, aliosque laterum inscriptorum circumscriptorum, sinuumque calculos recursu, possit. Tabulae enim ejusmodi, neque semper sunt ad manum, et emendatione nonnumquam augmentis atque continuatione plurimum opus habent; ac ne praestant quidem semper quod computus noster ex tempore et de suo. Inprimis autem facilis est calculus, cum $\gamma = 10$ vel alii numero decimali. Ita enim

$$\frac{1}{3\gamma^3} + \frac{1}{7\gamma^7} + \frac{1}{11\gamma^{11}} - \frac{1}{5\gamma^5} - \frac{1}{9\gamma^9} - \frac{1}{12\gamma^{12}}$$

facit

$$\underbrace{\frac{1}{3,000} + \frac{1}{70,000,000} + \frac{1}{1,100,000,000,000}}_{\substack{1,100,000,000,000 \\ ., \ldots, .7., ..3, \ldots \\ \hline 231,000,000,000,000,000,000,000}} \underbrace{- \frac{1}{500,000} - \frac{1}{9,000,000,000} - \frac{1}{12,000,000,000,000}}_{\substack{12,000,000,000,000 \\ .., ..9, \ldots, 5.., \ldots \\ \hline 54,000,000,000,000,000,000,000,000,000}}$$

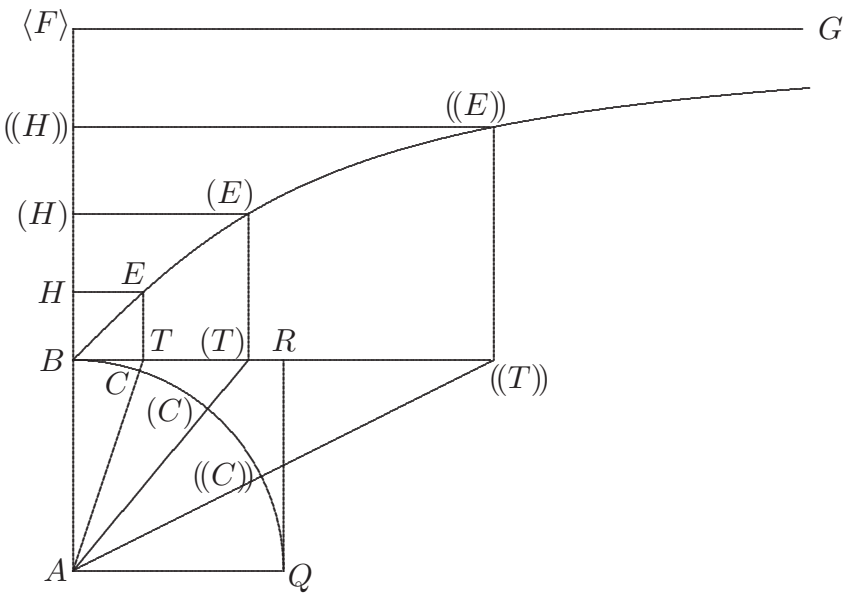
Quodsi γ non sit numerus decimalis, fractio tamen $\dfrac{1}{\gamma}$ utiliter ad decimalem revocabitur. Saepe autem, vel primus terminus ad mediocrem exactitudinem sufficit, ut in exemplo praecedenti, si resecta sit decima radii pars; tunc posito quadrato radii 3000, poterit dici

7 f. simplici ... extractione, *erg. L*

8 Ludolphi Snelliique: v. a. Ludolph van Ceulen, *Vanden circkel*, 1596, lat. Fassung *De circulo et adscriptis liber*, 1619; W. Snell, *Cyclometricus*, 1621. 14 $\dfrac{1}{12\gamma^{12}}$: Richtig wäre $\dfrac{1}{13\gamma^{13}}$; Leibniz rechnet konsequent weiter.

complementum figurae Resectarum esse 1, caeteris enim terminis $-\frac{1}{500,000}+\frac{1}{70,000,000}$ etc. facile poterit careri, ob parvitatem.

[*Späterer Zusatz*]

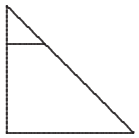


[*Fig. 5*]

Si tangens BT sit b. erit arcus $BC \sqcap \frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\frac{b^9}{9}-\frac{b^{11}}{11}$ etc. Jam tangenti BT applicetur recta TE, aequalis arcui BC. curvaque per ipsarum TE extremitates transeat $BE(E)((E))$. Ipsa AB producatur in F ad partes E, donec fiat BF aequalis arcui quadrantis, et ducatur FG parallela BT. Patet eam fore curvae $E(E)((E))$ asymptoton. TE sit e. et $BT \sqcap b$. Aequatio curvae naturam explicans erit $e \sqcap \frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}$ etc.

$1+\frac{1}{700,000}$ *L ändert Hrsg.* 2 parvitatem. | Imo venit qvoqve ratio in mentem cuius ope effici qveat ut neqve *(1)* minorem esse *(2)* a necesse sit ponere = 1, neqve γ. minorem qvam a, Cum enim inventa qvantitas sit: *(a)* a^2 *(b)* $+\frac{a^3}{}$ *gestr.* | *L*

Et summa omnium e, sive area figurae, erit haec: $\int \overline{e} \sqcap \frac{b^2}{1,2} - \frac{b^4}{3,4} + \frac{b^6}{5,6} - \frac{b^8}{7,8}$ etc. $\sqcap E$. Eodem modo si rursus quaeras summas ipsarum E, fiet $\int \overline{E} \sqcap \frac{b^3}{1,2,3} - \frac{b^5}{3,4,5} + \frac{b^7}{5,6,7} - \frac{b^9}{7,8,9}$ etc. Et ita porro.



[*Fig. 6*]

Jam videndum si alicujus summa, et summa summarum, et summa summarum summarum in unum addantur, quaenam inde fiat figura. Sumamus Triangulum. Huic imponatur suum Trilineum parabolicum, et huic suum Trilineum cubicum, et ita porro in infinitum, fiet solidum cujus quaeritur area. Nempe summa:

$$\frac{b}{1} \quad \frac{b^2}{1,2} \quad \frac{b^3}{1,2,3} \quad \frac{b^4}{1,2,3,4}$$

dabit unum planum ordinatum hujus solidi. Ergo Area solidi erit

$$\frac{\int b}{1} \quad \frac{\int b^2}{1,2} \quad \frac{\int b^3}{1,2,3} \quad \frac{\int b^4}{1,2,3,4} \sqcap \frac{b^2}{1,2} \quad \frac{b^3}{1,2,3} \quad \frac{b^4}{1,2,3,4} \text{ etc.}$$

Quare $\frac{b}{1} \; \frac{b^2}{1,2} \; \frac{b^3}{1,2,3}$ etc. cylinder sub unitate unius plani, nempe ultimi, seu maximi, ex impositis sibi rectis summas summatas repraesentantibus facti excedet summam seu aream summae summatorum, seu aream hujus solidi, ipsius primae maximae rectae ordinatae, cylindro sub quadrato unitatis. Cumque idem sit, de singulis, nempe de summis summatorum $\frac{b}{1}$ et $\frac{b^3}{3}$ et $\frac{b^5}{5}$ etc. videtur et summa summatorum (seu progressio + summa + sum. sum. + sum. sum. sum. + sum. sum. sum. sum. etc.) ipsarum e ab e, differre a cylindro basis in unitatem (id est cylindro summae summatorum; solius ordinatae ma-

---

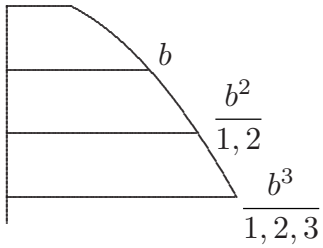
1 *Daneben:* $\frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{30} - \frac{1}{56}$ etc.
$\frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{28}$

15–35,1 *Nebenbetrachtung: (1)* Summa summatorum est cylinder *(2)* summa summatorum est *(a)* solidum *(b)* solidum cuius area aeqvatur cylindro baseos in unitatem, demto *gestr. L* 19 $+\frac{1}{30} - \frac{1}{42}$ *L ändert Hrsg.*

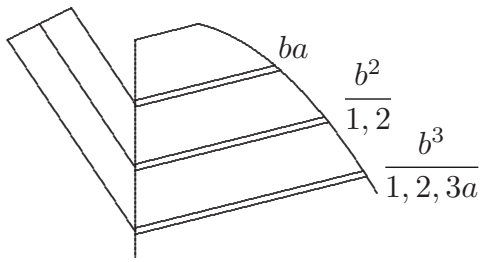
ximae), cylindro baseos basis in unitatem quadratam. Quod est theorema admirabile, et accessio ingens Arithmeticae infinitorum; cum enim quod de e demonstravimus dici possit de omnibus quae per rationales incognitam in fractione non habentes enuntiantur; possint autem omnes quantitates hoc modo enuntiari, saltem in infinitum progrediendo sequitur hoc theorema de omnibus figuris esse verum. Ecce novam ac mirabilem methodum demonstrandi aliquid de omnibus quantitatibus; universaliter, ex eo quod suppono demonstratum omnes quantitates per hujusmodi finita vel infinita enuntiari posse. Nondum vel me vel alium tali inventionis principio usum memini.

Ut appareat in conspectu

$$\overline{\int\int \frac{b}{1} \int \frac{b^2}{1,2a} \int \frac{b^3}{1,2,3a^2} \int \frac{b^4}{1,2,3,4a^3}} \sqcap \overline{\int \frac{b^2}{1,2} \frac{b^3}{1,2,3a} \frac{b^4}{1,2,3,4a^2}}.$$



[*Fig. 7a*]



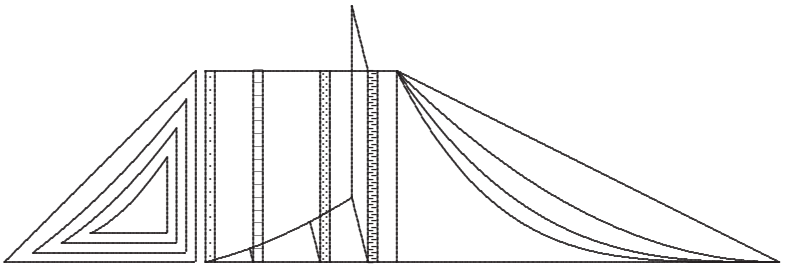
[*Fig. 7b*]

Basis baseos est b. ultima, ordinatarum extrema Basis seu planum ultimum est compositum ex ordinatis $\frac{b}{1}$ $\frac{b^2}{1,2a}$ $\frac{b^3}{1,2,3a^2}$ $\frac{b^4}{1,2,3,4a^3}$, maximae scilicet b. Hujus Baseos cylinder in a, unitatem, est compositus ex planis ordinatis $\frac{ba}{1}$ $\frac{b^2}{1,2}$ $\frac{b^3}{1,2,3a}$ $\frac{b^4}{1,2,3,4a^2}$. (Ubi vero notandum est ipsas b. b^2. b^3. habere constantem b. quemadmodum ordinatae Logarith-

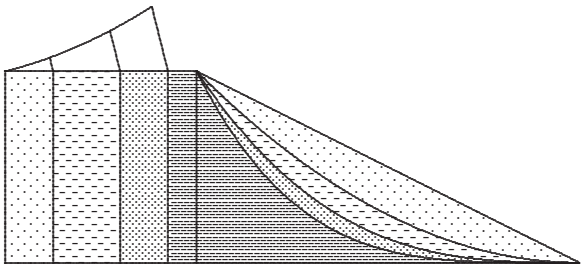
5 f. NB.

9 *(1)* Sed nunc in viam *(2)* Breviter sic: Si sit planum homogeneum solido summae summatorum, *(a)* Area *(b)* soliditas summae summatorum, est cylinder baseo *(aa)* plan *(bb)* in unitatem *Daneben:* Qvoad enuntiationem sic potius exhibeatur *Dazu:* Error fuit *(3)* Ut L

micae figurae.) Video hic cavendum ab errore nunc enim b. constans, nunc variabilis. Ergo b. simplici litera significet variabilem, et B, capitali significet ultimam constantem. Solidum quod est summa summatorum, ita formabitur, ut Triangulo imponatur suum Trilineum parabolicum, et huic praecedentis Cubicum, et huic praecedentis quadrato-quadraticum, et ita porro. Sectiones ergo per plana primo summandorum seu Triangulo assumto parallela erunt trilinea, Paraboloeidea. Sectiones per planum basin habens basi Trianguli parallelam, axem axi Trianguli normalem, sunt Figurae Transcendentes plusquam Logarithmicae, seu quarum ordinatae factae ex ordinatis logarithmicis per productos continuarum divisis. Ordinatae itaque Trilinei sunt unius $\frac{b}{1}$ alterius $\frac{(b^2)}{1,2}$ aut $\frac{((b^3))}{1,2,3}$ etc. ubi in singulis transitur per omnes b. At ordinatae Figurae transcendentium sunt, unius quidem figurae $\frac{B}{1}$ $\frac{B^2}{1,2}$ $\frac{B^3}{1,2,3}$ etc. alterius $\frac{B}{1}$ $\frac{(B^2)}{1,2}$ $\frac{((B^3))}{1,2,3}$ etc.



[*Fig. 8a*]

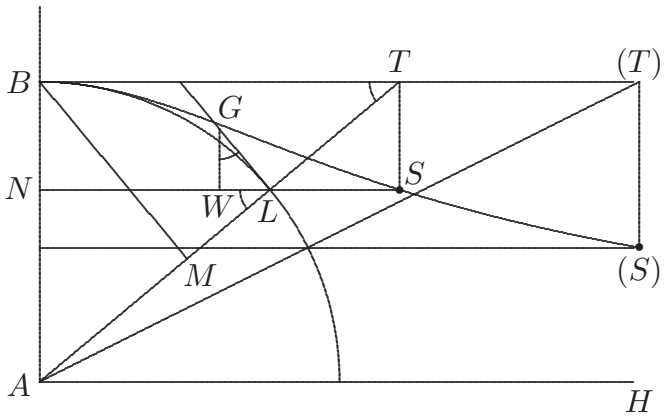


[*Fig. 8b*]

2 f. constantem | (b) inclusa significet variabilem, sed non in eadem formula expressa *erg. u. gestr.* | Solidum L 5 plana *(1)* axi parallela erunt trilinea, *(a)* Sectiones vero per bases erunt *(aa)* b *nicht gestr.* *(bb)* Paraboloeidea, qvorum ordinatae *(aaa)* basi parallelae *(bbb)* base *(ccc)* basi seu maximo Trilineo parallelae *(ddd)* (b) $\frac{(\mathrm{b}^2)}{1,2}$ in alio etc. *(b)* sectiones per plana basi *(2)* basi *(3)* axi *(4)* primo L

Jam video tandem in quo fuerit difficultas. Scilicet hae summae summatorum non dant figuram continuam, sed spatium solidum gradiforme, nam ipsi B. si imponatur $\frac{B^2}{2}$ differentia est assignabilis. Verum tamen erit aream hujus spatii scalaris summae summatorum esse ultimae figurae transcendentis seu baseos per sectionem axi parallelam, tantum tamen NB. inde a secunda sua ordinata nempe $\frac{B^2}{1,2a}$ computatae cylindrum in unitatem. Sed hoc aliquando si operae pretium exactius.

Nunc ad nostram curvam $E(E)((E))$ redeo, ea etiam sic fiet, ponantur tangentes BT. insistere arcubus BC. in punctis C. et superficies ejusmodi cylindrica extendi in rectam BF. producetur curva $BE(E)((E))$ arcubus BC. extensis in rectas BH. et insistentibus rectis aequalibus ipsis BT. translatis in HE. Notabile est ergo idem esse tangentes insistere arcubus, et arcus tangentibus, modo sibi respondeant. Figura autem tangentium arcubus insistentium videtur esse mensurata.



[*Fig. 9*]

Ob Triangula similia $\underbrace{GWL}$. $\underbrace{TBA}$. $TB \frown GL$ [⊓] $TA \frown GW$ quia $\frac{TA}{GL} \sqcap \frac{TB}{GW}$. Jam $TB \frown GL$ sunt tangentes insistentes arcubus et $TA \frown GW$, dant Hyperbolam secantes

4 esse *(1)* ultimam figuram transcendentem *(2)* ultimae figurae transcendentis *(a)* Cylindrum in unitatem, jam enim | video *nicht gestr.* | *(aa)* et *(bb)* d *(cc)* | id *nicht gestr.* | qvod ab eo subtrahendum est, esse nihil, cum | sit tantum *(aaa)* solidi *(bbb)* infinite parva *nicht gestr.* | respectu caetero *(b)* seu L

13 *Fig. 9*: Der Verlauf der Kurve $S(S)$ in B ist in Leibniz' Zeichnung nur angedeutet.

scil. ad axem. Ergo quadratura figurae ad quam est $BE(E)((E))$ pendet ex quad. Hyperb. Ergo et $\int \overline{e}$, seu $\frac{b^2}{1,2} - \frac{b^4}{3,4} + \frac{b^6}{5,6} - \frac{b^8}{7,8}$ etc. pendet ex Hyperbolae quadratura.

$\frac{a^2}{x} \sqcap AT$. $GL \sqcap \frac{a\beta}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Arcus $\sqcap \omega$. Sint duo arcus propinqui unus ω alter Ω, fiet $\Omega - \omega \sqcap \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ et $\Omega^2 - 2\Omega\omega + \omega^2 \sqcap \frac{a^2 d\overline{x}^2}{a^2 - x^2}$. Sed nihil hinc. Si possemus separatim metiri $\frac{b^2}{1,2} - \frac{b^4}{3,4} + \frac{b^6}{5,6}$ etc. hinc duci posset aliquid. Porro deprimere possumus, nam: dividendo omnia per $\frac{b}{1,2}$, fiet: $\frac{b}{1,1} - \frac{b^3}{2,3} + \frac{b^5}{3,5} - \frac{b^7}{4,7} + \frac{b^9}{5,9} - \frac{b^{11}}{6,11}$. Id est quaeretur figura cujus momento a vertice nostra $BTEB$ proportionalis est. Hujus figurae differentiae sunt $\frac{1}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{3} - \frac{b^6}{4} + \frac{b^8}{5} - \frac{b^{10}}{6}$. Et harum rursus differentiae sunt: $0 - \frac{2b}{2} + \frac{4b^3}{3} - \frac{6b^5}{4} + \frac{8b^7}{5} - \frac{10b^9}{6}$. Et horum dimidia; $\frac{[0]b^{-1}}{1} - \frac{1b}{2} + \frac{2b^3}{3} - \frac{3b^5}{4} + \frac{4b^7}{5} - \frac{5b^9}{6}$. Consideremus separatim $\frac{0b^{-1}}{1} + \frac{2}{3}b^3 + \frac{4}{5}b^7$. $\frac{2b^3}{3} \sqcap \frac{vb^3}{\omega} - \frac{Vb^3}{\Omega}$. fiet $\frac{v\Omega - V\omega}{\omega\Omega}\ b^3$. $v\Omega - V\omega \sqcap 2y$ et $\omega\Omega \sqcap 2y + 1$.

---

9 NB. b^{-1} hic ad quod nos ducit necessitas.

10 $y \sqcap 0$
1
2
3
4

6 per *(1)* $\frac{\mathrm{b}^2}{1,2}$, fiet: $\frac{1}{1,1} - \frac{\mathrm{b}^2}{2,3} + \frac{\mathrm{b}^4}{3,5} - \frac{\mathrm{b}^6}{4,7} + \frac{\mathrm{b}^8}{5,9} - \frac{\mathrm{b}^{10}}{6,11}$. sunt scilicet numeri ducti in duplum sui unitate minutum x ⌢ 2x − 1. seu $2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}$ Possunt autem intelligi factae ex ordinata: *(a)* $\frac{1}{0}$ − *(aa)* $\frac{\mathrm{b}}{3} + \frac{\mathrm{b}^3}{5} - \frac{\mathrm{b}^5}{7}$ *(bb)* $\frac{\mathrm{y}}{3} + \frac{\mathrm{y}^3}{5} - \frac{\mathrm{y}^5}{7} + \mathrm{y}$ *(b)* Multiplicentur omnia per b. fiet $\frac{\mathrm{b}}{1,1} - \frac{\mathrm{b}^3}{2,3} + \frac{\mathrm{b}^5}{3,5} - \frac{\mathrm{b}^7}{4,7} + \frac{\mathrm{b}^9}{5,9} - \frac{\mathrm{b}^{11}}{6,11}$. et habebimus ordinatam *(2)* $\frac{\mathrm{b}}{1,2}$ L

Sit $\omega \sqcap \overline{4y-1}, \varphi$. erit $\Omega \sqcap \dfrac{2y+1}{\overline{4y-1}\varphi}$ et $v\Omega - V\omega \sqcap 2y \sqcap \dfrac{v}{\varphi}, \dfrac{2y+1}{4y-1} - V\varphi \frown 4y-1$ et erit $v \sqcap \dfrac{8y^2\varphi - 2y\varphi + V\boxed{2}\overline{\varphi, 4y-1}}{2y+1}$.

Si generalis esset regula, quod tribus ordinatis Geometrice proportionalibus summae sint proportionales harmonice, fiet $\dfrac{1}{y+b}$. $\dfrac{1}{y^2-b^2}$. tertia erit $\dfrac{1}{y^2-b^2, \boxed{2}} \smile \dfrac{1}{y+b}$, fiet: $\dfrac{1}{y^2-2yb+b^2, y+b \sqcap y^2-b^2, y-b}$ quae dabitur ex data Hyperbolae quadratura, quoniam hae duae ex ipsa dantur. Hinc sequeretur datis duabus figuris semper eam dari, quae ipsis est tertia aut media proportionalis, imo infinitas, quae progressione geometrica continuata exprimi possunt; datis ergo duabus formulis darentur semper aliae infinitae, sed an hoc sit semper verum, inductione examinandum. Si hoc generaliter esset verum perveniri posset ad aequationes pulcherrimas.

$AN \sqcap x$. $NL \sqcap \sqrt{a^2-x^2}$. $\dfrac{GL}{GW} \sqcap \dfrac{AL}{NL}$. $GL \sqcap \dfrac{AL \frown GW}{NL} \sqcap \dfrac{a\beta}{\sqrt{a^2-x^2}}$. $\dfrac{BT}{NL \sqcap \sqrt{a^2-x^2}} \sqcap \dfrac{a}{x}$. Ergo $BT \sqcap \dfrac{a\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. Ergo $BT \frown GL \sqcap \dfrac{a^2\beta}{x}$. $BT^2 \sqcap \dfrac{a^4}{x^2} - 1$ et $x^2 \sqcap \dfrac{a^4}{BT^2+1}$. Si tangentes applicantur sinubus complementi; habetur eorum momentum ex diametro absolute, quia omnes BT^2; deinde ex axe aequilibrii per circuli centrum transeunte, ex data circuli quadratura, quia $\sqcap \int \overline{BT \frown x}$ habetur ex circuli quadratura. $BT \sqcap NS$. et $ST \sqcap NB$. Datur momentum figurae ex BA absolute, Momentum ejus ex AH cylindro aequipollet. Momentum porro ejus ex AH adhuc semel seu omn. x^2. ex circulo pendent ob $\dfrac{a^4}{BT^2+1}$ unde etiam demonstrari posset statim quomodo figura $\dfrac{a^4}{BT^2+1}$ ad circulum reducatur. Porro $x \sqcap \dfrac{a^2}{\sqrt{BT^2+1}}$. $BT \sqcap t$ et $dBT \sqcap \psi$. $dx \sqcap \dfrac{a^2}{\sqrt{t^2+1}} - \dfrac{a^2}{\sqrt{t^2+2t\psi+\psi^2}} \sqcap \beta$ unde $\beta^2 \sqcap \dfrac{a^4}{t^2+1} + \dfrac{a^4}{t^2+2t\psi+\psi^2} -$

12 $\dfrac{a^4}{x^2} - 1$: Es müsste $\dfrac{a^4}{x^2} - a^2$ lauten. Leibniz rechnet zunächst konsequent weiter und benutzt ab S. 40 Z. 2 den korrekten Ausdruck. 20 $dx \sqcap$: Auf der rechten Seite müsste im Nenner des zweiten Terms $\sqrt{t^2+2t\psi+\psi^2+1}$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter.

$$\frac{2a^4}{\sqrt{\underbrace{t^4+2t^3\psi+t^2\psi^2,+t^2+2t\psi+\psi^2}_{\odot}}} \text{ et } \beta^4\odot \ [\textit{bricht ab}]$$

$x^2t^2+a^2x^2 \sqcap a^4$: $2lxt^2+2a^2xl \sqcap -2x^2t^2$. fiet $l \sqcap \frac{-\cancel{2}xt^2}{\cancel{2}t^2+\cancel{2}a^2}$ et $\frac{l}{x} \sqcap \frac{-t^2}{t^2+a^2} \sqcap \frac{\psi}{\beta}$ et erit $\beta \sqcap \frac{t^2\psi+a^2\psi}{t^2}$. Et quia $GL \sqcap \frac{a\beta}{\sqrt{a^2-x^2}}$ supra $\sqrt{a^2-x^2} \sqcap \frac{tx}{a} \sqcap \frac{a\beta}{GL}$ et $x \sqcap \frac{a^2\beta}{tGL} \sqcap \frac{a^2}{\sqrt{t^2+a^2}}$ fiet $\beta \sqcap \frac{tGL}{\sqrt{t^2+a^2}} \sqcap \frac{\overline{t^2+a^2}}{t^2}\psi$ et $GL \sqcap \frac{\overline{t^2+a^2},\sqrt{t^2+a^2},\psi}{t^3}$. Ergo GL ad ψ ut cub. a $\sqrt{t^2+a^2}$ ad cubum a t. Est autem $\sqrt{t^2+a^2}$ tangens, ergo differentia arcus ad differentiam tangentis est in triplicata ratione secantis ad tangentem.

5 t *(1)* | $\beta^2 \sqcap \frac{\mathrm{GL}\sqrt{\mathrm{t}^2+\mathrm{a}^2}}{\mathrm{t}} \sqcap$ *nicht gestr.* | $\frac{\mathrm{t}^2+\mathrm{a}^2}{\mathrm{t}^2}\psi$, *(a)* $\sqcap$ *(b)* seu $\mathrm{GL} \sqcap \frac{\sqrt{\mathrm{t}^2+\mathrm{a}^2}\psi}{\mathrm{t}}$ *(2)* est L

2. AUS UND ZU HUYGENS, DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA [30. Dezember 1673 – Mitte 1674]

In einer auf den 30. Dezember 1673 datierten Notiz hielt Chr. Huygens fest, dass er ein Exemplar seines Werks *De circuli magnitudine inventa* (zusammen mit J. Gregorys *Vera circuli et hyperbolae quadratura*) an Leibniz ausgeliehen hatte (vgl. *HO* XX S. 388 Anm. 2 sowie III, 1 S. LV Anm. 243). Leibniz dürfte die hier abgedruckten Exzerpte und Bemerkungen kurz danach geschrieben haben. Dass er dabei Huygens' persönliches Exemplar zur Verfügung hatte, zeigt seine Wiedergabe einer Randnotiz von Huygens (gedr. *HO* XII S. 145; s. u. S. 44 Z. 14–18). Das in N. 2_3 verwendete Gleichheitszeichen = gebraucht Leibniz im fraglichen Zeitraum etwa bis Mitte 1674. Das Wasserzeichen des Papiers von N. 2_3 ist von August 1673 bis Juni 1674 belegt.

2_1. AUSZUG

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 76. 1 Bl. 2°. 2 S. Am rechten Rand unregelmäßige Schnittkante. Bl. 76 hing ursprünglich mit LH 35 XIII 1 Bl. 139 (= N. 2_2) zusammen. Textfolge Bl. 76 v°, Bl. 76 r°.
Cc 2, Nr. 503

Christiani Hugenii Const. F. *De Circuli Magnitudine inventa*. Accedunt ejusdem problematum aliquot illustrium constructiones. Lugd. Bat. apud Lud. et Joh. Elzevir 1654.

Praef. Theorema ab Hugenio inventum: Duobus sumtis polygonis proportione mediis inter circumscriptum inscriptumque ipsis simile, minoris eorum perimeter circumferentia circuli major existit, reliquum vero polygonum eadem proportione circuli aream exuperat. Hoc ut subtilissimum accedunt tamen alia usui aptiora.

Peripheriae ad diametrum ratio quam Archimedes ex polygonis 96 laterum eruit per dodecagona sola nova hac arte comprobari potest.

Nostra methodo semper duplex adhibetur verorum characterum numerus, quacunque Laterum multitudine polygona adhibeantur. Quod quidem certa ratione contingere

22 Hoc ... aptiora *erg. L*

17 f. problematum aliquot ... Elzevir: Das Titelblatt von Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, hat „problematum quorundam“ und „apud Johannem et Danielem Elzevier“.
19–42,20 Praef. ... inventis: vgl. *a. a. O.*, praefatio, S. [iv–viii] (*HO* XII S. 115–119). 23 eruit: Archimedes, *Dimensio circuli*, prop. III.

perspeximus sicuti et quadratum cujusque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque constituitur. Ita posita diametro partium 10000000, per polygona 10800 laterum hos terminos invenere 62831852 et 62831855, at nostra methodo ex iisdem hi: $628318530717958\begin{cases}4\\9\end{cases}$.

At centra gravitatis majora adhuc compendia subministrant. Certe ad Archimedeos limites ita solo Trigoni inscripti cognito latere indigemus: Ex sexagintangulo autem, posita diametro 10,000,000,000 hos terminos produximus 31415926538 cum solita methodo producantur isti $3145\overset{3}{\underset{0}{}}$. Adeo ut jam triplus sit et ultra verarum notarum numerus sicut per praecedentia duplus, haud aliter quam in majoribus numeris cubum sui lateris triplum (notis) esse animadvertitur. Posthac si qui falso circumferentiae magnitudinem definient calculo non ita magno quemque erroris insimulare quod hactenus soliti sunt haud facile possint, refutabuntur. Ad haec si quid in subtensarum canone contexendo, quem emendatum haberi quantum referat, omnes sciunt, admissum aut aliunde perversum irrepserit, haud difficile erit horum ope restituere cum alia nunc ratione ex inscriptis in Circulo longitudinem arcuum quibus subtenduntur invenire liceat; atque ita sine canonum auxilio ex lateribus datis anguli habentur, ut nunquam duorum secundorum scrupulorum sit a vero dissensus, saepe ne unius quidem tertii.

Cartesii quaedam Cyclometrica inedita feruntur. Willebrordi Snellii *Cyclometricus*, duo praeclara adfert theoremata, sed demonstrationes quas adhibet non comprobant. Causae eorum a nostris pendent inventis.

10 animadvertitur *(1)* Qvinimo omni canonum auxilio destitutis *(2)* posthac *L*

---

2 10000000: Im Druck von 1654 steht irrtümlich 20000000 (Chr. Huygens, *a. a. O.*, S. [vi]; *HO* XII S. 117). 18 Cartesii ... feruntur: Huygens bezieht sich vermutlich auf eine Handschrift aus dem Nachlass von Descartes, den er möglicherweise 1653/4 durchsehen konnte (vgl. *DO* X S. 3; *HO* XII S. 118 f. sowie T. Verbeek u. a. (Hrsg.), *The correspondence of René Descartes 1643*, Utrecht 2003, S. xviii–xxii); das *Inventaire succinct des ecrits de Descartes* (Ms., gedr. in *DO* X S. 5–14), von dem eine Kopie im Besitz seines Vaters war, verzeichnet den Titel *Ex quantitate linearum, quae in dato circulo inscriptae sunt, quantitatem circumferentiae, cui datae lineae subtenduntur, cognoscere*; gedr. in *Excerpta ex Mss. R. Des-Cartes*, 1701, S. 1–4 (*DO* X S. 285–289). Der Druck von 1701 enthält außerdem den Text *Circuli quadratio*, *a. a. O.*, S. 6 f. (*DO* X S. 304 f.). 19 duo ... theoremata: W. Snell, *Cyclometricus*, 1621, prop. XXVIII u. XXIX, S. 42–45.

Ludolphus Coloniensis invenit Polygonis adhibitis 10800 laterum inscripti quidem latus esse partium

58,177,640,912,684,919 non una amplius[,]

subtenditurque 2. scrupulis primis[;]circumscripti

58177643374063182 non una minus.

Et adhibeamus latus polygoni subduplo laterum numero inscripti, quod est

116355276902613523 non una minus[,]

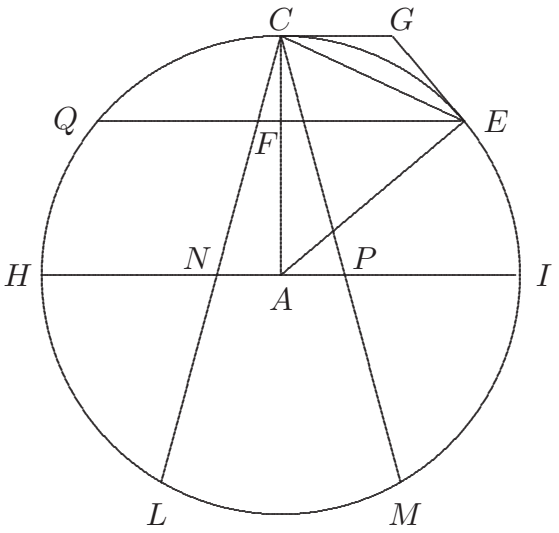
invenietur peripheria intra hos terminos:

6283185307179584
9

qualium radius:

1,000,000,000,000,000.

Solita autem methodo, multiplicatis tantum lateribus tantum hae erunt notae verae $6283185\left\{\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right\}$. Est ergo duplicatus earum numerus, quod semper fit quocunque polygono utamur.



[*Fig. 1*]

1–14 Ludolphus ... utamur: vgl. Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, prop. X, S. 17 (*HO* XII S. 141–143). — Das Resultat von Ludolph ist gedruckt in dessen Schrift *Vanden Circkel*, 1596, Bl. 21 r° (vgl. *HO* XII S. 141 Anm. 14). 15–44,8 [*Fig. 1*] ... duplicat: vgl. Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, prop. VII u. VIII, S. 9–13 (*HO* XII S. 133–136). Leibniz' Figur enthält Elemente der Figuren von S. 12 u. 18 (*HO* XII S. 134 u. 145).

Sit centro A radio AC circulus cujus arcus aliquis semicircumferentiae minor CE[,] tangens semiarcus seu [semi]latus circumscriptum EG vel CG, sinus rectus ipsius arcus FE, subtensa arcus vel latus inscriptum seu duplus sinus semiarcus CE, erit ex prop. 8. Hugenii *De Circ. Magn.* $\frac{4}{3}CG$ tangentis semiarcus, $+\frac{1}{3}EF$, sinus ipsius arcus majores arcu CE. Et vicissim ex ejus prop. 7. si ad subtensam CE addatur triens excessus subtensae super sinum composita est minor arcu, seu $CE + \frac{1}{3}\llcorner CE - FE\lrcorner$ seu $\frac{4}{3}CE - \frac{1}{3}EF$ minor arcu, ut $\frac{4}{3}CG + \frac{1}{3}EF$ major arcu. Et ita obtinet Hugenius primum illum exactitudinis gradum, qui verum notarum numerum duplicat.

Elegans est constructio prop. 11. qua rectam circumferentiae quadranti⟨s⟩ aequalem exhibet: Bisecetur circulus diametro HI, et semicircumferentia HCI, bisecetur in C, altera Trisecetur in punctis LM, jungantur rectae CL, CM, quae secabunt HI in N. P, erit $CN + NP$, adeo propinqua quadranti, CH, ut eum non nisi $\frac{1}{5000^{\text{ma}}}$ parte diametri excedat.

Hugenius ibi in margine ascripsit in suo exemplari haec verba: Tribus semidiametris addatur $\frac{1}{10}$ lateris quadrati inscripti. Composita semicircumferentiae aequabitur tam prope, ut non $\frac{1}{18000}$ diametri brevior sit, latus quadrati est majus quam partium 141421 qualium radius 100,000 unde quod dictum est demonstratur. Vel potius sic[:] Sex semidiametris addatur $\frac{1}{5}$ dicti lateris quadrati inscripti, et habetur peripheria tota.

9–13 *Daneben in anderer Tinte und anderem Duktus:* $\frac{8CE - QE}{3}$ aequ. arcui QCE. Haec appropinquatio in Hugenii libro extat, priore exactior. Quantitas tamen est paulo minor vera. Adde Neutoni epistolam.

9–18 Elegans ... tota: vgl. *a. a. O.* den Zusatz zu prop. XI, S. 18 f.; die von Leibniz nahezu wörtlich abgeschriebene Marginalie ist ebenfalls gedruckt in *HO* XII S. 145. 20 f. Haec ... epistolam: Die Näherung von Huygens (*a. a. O.*, prop. XII, S. 19–21; *HO* XII S. 147–149) wird von Newton erwähnt im Brief an Oldenburg für Leibniz und Tschirnhaus vom 13./23. Juni 1676 (vgl. III, 1 N. 88 S. 550 f.). — Vgl. dazu auch VII, 5 N. 13.

2_2. EX HUGENIO DE CIRCULI MAGNITUDINE

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 139. 1 Streifen ca 19 × 3,5 cm. 6 Z. auf Bl. 139 r°. Am unteren Rand Reste fremden Textes. Bl. 139 hing ursprünglich mit LH 35 XII 1 Bl. 76 (= N. 2_1) zusammen.
Cc 2, Nr. 504

Ex Hugenio *De circuli magnitudine*

Prop. 13. ostendit latus polygoni aequilateri circulo inscripti esse medium proportione inter latus polygoni similis circumscripti et dimidium latus polygoni inscripti subduplo laterum numero.

2_3. AD HUGENIUM DE CIRCULI MAGNITUDINE

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 235. 1 Bl. 2°. $\frac{4}{5}$ S. auf Bl. 235 r°.
Cc 2, Nr. 505

Ad Hugen. *De Circ. magnit.*

$IE = IB = a = 1.$ $BD = x.$ $AD = \sqrt{2ax - x^2}.$ $AB = \sqrt{2ax}.$ $HB = \sqrt{\frac{ax}{2}}.$ $IH = \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}.$ $EH = BG = a - \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}.$ $EB = \sqrt{2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}}.$

$$1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$$

$ABC = BD \frown AD = \sqrt{2ax^3 - x^4}$ seu $x\sqrt{2ax - x^2}.$

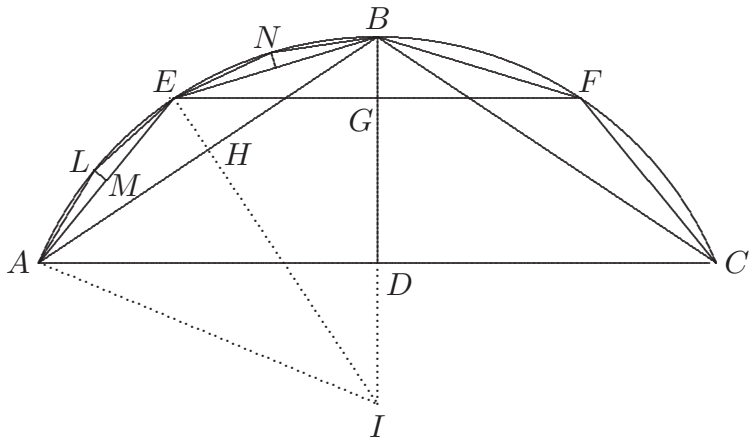
---

9 *Darunter in anderer Tinte:* Adjecta sunt problemata illustria circa 2 medias proport. De quibus excerpta illuc retuli.

6 Ex ... *magnitudine erg. L*

---

7 Prop. 13.: Chr. Huygens, *a. a. O.*, S. 21 f. (*HO* XII S. 149). 18 Adjecta: *a. a. O.*, S. 45–71 (*HO* XII S. 183–215), insbesondere S. 51–56 (*HO* XII S. 191–197). 19 De ... retuli: nicht gefunden.



[*Fig. 1*]

$$AEB = EBF = EH \frown HB = \sqrt{\frac{ax}{2} \frown \llcorner\llcorner a^2 + a^2 - \frac{ax}{2} - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}\lrcorner\lrcorner} = a\sqrt{ax - \frac{x^2}{4} - x\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}}.$$

ABC [=] $x\sqrt{x}, \sqrt{2-x}$. $AEB = \sqrt{x}, \sqrt{1 - \frac{x}{4} - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$.

5 Ergo ratio utriusque $= \dfrac{x\sqrt{2-x}}{\sqrt{1 - \frac{x}{4} - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}} = \dfrac{ABC}{AEB} = \beta$ vel posito $EH = y$. erit $\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$

---

5 *Unter* $\dfrac{ABC}{AEB} = \beta$*:* Sic potius $\dfrac{ABC}{2AEB}$.

1 *Zur Figur:* fig. 1. Hugen. de Circ. Magn. aucta *gestr. L*

---

1 *Fig. 1*: Leibniz hat das Kreissegment $AEBFCDA$ mit den Punkten A–G und den zugehörigen Verbindungsstrecken aus Chr. Huygens, *a. a. O.*, S. 1 (*HO* XII S. 121), übernommen und die Figur dann erweitert. 5 $\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$: Leibniz übernimmt den Wert $EH = 1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$ für y aus S. 45 Z. 15 nicht richtig. Im Nenner des folgenden Bruches verwendet er den richtigen Wert, im Zähler den falschen, wobei ihm ein zusätzliches Versehen unterläuft. Die Fehler, zu denen weitere hinzukommen, beeinträchtigen die restlichen Rechnungen. Leibniz bemerkt schließlich Unstimmigkeiten und markiert falsche Aussagen.

$$\frac{2xy}{\sqrt{y-\frac{x}{4}}}\ [=]\ \sqrt{\frac{4x^2y^2}{y-\frac{x}{4}}} = \left[\sqrt{,}\right]\ \frac{4x^2y^2}{y}+\frac{4x^3y^2}{4y^2}+\frac{4x^4y^2}{16y^3}\ \text{etc.}$$

Si x sit $\frac{1}{10}$ fiet $\dfrac{\dfrac{\sqrt{2-\frac{1}{10}}}{10}}{\sqrt{1-\frac{1}{40}-\sqrt{1-\frac{1}{20}}}}$.

$x\sqrt{2-x}=\beta\sqrt{1-\frac{x}{4}-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$. Ergo $2x^2-x^3=\beta^2-\frac{\beta x}{4}-\beta\sqrt{1-\frac{x}{2}}$. Ergo $\beta^2-\frac{\beta x}{4}-2x^2+x^3=\beta\sqrt{1-\frac{x}{2}}$ vel: $\beta^4-\frac{\beta^3x}{2}-4\beta^2x^2+2\beta^2x^3+\frac{\beta^2x^2}{16}+\beta x^3-\frac{\beta x^4}{2}+4x^4-4x^5+x^6=\beta^2-\frac{\beta^2x}{2}$. 5

$$\begin{array}{llll}
\beta^4a^6-\frac{x}{2}a^5\beta^3 & -\frac{63}{[16]}x^2a^4\beta^2 & -\frac{x^4}{2}a^2\beta & +x^6=0.\\
+2x^3a^3 & +x^3a^3 & -4x^5a & \\
-a^6 & & +4x^4a^2 & \\
+\frac{x}{2}a^5 & & &
\end{array}$$

6–9 *Späterer Zusatz:* Vel pro β, ponendo $\frac{b}{a}$ fiet

$$\left.\begin{array}{llll}
b^4a^2-xa^2b^3 & +3x^2a^2b^2 & -\frac{x^4}{2}ab & +x^6\\
 & +2x^3a & +x^3a^2 & -4x^5a\\
 & -a^4 & & +4x^4a^2\\
 & +\frac{x}{2}a^3 & &
\end{array}\right\}\sqcap\ 0.$$

6 *Nebenrechnung:* $4x^2=-\frac{64}{16}x^2+\frac{x^2}{16}=\frac{63}{16}x^2$

---

15 $4x^2$ =: Leibniz rechnet fortlaufend.

Inveniatur per dioristicen intra quos terminos cadat valor ipsius β. Inprimis si ponatur maximus valor possibilis ipsius x, quo utemur, qui est valor ipsius BD, posito radio $= 1$. Inventus limes ipsius β sit ratio major minorve vera, Trianguli ABC ad $AEB + BFC$, et terminorum progressionis Geometricae hac ratione progredientium in infinitum quaeratur summa, major minorve vera. Area portionis circuli intra hos duos terminos cadet.

Hoc modo extractio quarumlibet radicum, quarum exponentes numeri progr. geom. dupl. dabitur inventio quotcunque mediarum proportionalium, et sectio angulorum ejusmodi universalis. Et hujus angulorum sectionis ope, etiam extractio radicum affectarum omnium, et constructio geometrica omnium problematum hujusmodi, quod duplicem habet usum. Tum ut per numeros inveniamus statim latus cujuscunque polygoni inscripti continua arcus dati subdivisione geniti, ac proinde appropinquationem quantumlibet exactam. Tum vicissim, ut ejusmodi extractiones si opus sit ope angulorum compendio geometrice efficiamus.

$$NB. \quad EH = BG = 1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$$

$$LM = 1 - \sqrt{\cancel{1} - \cancel{1} + \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$$

$$(EH)$$

$$\text{sequens} = 1 - \sqrt{\cancel{1} - \cancel{1} + \sqrt{\sqrt{1 - \frac{x}{2}}}}$$

$$(LM)$$

Hinc et summa omnium HI, continuata in infinitum subsectione haberi potest. Item ope Logarithmorum inveniri potest, latus cujuslibet polygoni inscripti subsectionibus

---

1–3 *Dazu, am Rande:* Ut β inveniatur velut numerus, cogitandum et x esse numerum.

8 *Über* proportionalium: falsum

15–19 *Nebenbetrachtungen:* $\sqrt{x} \frown \sqrt{\sqrt{x}}$

$$1 - x + \frac{x^2}{4}$$

20 *Darüber:* Male. Progressio non est geometrica sed ejus exponentes.

arcus cujusdam dati, sine ullo calculo. Ac proinde appropinquatio quantumlibet exacta. Tantum enim ex prima DI, extrahenda radix tot graduum, quot est exponens termini progressionis Geometricae duplae, cujus laterum numero polygonum quaeratur. Quod fit sola divisione ope Logarithmorum.

$z = 1 - \frac{x}{2}$. Extractio Radicis ex

2	Quad. ex	za
4	quad. quad. ex	za^3
6	quad. quad. quad. ex	za^5
8	quad. quad. quad. quad. ex	za^7

Ac proinde Extractio Geometrica omnium Radicum purarum quarum exponentes numeri dupl. progr. Geom.

Prout x alia atque alia assumitur eadem radix fit quaevis alia, quadratica v. g. quadrato-quadratica.

Data LM statim datur AM, nempe $\sqrt{2LM - LM^2}$ et Area $ALE + ENB = LM \sqrt{2LM - LM^2} = \sqrt{2LM^3 - LM^4} = LM\sqrt{LM}\sqrt{2 - LM}$ seu

$$1 - \sqrt{(\gamma)\ 1 - \frac{x}{2}},\ \frown\ \underbrace{\sqrt{1 - \sqrt{(\gamma)\ 1 - \frac{x}{2}}}\ \frown\ \sqrt{\underset{=1}{\boxed{2-1}} + \sqrt{(\gamma)\ 1 - \frac{x}{2}}}}_{a-b\ \frown\ a+b\ =a^2-b^2} =$$

$$1 - \sqrt{(\gamma)\ 1 - \frac{x}{2}}\ \frown\ \sqrt{1 - \sqrt{(\frac{\gamma}{2})\ 1 - \frac{x}{2}}} = ALE + ENB.$$

$$\sqrt{1 + \cancel{\sqrt{(\frac{\gamma}{2})\ 1 - \frac{x}{2}}} - 2\sqrt{(\gamma)\ 1 - \frac{x}{2}},\ \frown\ 1 - \sqrt{(\frac{\gamma}{2})\ 1 - \frac{x}{2}}}\ \text{seu}$$

$$\sqrt{,\ \text{———————————} - \cancel{\sqrt{(\frac{\gamma}{2})\ 1 - \frac{x}{2}}} - \sqrt{(\frac{\gamma}{4})\ 1 - \frac{x}{2}} +}$$

$$2\sqrt{,\ \sqrt{(\gamma)\ \text{cub. de}\ 1 - \frac{x}{2}}}.$$

16 *Dazu:* γ exponens radicis.

$$\sqrt{1-2\sqrt{(\gamma)\ 1-\frac{x}{2}}+2,\sqrt{,\sqrt{(\gamma)\,\text{cub. de}\ 1-\frac{x}{2}}-\sqrt{(\frac{\gamma}{4})\ 1-\frac{x}{2}}}}=ALE+ENB.$$

γ sunt numeri progressionis Geometricae duplae continue crescentes. Unde patet terminos ipsos non esse progressionis Geometricae, sed ipsorum exponentes. Uti fit qoque in radicibus surdis per numeros rationales extractis.

2–4 *Nebenbetrachtung:*

1	1	0	*gestr. L*
2	8	6	
4	64	60	
8	512	504	
16			

3. SERIES CONVERGENS AD CIRCULUM

[30. Dezember 1673 — Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 311. Ausschnitt ca 17,6 × 17,2 cm. 1 S. auf Bl. 311 v°.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz hat Exemplare von J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, und von Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, am 30. Dezember 1673 von Huygens ausgeliehen (s. N. 2). Die vorliegenden Betrachtungen zu Gregory dürften etwa gleichzeitig mit N. 2 entstanden sein. Das im Haupttext verwendete Gleichheitszeichen = gebraucht Leibniz im fraglichen Zeitraum etwa bis Mitte 1674.

Series convergens ad Circulum

a b. Si $a = b$. erunt duo termini sequentes : $\sqrt{a^2}$ $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2}}$. Ergo etiam aequales.

$\sqrt{ab}$ $\dfrac{a^2}{\sqrt{ab}}$

---

12 f. *Späterer Zusatz am Rand:*

$$\begin{array}{lll} \text{Sit} & a \sqcap c^2. & b \sqcap d^2. \\ \text{fiet} & c^2 & d^2 \\ & cd & \dfrac{c^{\cancel{4}[3]}}{c^{\cancel{2}} + \cancel{c}d} \\ \text{fiet} & c^2 & d^2 \\ & cd & \dfrac{c^3}{c+d}. \end{array}$$

Sit $c^3 \sqcap c^2, e, c+d$ fiet $c \sqcap ec + ed$ et $c \sqcap \dfrac{ed}{1-e}$ et $\dfrac{c^3}{c+d} \sqcap c^2e$. Sit $d \sqcap f - fe$. fiet $c \sqcap ef$ et $c^2 \sqcap e^2f^2$. et $d^2 \sqcap f^2 - 2f^2e + f^2e^2$ et $cd \sqcap ef^2 - e^2f^2$ et $\dfrac{c^3}{c+d} \sqcap c^2e \sqcap e^2f$. Ergo 4 termini ita stabunt: e^2f^2 $f^2 - 2f^2e + f^2e^2$
$ef^2 - e^2f^2$ e^2f

Sit aliter : $\odot \quad a \qquad ☿ \quad b$ vel $\left\{ \begin{array}{lll} a & & b \\ \frac{1}{2} & & \frac{\cancel{2}\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}, \quad \frown 2\sqrt{ab} \\ & & / \quad \backslash \\ & & 1 - \frac{a}{a+\sqrt{ab}} \end{array} \right.$

$\qquad ☽ \quad \sqrt{ab} \qquad ♀ \quad \frac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$

vel multiplicatis omnibus per $\sqrt{ab}$ vel posito $\sqrt{ab} = \sqrt{c^2d^2}$, fiet

$$\begin{array}{lll} c^2 & d^2 & \\ \frac{1}{2} & 1 - \frac{c^2}{c^2+cd} & \frown cd \end{array} \qquad \text{vel} \qquad \begin{array}{lll} c^2 & d^2 & \\ \frac{1}{2} & \frac{c}{c+d} & \frown c^2d \end{array}$$

Nota series illae convergentes semper sunt tales, ut positis a. b. aequalibus etiam termini sequentes fiant aequales.

$a \quad b \quad \frac{c}{d} \quad x$. $\sqrt{\left(\frac{c}{d}\right)}, \frac{x}{a} = \frac{b}{a}$. Ponatur $a = 1$. eritque aequatio $\sqrt{\left(\frac{c}{d}\right)}, \ x = b$ id est quaeritur extractio radicis, potestatis cujus exponens aliter quam in numeris datus est. Hoc problema Gregorius Geometrice solvi posse negat. Sed ego solvi posse puto ope paraboloeidum et Hyperboloeidum Anarithmetωn, quae ope tangentium inveniri possunt. Possunt enim quadrari. Omnis autem figura cujus omnia segmenta quadrari possunt describi potest sive Geometrica est. In figura ergo ista descripta, si $1 = a$ sit latus rectum, b abscissa, erit x applicata quaesita.

---

2 *Darunter:* ♀ , $\frown \odot +$ ☽ $\sqcap$ 2 $\odot$ ☿.

6 *Daneben:* Ad Greg. p. 25.

9 *Daneben:* Ad prop. 5 Greg.

15 f. *Darunter und am Rand:* Error. Non possunt quadrari, nisi ex Hypothesi jam cognitarum ordinatarum. Dat tamen fundamentum aequationis, cui si jungatur methodus tangentium inversa geometrice designari poterunt eae lineae.

---

2 $\frac{1}{2}$: Leibniz klammert aus den Termen für ☽ und ♀ zunächst den Faktor $\sqrt{ab}$ aus und ändert dann nicht konsequent zu $2\sqrt{ab}$. Bei den Umformungen in Z. 7 unterlaufen ihm weitere Versehen. 12 negat: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, prop. XI, S. 25–29. 18 Greg.: *a. a. O.*, prop. XI, S. 25. 19 prop. 5: *a. a. O.*, S. 14.

4. QUADRATURA CIRCULI ARITHMETICA, SIVE PER INFINITAM SERIEM NUMERORUM RATIONALIUM

[Erste Hälfte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 257–260. 2 Bog. 2°. 7 $\frac{3}{4}$ S. Figuren 1–3 fehlen. Cc 2, Nr. 555 A

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für August 1673 bis Juni 1674 belegt. Das Gleichheitszeichen = gebraucht Leibniz im fraglichen Zeitraum bis Mitte 1674. Leibniz verwendet Figuren aus N. 1 und Rechenergebnisse aus VII, 3 N. 26. Für die genauere Abschätzung der Kreisreihe mit den Werten für $\frac{b^7}{7}$ u. $\frac{b^9}{9}$, die er S. 64 Z. 1 f. erwähnt, hat er offenbar noch keine Werte berechnet. Entsprechende Rechnungen führt er ansatzweise in VII, 3 N. 31 S. 343 und ausführlicher in VII, 3 N. 34 S. 346 durch. Auf S. 68 Z. 22–25 verweist Leibniz auf Ergebnisse in Chr. Huygens *De circuli magnitudine inventa*, 1654, und J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667. Dies geht vermutlich auf die in N. 2 und N. 3 dokumentierte Lektüre dieser Werke zurück.

Theorema I.

„Figura ex Tangentibus semiarcuum Diametro Circuli ita ordinatim applicatis, ut „ipsorum arcuum integrorum sinubus rectis in directum jaceant, conflata; aequatur „segmento ipsius arcus maximi assumti duplicato, ac proinde a me appellabitur im„posterum: F i g u r a S e g m e n t o r u m.

Inspice figuram 1. in qua arcus Circuli assumtus, sit $ABBC$. in eo puncta B. numero infinita ubique designata intelligantur, tangens ad extremum A, sit ductus, DA, cui aliae

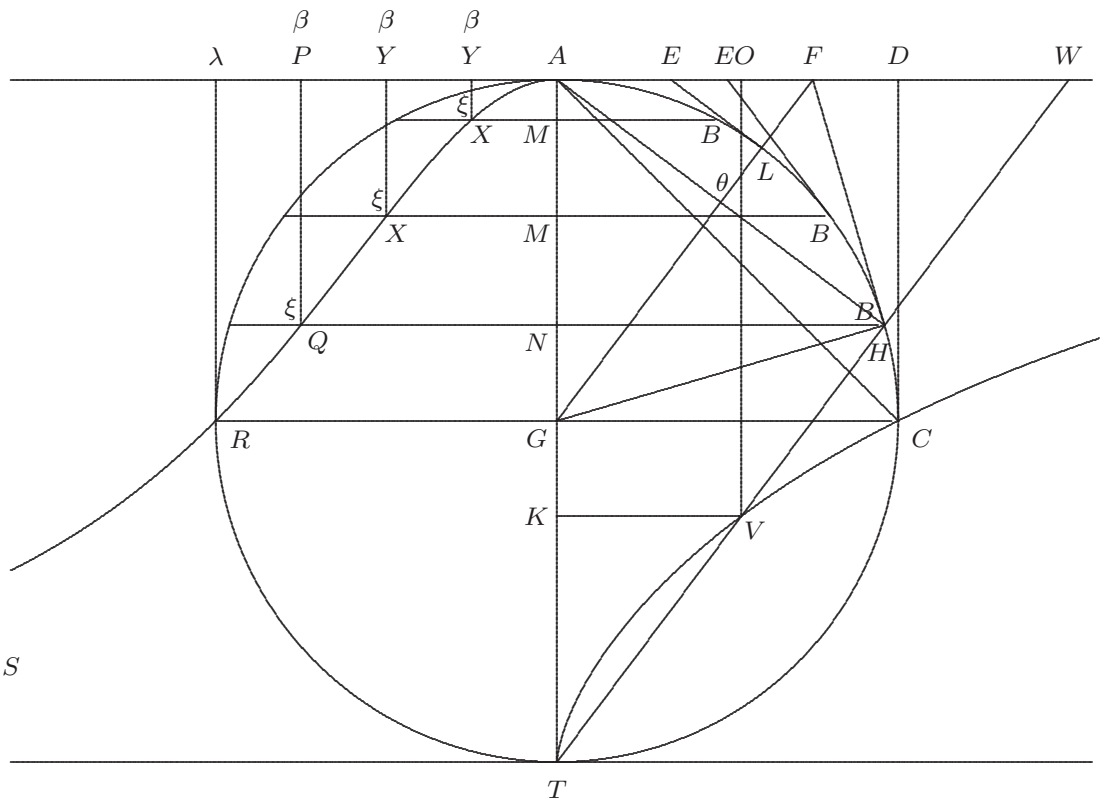
19 *Am Rande:* fig. 1.

17 f. assumti | qvadrante *(1)* minoris *(2)* non majoris, *gestr.* | duplicato |, ... S e g m e n t o r u m *erg.* | *L* 19 Circuli | qvadrantem non excedens, *gestr.* | assumtus *L*

19 figuram 1: Die nicht aufgefundene Figur muss nach den Angaben im Text mindestens die Elemente der folgenden Rekonstruktion enthalten haben; vgl. dazu N. 1 fig. 4 S. 9 Z. 1 sowie VII, 4 N. 42_1 fig. 3 S. 729:

tangentes ex punctis B. nempe BE, occurrant in punctis E. Manifestum est semper Rescissam AE, tangenti BE, respondenti, (: exempli causa ipsam AF, ipsi BF :) esse aequalem, ac proinde rectam ex centro G, ductam, GE (e. g. GF) arcum AB, (e. g. AH,) bisecare in L. sive quod idem est, rectam HF vel AF, esse semiarcus, HL tangentem. Porro Sinus Recti arcuum AB, (exempli gratia arcus AH) sunto BM (e. g. HN). Et punctis M diametri AT. ordinatim applicentur tangentes BE, normaliter, sive ita, ut ipsis BM sibi respondentibus, in directum jaceant; ita scilicet ut BE transferantur in MX ex. grat. HF in NQ, atque ita de caeteris. Ajo figuram ex illis conflatam, $AGRXA$ aequari arcus maximi assumti $ABBC$, segmento $ACBA$, duplicato. Ac proinde si arcus

9 assumti | qvadrantem non excedentis *gestr.* | ABBC L 9–55,4 Ac proinde | si *erg.* | arcus assumtus | sit ipsa *erg.* | Semiperipheria ABT | tunc *erg.* | spatium ... puncto | S *ändert Hrsg.* | :) comprehensum ... esse. *erg.* L



assumtus sit ipsa Semiperipheria ABT, tunc spatium Diametro AT, curva in infinitum procedente, AXS, et Asymptoto TS, (: cujus alterum extremum S seu punctum concursus cum curva infinite absit a puncto T :) comprehensum, ipsi Circulo integro aequale futurum esse.

Non est cur hoc Theorema demonstrem, (etsi id mea quadam methodo praestare possim) quoniam patet ejus veritas ex iis quae dudum ab insignibus Geometris nostri temporis de Cissoeide demonstrata habentur, cujus integrae mensuram Doctissimus Wallisius primum, at universalem non partium minus quarumlibet quam totius dimensionem, Nobilissimus Hugenius ni fallor omnium primus dedit. Ego igitur hoc loco, ne actum agam, tantum hujus figurae nostrae cum Cissoeide affinitatem ostendam. In dicta figura 1ma Circuli diameter esto AT. tangenteque AW indefinite producta in partem C, sumatur in arcu circuli AC. punctum quodlibet H, ducaturque recta THW, et sumatur ipsi TH aequalis WV. Quod si idem in aliis quoque arcus punctis, B, etc. C. ubilibet fieri intelligatur, Curvam in quam omnia puncta V incident Cissoeidem fore constat. Ex V. perpendicularis agatur in AT, nempe VK, ea erit ordinata Cissoeidis, Asymptoto AW, parallela. Ex eodem puncto V, alia agatur perpendicularis in Asymptoton, VO, manifestum est WO aequari ipsi HN, quia WV aequalis ipsi HT. Ergo differentia inter AW, duplam ipsius $AF, = BF$ seu duplam applicatae figurae nostrae, seu tangentis arcus AH dimidiati, et inter VK applicatam Cissoeidis, est $WO, = HN$ sinus rectus arcus AH. Cumque summa Tangentium semiarcus constituat figuram nostram $AGRXA$, summa applicatarum Cissoeidis ipsam Cissoeidem, ejusve portionem; summa sinuum Rectorum portionem Circularem $AGCBA_{[,]}$ hinc junctis iis quae ab aliis de Cissoeide ostensa sunt, facile habebitur veritas Theorematis propositi. Et verius est ex hac ipsa figurae propositae dimensione Cissoeidis mensuram demonstrari.

10 nostrae *erg. L* 18 seu ... seu *erg. L*

5–24 Non ... demonstrari: vgl. VII, 4 N. 42_1 S. 734 Z. 8 – S. 736 Z. 19. 5 f. (etsi ... possim): vgl. z. B. VII, 4 N. 39_1 S. 617–622, sowie im vorliegenden Band N. 1, Theorema I, S. 5 Z. 1 – S. 6 Z. 16.
6–9 quae ... dedit: Huygens verfasste seine Zissoidenquadratur im April 1658 (*HO* II S. 170–173). Er informierte Wallis darüber in seinem Brief vom 6. September 1658 (*a. a. O.*, S. 210–214) und sandte ihm seinen Beweis vor dem nächsten erhaltenen Schreiben vom 31. Januar 1659 (*a. a. O.*, S. 329–331). Leibniz bezieht sich wohl auf die Darstellung in J. Wallis, *Mechanica*, 1670–1671, pars II, S. 532 u. pars III, S. 574–576 (*WO* I S. 905–908); vgl. VII, 4 N. 34 S. 575.

Theorema II.

„Tangens semiarcus (AD, vel DB. in fig. 2) est ad Radium (MB), ut sinus versus „(AE) arcus integri (AB) ad rectum (EB).

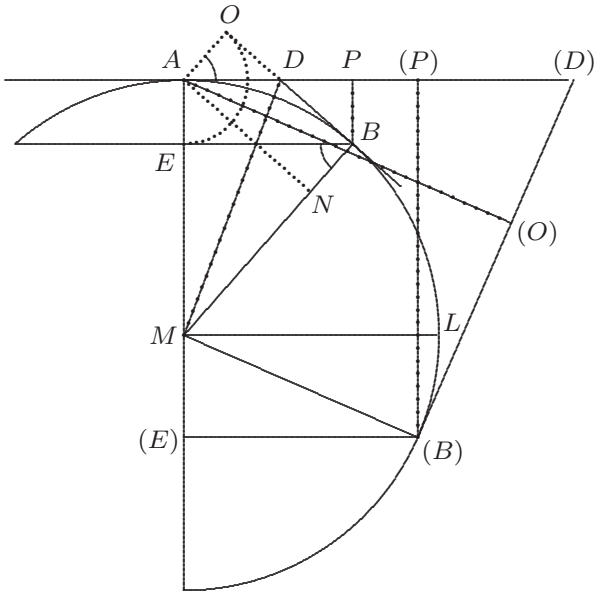
In productam BD sit perpendicularis AO, cui aequalis sumatur BN. Patet ipsam BN, sive AO aequalem ipsi AE, quia et AN aequalis EB. Patet quoque Angulum OAD aequalem esse Angulo EBM, ergo ob Triangula similia AOD, BEM, fore ut AO, vel AE, ad EB, ita AD ad MB. Quod ostendendum erat.

Sed cum haec demonstratio videatur tunc tantum apta, cum Arcus est minor quadrante, ideo paucis mutatis reddetur universalis. Pone enim arcum quadrante majorem minoremve esse AB vel $A(B)$ et Tangentes semiarcus, inter se aequales esse AD, et BD, vel $A(D)$ et $(B)(D)$. Patet ob circuli uniformitatem; idem esse, sive ex extremo A perpendicularem AO, vel $A(O)$ agas in tangentem BD, vel $(B)(D)$ si opus est productam,

2 *Am Rande:* fig. 2.

9 universalis *(1)* Pone enim arcum Qvadrante | AL *gestr.* | majorem | minoremve *erg.* | esse A | L *gestr.* | B. vel A(B) sunto Tangentes semiarcus A(D) et B(D), | *(a)* qvi *(b)* qvi *erg.* | inter se aeqvales. Et patet ob Circuli uniformitatem, idem esse, sive ex extr *(2)* Pone L

2 fig. 2: Die nicht aufgefundene Figur dürfte ziemlich genau der fig. 3 von N. 1 entsprochen haben:



sive contra ex extremo B vel (B) perpendicularem BP vel $(B)(P)$ in tangentem AD, vel $A(D)$ si opus est productam, at BP vel $(B)(P)$ aequatur ipsi AE, vel $A(E)$ sinui verso ergo AO, vel $A(O)$ eidem aequabitur. Sed et illud universaliter patet Angulum $(O)A(D)$ esse angulo $(E)(B)M$ aequalem, cum sit $M(B)$ parallela $A(O)$, et $(E)(B)$ parallela $A(D)$. Unde Triangula $A(O)(D)$, et $(B)(E)M$ similia, ac proinde denique $A(O)$ vel $A(E)$ ad $(E)(B)$ ut $A(D)$ ad $(B)M$. Quod erat ostendendum.

Theorema III.

„Si curva figurae Segmentorum, ad Rectam AY per verticem ejus A transeuntem, „Asymptoto TS. parallelam, velut ad Axem per ordinatas axi perpendiculares referri „intelligatur, sumta abscissa ex Axe, AY, quam vocabimus $\underline{y}$, et ordinata YX, appel- „lata $\underline{x}$, Radioque: $\underline{a}$; tunc ubicunque punctum X in curva, vel punctum Y in axe su- „matur, erit universaliter vera aequatio haec: $\dfrac{2ay^2}{a^2+y^2} = x$.

Hoc ita demonstratur: Demonstratum est Theor. 2. AE vel AY Tangentem semiarcus esse ad Radium, ut sinus versus AM vel YX ad sinum rectum MB. Jam posito ut ante radio a, sinu verso $YX = x$, sinu recto ex cognita circuli proprietate: $\sqrt{2ax - x^2}$, ac denique Tangente semiarcus AY, posita rursus $= y$, fiet $\dfrac{y}{a} = \dfrac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, vel $y\sqrt{2ax - x^2} = xa$. Unde: $2y^2ax - y^2x^2 = x^2a^2$, sive $2y^2a - y^2x = xa^2$, vel $2y^2a = xa^2 + xy^2$. Ex quo fit denique: $\dfrac{2y^2a}{a^2+y^2} = x$.

---

7 *Am Rande:* fig. 1.

7 f. Theorema III *(1)* Si figurae segmentorum, *(a)* portionis *(b)* portioni AMXA, a Recta MX, | ipsi *erg.* | asymptoto | TS. *erg.* | parallela, abscissae complementum AYXA ad rectam AY asymptoto Parallelam indefinite productam *(aa)* referri intelligatur per ordinatas | perpendiculares *erg.* | Diametro Circuli Generatoris altitudinem figurae segmentorum constitu *(bb)* velut axem referri intelligatur *(2)* „Si *L* 18–58,1 = x. *(1)* Problema *(a)* Geometriae Mechanicae maximum *(b)* inter Geometriae Mechanicae *(aa)* desi *(bb)* Practicae maxima habendum Circulum | vel Ellipsin *erg.*| aut portionem ejus qvamlibet qvadrare; sine Tabulis, | ac *erg.* | sine divisionibus Radicumve extractionibus, paucis tantum multiplicationibus et additionibus, *(2)* Theorema *L*

---

7 f. fig. 1: s. o. Erl. zu S. 53 Z. 19.

Theorema 4.

„Si segmento circuli proposito, Radius, ut ante, appelletur a, et Tangens semiarcus „segmenti propositi, appelletur b, tunc series haec: $+\frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc., in „infinitum continuata, aequabitur Differentiae inter semirectangulum sub sinu verso „totius arcus segmenti, et Tangente semiarcus; segmentumque a semirectangulo sub- „trahendum.

Hujus ut appareat demonstratio, resumendum est ordinatam quamlibet XY quam vocavimus x, qualis est e. g. QP, aequari $\frac{2ay^2}{a^2+y^2}$, modo y intelligatur esse AY, e. g. AP. Ergo $\frac{x}{2a} = \frac{y^2}{a^2+y^2}$. Jam ex iis quae apud alios inprimis doctissimum Wallisium de *Arithmetica infinitorum*, et apud ingeniosissimum Virum Nic. Mercatorem in *Logarithmotechnia* scripta extant, constat esse $\frac{y^2}{a^2+y^2} = \frac{y^2}{a^2} - \frac{y^4}{a^4} + \frac{y^6}{a^6} - \frac{y^8}{a^8}$ etc. $= \frac{x}{2a}$ ac proinde $\frac{x}{2}$ erit = seriei $\frac{y^2}{a} - \frac{y^4}{a^3} + \frac{y^6}{a^5} - \frac{y^8}{a^7}$ etc. in infinitum productae. Porro quoniam summa omnium x, aequatur toti figurae v. g. $APQA$ [vel $A\lambda RQA$], quae portioni figurae segmentorum, v. g. $ANQA$ [vel $AGRQA$] (: ipsum segmentum $AHLA$ [vel $ACBA$] duplicatum aequanti :) complemento est, ad Rectangulum ejusdem basis et altitudinis, quod cum nonnullis non male isoparallelum appellare possis $ANQP$ [vel $AGR\lambda$]. Ideo eadem summa omnium x inde a vertice A, usque ad basin $R\lambda$ aequabitur differentiae inter rectangulum dictum sub $NQ = HF$ [$GR = CD$] Tangente semiarcus segmenti dati et AN [AG] sinu verso arcus ejus integri, comprehensum, et summa omnium $\frac{x}{2}$ aequa-

12 productae. *(1)* Cumqve idem sit *(2)* idemqve est de qvalibet $\frac{x}{2}$ separatim, qvaecunqve etiam AY = y assumatur; ideo data *(3)* et *(4)* et *(5)* Porro *L*

9–11 Jam ... extant: Die fortgesetzte Division ist in J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, nicht enthalten. Leibniz bezieht sich vermutlich auf J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, 1668; vgl. die Erl. zu VII, 3 N. 8 S. 127 Z. 1. In N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, finden sich Beispiele für die fortgesetzte Division auf S. 25 u. 29 f.; vgl. dazu die Randbemerkungen in Leibniz' Handexemplar, VII, 4 N. 3_1 S. 50 f. 13–19 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz. 16 cum nonnullis: vgl. z. B. H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 315.

bitur differentiae inter rectangulum, v. g. $ANQP$, dimidium, seu Triangulum ANP, et inter segmentum v. g. $AHLA$ ab illo Triangulo subtrahendum. Summa autem omnium $\frac{x}{2}$ ut habeatur, quantitas ipsarum y, pro aliis atque aliis $\frac{x}{2}$ aliter atque aliter sumenda est. Quod ut procedat distinctius, maximam AY figurae complementalis propositae $APQA$, nempe ipsam AP, quam appellare placet b, dividamus in infinitas partes aequales, unamque ex illis partibus, sive ipsius $AP = b$, infinitesimam, appellemus β. Ponatur jam prima AY vel $A\beta$ esse 1β, secunda 2β, tertia 3β, quarta 4β. atque ita porro Arithmetica progressione, in infinitum; ad maximam usque AP, et ad quamlibet abscissam $A\beta$, respondens ducatur ordinata $\beta\xi$. Et quoniam ostensum est esse

$$\frac{x}{2} = \frac{y^2}{a} - \frac{y^4}{a^3} + \frac{y^6}{a^5} - \frac{y^8}{a^7} \quad \text{etc.}$$

ideo posito

$$\begin{array}{lllllllll}
A\beta = y = 1\beta & \text{erit} & \frac{x}{2} = \beta\xi & = & \frac{1\beta^2}{a} & - & \frac{1\beta^4}{a^3} & + & \frac{1\beta^6}{a^5} - \frac{1\beta^8}{a^7} \quad \text{etc.} \\
\text{———} & 2\beta & \text{———} & = & \frac{4\beta^2}{a} & - & \frac{16\beta^4}{a^3} & + & \frac{64\beta^6}{a^5} - \frac{256\beta^8}{a^7} \quad \text{etc.} \\
\text{———} & 3\beta & \text{———} & = & \frac{9\beta^2}{a} & - & \frac{81\beta^4}{a^3} & + & \frac{729\beta^6}{a^5} - \frac{6561\beta^8}{a^7} \quad \text{etc.} \\
\text{———} & 4\beta & \text{———} & = & \frac{16\beta^2}{a} & - & \frac{256\beta^4}{a^3} & + & \frac{4096\beta^6}{a^5} - \frac{65536\beta^8}{a^7} \quad \text{etc.} \\
 & \text{etc.} & & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} \quad \text{etc.}
\end{array}$$

Et summa erit, figura $\frac{APQA}{[2]} = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc.,

ut ex iis patet, quae de Paraboloeideum simplicium, Quadraticae, Cubicae aliarumve Quadratura passim habentur.

Problema
inter Geometriae Practicae maxima habendum.

Circulum aut portionem ejus quamlibet quadrare sive per linearum ductus, sive per numeros quantumvis vero propinquos. Per linearum ductus quidem a p p r o p i n q u a -

22 qvadrare *(1)* per numeros qvantumvis vero propinqvos sine divisionibus | sine Tabulis *erg.* | *(2)* sive per *(a)* spatiorum *(b)* linearum *L*

tione Geometrica, modo portio circuli data sit Geometrica, sive Geometrice abscindi possit, etiamsi arcus ratio ad Circumferentiam non sit data. Arithmetica autem Appropinquatione sine Tabulis, sine Radicum extractionibus, paucissimis tantum multiplicationibus et additionibus, ac brevissimis divisionibus. Petitur vero tantum primo, ut portio Circularis, vel arcum habeat quadrante minorem, vel arcus sui bisectionibus, si opus est repetitis, in portiones arcum habentes quadrante minorem resolvatur; quanto enim minor est arcus tanto brevior est operatio. Deinde pro Appropinquatione Arithmetica petitur ut posito radio 1, sinus versus arcus, et tangens semiarcus radio minor futurus in numeris fractione eaque si lubet decimali expressus detur. Quod semper fieri potest, etiam sine Tabulis sinuum, tum instrumentis; tum calculo cum numeri quoque irrationales, facile numeris vero proximis enuntientur, et omnes fractiones facile in decimales convertantur. Quod si denique Tabulas adhibere placeat, praestabit pro Radio, et sinu verso arcus[,] sed inprimis pro Tangente semiarcus eorum adhibeantur Logarithmos, omniaque paucis Additionibus et Subtractionibus, ita perficientur, ut major vel exactitudo, vel facilitas ad usum vix optanda videantur.

Haec omnia ex dictis facile consequuntur. Nam omnis Circuli portio abscissis superfluis in segmenta reduci potest, ut appareat quamlibet Circuli portionem[,] etiam cujus arcus ad circumferentiam ratio, sive data sive adhibita non est[,] nostra methodo tractabilem esse, sine ulla ad dimensionem circuli relatione. Segmentum autem est differentia inter semirectangulum sub sinu verso et tangente semiarcus, et inter summam hujus seriei, $+\frac{b^3}{3a}-\frac{b^5}{5a^3}+\frac{b^7}{7a^5}-\frac{b^9}{9a^7}$, etc. posita b, tangente semiarcus, a, radio. per theor. 4. Ergo radio posito 1, omitti poterit a, fietque $\frac{b^3}{3}-\frac{b^5}{5}+\frac{b^7}{7}-\frac{b^9}{9}$ etc. Quod si jam b. sit minor Radio, tunc posito Radio 1, ipsa b pura, ut vocant, fractione exprimetur. Fractiones autem purae sive integris carentes hoc habent, ut potestates earum decrescant;

12 convertantur. *(1)* Nam omnis Circuli portio abscissis superfluis in Segmenta reduci potest. Segmentum autem est *(2)* Qvod *L* 12 Tabulas ... praestabit *erg. L* 16 Haec ... conseqvuntur *erg. L* 17 f. etiam cuius arcus *(1)* ad *(2)* ratio *(3)* ad ... est *erg. L* 22 etc. | Tota ergo operatio brevissime huc redit. Posito radio, 1 Tangens semiarcus segmenti dati, qvae radio minor esse debet, exprimatur fractione decimali, exempli causa, si Radius *(1)* sit 1 Tangens, *(2)* Tangentis duplus sit, erit tangens $\frac{5}{10}$ *(a)* = b. *(b)* neglectoqve 10 nominatore, cum procedatur, qvasi 5 numerator esset = b, erit $\frac{b^3}{3}=\frac{625}{3}=208\frac{1}{3}$ et $\frac{b^5}{5}$, erit 3125, et $\frac{b^7}{7}$ erit *(aa)* $11160\frac{5}{7}$ *(bb)* $55803\frac{3}{7}$ et $\frac{b^9}{9}$ erit $1089069\frac{4}{9}$ *gestr.* | Qvod *L*

et Geometrica quidem progressione. Quo fit ut potestates posteriores tandem negligi possint, constat enim miram esse incrementi decrementive Geometrici celeritatem. Unde illud quoque intelligitur, eo pauciores sufficere potestates, quo ipsa b, Tangens semiarcus minor est Radio. Collecta ergo summa seriei potestatum quam dixi, quantum satis est continuatae, subtrahatur ex Semi-Rectangulo sub sinu verso arcus dati et tangente semiarcus comprehenso. Residuum per Theor. 4 erit Segmentum datum.

Tangens autem Semiarcus, quemadmodum et sinus versus arcus ipsius statim habetur fractione decimali expressus ope Tabulae sinuum. Posito enim Radio 1, tantum valor Radio in Tabula attributus, terminis Tabulae sinuum pro Nominatore subscribendus est. Tota operatio exemplo fiet illustrior, quod ut pro examine esse possit, utemur numeris ex Tabula sinuum depromtis, et segmento arcus Circumferentiae commensurabilis, ita enim cum dimensione Circumferentiae aliter exhibita, conferri poterit Calculus noster.

Esto ergo Segmentum Circuli datum, cujus quadratura quaeritur, $A\,H\,L\,A$, id putetur esse Arcus graduum 2. Tangens semiarcus, seu 1 Grad. AF, erit 17455, posito Radio AG. 1,000,000, atque ideo posito Radio $= 1$, erit $\dfrac{17455}{1,000,000} = b = AF$. atque ideo

$$\frac{b^3}{3} \quad \text{erit} \quad \begin{cases} \dfrac{1,772,712,490,458}{e^3} \\ \text{vel} \quad \dfrac{1,772,712,490,458,000,000,000,000}{e^5}. \end{cases}$$

posito e esse 1,000,000, nominatorem decimalem, ne ejus potestates toties repeti opus sit, quas sub calculi finem exprimi satis erit.

$$\frac{b^5}{5} \text{ erit:} \qquad \frac{324,062,860,663,911,531,875}{e^5}$$

$$\text{et } \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}, \text{ erit} \quad \frac{1,772,388,427,597,336,088,468,125}{e^5}.$$

Jam ut habeatur AN sinus Versus, arcus 2. Graduum, ideo sinus complementi, seu sinus rectus arcus 88 graduum $\dfrac{999,390}{e}$, subtrahatur a Radio $1 = \dfrac{1,000,000}{e}$, restabit: $\dfrac{610}{e} = d$

13–63,24 Esto: Leibniz übernimmt in diesem Abschnitt die Werte für $\frac{b^3}{3}, \frac{b^5}{5}, \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$ aus seiner Berechnung des Sektors von 2° in VII, 3 N. 26 Teil 3 S. 306–311.

et AN seu d $= \frac{610}{e}$, erit sinus versus, Arcus 2 graduum.

et $\frac{db}{2}$ $= \frac{5,323,775,000,000,000,000,000,000}{e^5}$

et $\frac{db}{2} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} = \frac{3,551,386,572,402,663,911,531,875}{e^5}$, Area Segmenti $AHLA$ arcus 2 grad: verae propinqua sed paulo major. Crediderit aliquis Aream sic inventam multum abesse debere a vera, quod seriei supradictae in infinitum producendae, non nisi duos primos Terminos $+\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$ adhibuerimus. Sed examen jam subjiciendum ostendet, quantam quam subito exactitudinem assecuti simus quoniam scilicet ipsa b multo minor radio est, ac ne ad quinquagesimam quidem ejus portionem pervenit.

Examen autem sic institui potest. Segmento $AHLA$, addatur Fulcrum ejus, ut appellare soleo, id est Triangulum AHG, cujus basis est AH, seu chorda 2 graduum, seu sinus rectus 1. gradus duplicatus; Altitudo vero est $G\theta$, sinus complementi 1. Grad. Area ergo Fulcri, fiet ex altitudine in semibasin, seu sinu recto in sinum complementi ducto. Sinus autem rectus est $\frac{17452}{e} = A\theta = \theta$, seu sin. 1. Gr. $= \frac{17452}{e}$. Et Sinus compl. 1. gr. est $\frac{999847}{e} = g$. $G\theta = g$. seu sin. compl. 1. Gr. $= \frac{999,847}{e}$. Et Rectangulum ex utroque factum, seu Fulcrum[,]

Fulcrum, $AHG = g\theta$, erit $= \frac{17,449,329,844,000,000,000,000,000,000}{e^5}$, addatur Segmento $AHLA$, fiet Sector,

Sector 2. grad. $AGHLA = \frac{17,452,881,230,572,402,663,911,531,875}{e^5}$, Portio Circuli, centesimaoctuagesima qua per 180 multiplicata, fiat Area Circuli,

Area Circuli $= \frac{12,566,074,486,012,129,918,016,302,950,000}{e^5}$. Quae si duplicetur, ac productum dividatur per Radium, qui est hoc loco 1, tunc Quotiens, id est

4 sed paulo major *erg. L*

20–63,5 Area ... $\frac{\text{ב}}{e^5}$: Leibniz erhält den falschen Wert für die Kreisfläche in Z. 20 durch Verdoppeln des Wertes für $\frac{\text{ב}}{e^5}$ aus S. 63 Z. 5, den er aus VII, 3 N. 26 S. 311 übernimmt. Anschließend hat er unter diesem den richtigen Wert für die Kreisfläche durch Halbieren berechnet.

quia Divisor hic unitas, idem ille Numerus, qui duplam Circuli aream, etiam Circumferentiam exprimet.

Erit ergo C i r c u m f e r e n t i a C i r c u l i [,]

C i r c u m f e r e n t i a Radio posito 1, erit paulo major vera =

$$\frac{6,283,037,243,006,064,959,008,151,475,000}{1,,000,000,,000,000,,000,000,,000,000,,000,000 = e^5} = \frac{\text{ב}}{e^5}.$$

3 141 518 621 503 032 479 504 075 737 500

Et Radio posito e^5, Circumferentia erit ב.

Et jam experiri licebit, quam accurate calculum subduxerimus. Necesse est enim esse circumferentiam majorem peripheria Polygoni 180 laterum inscripti, minorem circumscripti. At Sinus vel Tangens, unius gradus est semilatus Polygoni, ille inscripti, haec circumscripti. Ergo uterque bis 180, id est 360 vicibus in Polygoni sui peripheria continetur. Sive ductus in 360 peripheriam producit. Atque ita

Posito Radio, 1,000,000

	174 55|0	Tangens unius Grad.
in	360	dabit
	6,283,800	peripheriam Polygoni 180 laterum, c i r c u m s c r i p t i , ideoque circumferentia circuli m a j o r e m
et	174 524	Sinus unius Gr.
in	360	dabit
	6,282,720	peripheriam Polygoni 180 laterum, Inscripti, ideoque Circumferentia circuli m i n o r e m

inter quas cadit Valor circumferentiae Circuli a nobis inventus

6,283,037.

5 3 141 518 621 503 032 479 504 075 737 500 *erg. L* 8 f. circumferentiam *(1)* esse *(2)* | minorem *(a)* Polygono 180 laterum inscripto, majorem circumscripto. Est autem *(b)* peripheria ... inscripti, majorem *ändert Hrsg.* | circumscripti *L* 12 *(1)* 17455 *(2)* 17455|0 *L* 17 et *(1)* 17452 *(2)* 174524 *L*

17 174 524: Die letzte Ziffer 4 hat Leibniz nachträglich ergänzt. Sie ist in der Multiplikation nicht berücksichtigt.

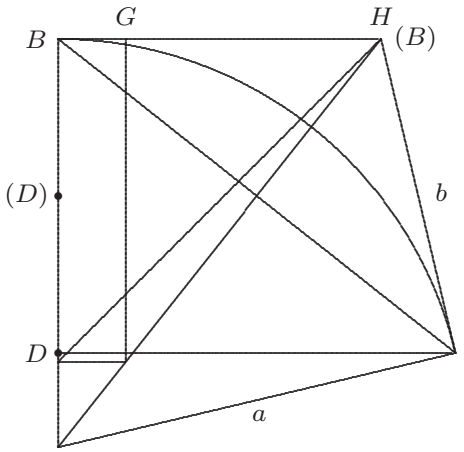
Quod si majorem, et profecto suffecturam exactitudinem quaeras, tantum hoc loco duos alios seriei terminos $\frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$. adjecisse suffecerit. Ac facile erit servata eadem calculi forma quam velis longe progredi, inprimis si vel Logarithmi, vel cum nimia numerorum magnitudo est Instrumentum meum Arithmeticum adhibeatur, cujus ope factum est, ut omnis calculi labor imposterum haberi possit pro nullo. Quod est dimidia molestiae parte praxin scientiarum Mathematicarum exonerasse: ne dicam maxima. Sane cum omnia Numeris, Notis, Figurisque transigantur; constat numerorum tantum servilem esse tractationem in exemplis, et quem lubens alteri perpetuo transscriberes; neque enim in ea invenit animus quo pascatur: cum contra notarum Analyticarum, figurarumque examinatio in alias rejici non possit, has enim dedignari est ignorare velle naturas rerum.

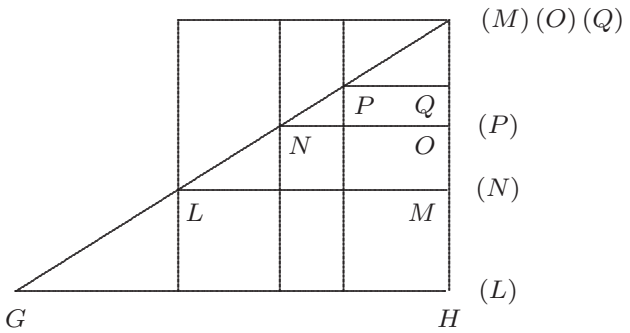
Atque ita satis comprobata per N u m e r o s calculi veritate, G e o m e t r i c a quoque Appropinquationis nostrae c o n s t r u c t i o ascribenda est, quae neque inelegans opinor videbitur, et est per expedita; cum fere tantum rectarum parallelarum ductu ac transportatione peragatur. Ea ergo paucis huc redit. Dato segmento quadrando cujus semiarcus Tangens b (f i g. 3) minor sit radio a. inveniatur ipsis Radio et tangenti (a. b)

9 notarum | *(1)* sive *(2)* Analyticarum, *erg.* | figurarumqve L

---

2 $\frac{b^7}{7}$: Den Wert $\frac{b^7}{7}$ berechnet Leibniz in VII, 3 N. 34 S. 356. 15 f i g. 3 : Die nicht aufgefundene Figur lässt sich aus den Angaben im Text nicht als Ganzes herstellen. Es werden daher Rekonstruktionen von Teilfiguren versucht:

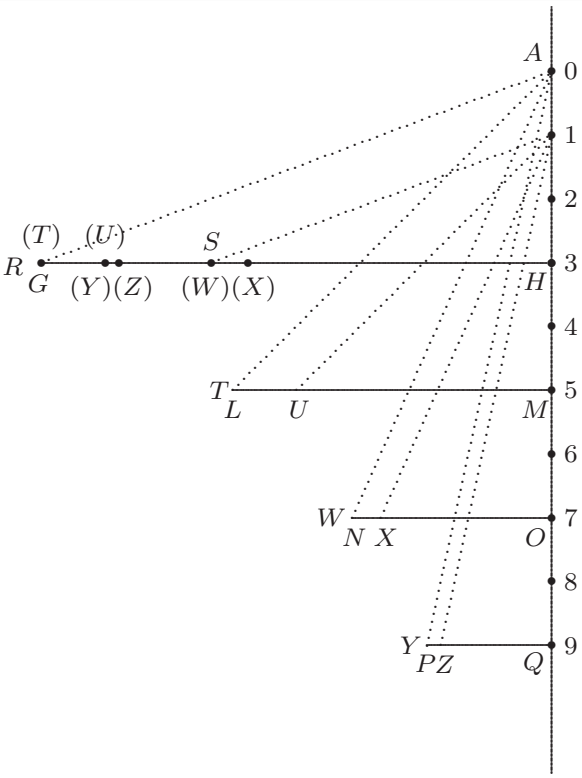




tertia proportionalis decrescens $(\frac{b^2}{a})$ GH. et alia LM, ita ut ratio GH: LM, sit duplicata rationis $a : b$. Inventa $(L)(M)(= \frac{b^4}{a^3})$ ipsius GH alterutri extremo applicetur. Junctaque $(M)G$, jam LM aequalis ipsi $(L)(M)$ Triangulo $(M)HG$ applicetur parallela basi GH; cujus A p p l i c a t a e a vertice (M) vel (O) A b s c i s s a $(M)M$ vel $(N)(O)$ eodem modo transferatur in NO sive altitudini Trianguli applicetur; rursusque hujus quoque Applicatae Abscissa $(M)O$ vel $(O)O$ vel $(Q)(P)$ transferatur in applicatam PQ. atque ita porro quaelibet abscissa ex aliqua applicatione nata, in aliam rursus transeat applicatam; idque quousque nimia prodeuntium abscissarum parvitas vel intractabiles tandem reddet, vel tuto negligi posse monebit.

A p p l i c a t a s autem ne in vocabulis obscuritas restet, quae in rebus nulla superest vocare soleo generali nomine: Rectas parallelas, utrinque ad exitum figurae perveniente; earum maxima b a s i s dicitur; minima in V e r t i c e m evanescit. A b s c i s s a s vero appello portiones a l t i t u d i n i s (id est rectae a vertice ad basin ductae) inter

10 ne ... rebus *(1)* inter se *(2)* nulla superest *erg. L*



applicatam quamlibet et vel verticem vel basin interceptas. Unde alias a vertice abscissas dicimus, alias a basi. Sed cum simpliciter, Abscissae dicuntur intelligi solent, a Vertice, ut hic quoque.

His ita factis in alia quadam Recta pro arbitrio assumta (unde eadem sufficit exemplis diversis), assumantur portiones aequales continuae; 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. etc. quantum satis esse ex statim dicendis apparebit; et Applicatae Trianguli paulo ante inventae punctis dividentibus per numeros impares signatis excepta unitate ordine applicentur; quo quamlibet libuerit angulo, ita ut maxima GH cadat in 3, proxime minor LM in 5, et ita porro. Denique ex Rectae assumtae primae portionis, $0-1$, punctis extremis ad quamlibet applicatam ducantur duae Rectae inter se parallelae, quarum extima ex puncto 0 vel A. extremitati ipsius Applicatae occurrat. Portiones inter duo occursuum puncta interceptae, $TU.WX.YZ$ transferantur ad maximam RS eo cum discrimine, ut portiones numeris imparibus 5. 9. 13. etc. applicatae ei continue adimantur, seu sumantur in ipsa recta RS ab uno extremo versus alterum, ut (5) TU, (9) YZ translatas apparet in $(T)(U)$, seu $R(U)$, et $(Y)(Z)$ seu $(U)(Z)$. Contra portiones aliis numeris imparibus per saltus omissis, 7. 11. 15. etc. applicatae, ipsi RS. continue addantur, seu sumantur in ipsa, continue in alterutram partem, oppositam ejus a qua portiones adimendae introrsum sumtae sunt, producta, ut hoc loco exempli causa (7) WX translatam apparet in $(W)(X)$ vel $S(X)$. Tandem productum ex tot additionibus et subtractionibus $(Z)(X)$, seu distantia inter duo ultima puncta (Z) et (X) alterum introrsum alterum extrorsum, assumta, ducatur in rectam b vel $B(B)$. Factum rectangulum $(Z)(X)(B)$ aequabitur propemodum differentiae inter semirectangulum ex sinu verso arcus segmenti quadrandi, et tangente semiarcus, et segmentum. Ac proinde, si $(Z)(X)$ adimatur a sinu verso dimidio d, vel $D(D)$, Rectangulum $(D)(X)(B)$ sub Residua $(X)(D)$ et eadem Tangente semiarcus, b, erit segmento ad quadrandum proposito, tam paulo majus quam voles.

Quanquam autem exacte haberi hactenus non possit quantitas erroris, id enim foret circulum quadrare, potest tamen dari semper quantitas ipso errore major: ut intelligamus si ea sit negligendae tuto parvitatis, errorem ipsum multo minus nos turbare debere. Ea autem quantitas errore major ita semper inveniri potest: Resumta serie nostra $\frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc. si ejus in unam summam collectio ad certum usque terminorum numerum, ut sufficere ostendimus, producatur; utique quanti-

24 f. semiarcus, b, *(1)* aeqvabitur *(2)* erit paulo minus *(3)* | erit *erg. Hrsg.* | segmento *L*

tas summae omnium Terminorum infinitorum residuorum, erit eadem cum quantitate erroris. Qua quantitate, ut aliam inveniamus majorem, a residuis terminis infinitis, ut $\frac{b^{11}}{11a^9} - \frac{b^{13}}{13a^{11}} + \frac{b^{15}}{15a^{13}} - \frac{b^{17}}{17a^{15}}$ etc. abjiciantur numeri impares divisores, fiet series major haud dubie priore: $\frac{b^{11}}{a^9} - \frac{b^{13}}{a^{11}} + \frac{b^{15}}{a^{13}} - \frac{b^{17}}{a^{15}}$ etc. cujus summa regulis jam notis inveniri potest. Quod ut fiat dispescatur in series duas terminorum alteram affirmatorum, $\frac{b^{11}}{a^9} + \frac{b^{15}}{a^{13}} + \frac{b^{19}}{a^{17}}$ etc. alteram negatorum $\frac{b^{13}}{a^{11}} + \frac{b^{17}}{a^{15}} + \frac{b^{21}}{a^{19}}$ etc. Quarum utraque cum sit progressionis geometricae continue decrescentis, (cujus ratio: $\frac{b^4}{a^4}$), ideo summae patiens erit. Summa autem prioris seriei licet infinitae est $\frac{b^{11}}{a^9 - a^5b^4}$, et posterioris $\frac{b^{13}}{a^{11} - a^7b^4}$. Et summa seriei totalis infinitae terminorum affirmatorum pariter et negatorum numeris divisoribus liberatorum, seu quantitas errore major, erit, differentia utriusque summae partialis, sive $\frac{a^2b^{11} - b^{13}}{a^{11} - a^7b^4}$. Atque ita fieri potest, ut quemadmodum in Polygonis inscriptis ac circumscriptis fit, ita hic quantitates semper aliae atque aliae, magis magisque convergentes assignari queant, aliae majores semper, aliae minores veris. Cumque ista omnia tam expedite exacteque transigantur, sive calculis sive lineis res agatur, prope

---

8 *Nebenbetrachtung:*

$$\text{Summa} = x.\ \frac{x}{\frac{b^{11}}{a^9}} = \frac{\frac{b^{11}}{a^9}}{\frac{b^{11}}{a^9} - \frac{b^{15}}{a^{13}}}.\ \text{Ergo } x = \frac{\frac{b^{22}}{a^{18}}}{\frac{b^{11}}{a^9} - \frac{b^{15}}{a^{13}}} = \frac{\frac{b^{11}}{a^9}}{\frac{1}{1} - \frac{b^4}{a^4}} = x.$$

$$x = \frac{\frac{b^{11}}{a^9}}{\frac{a^4 - b^4}{a^4}} = \frac{b^{11}}{a^9 - a^5b^4}.\ \text{Eodem modo: } \frac{\frac{b^{13}}{a^{11}}}{\frac{1}{1} - \frac{b^4}{a^4}} = \frac{\frac{b^{13}}{a^{11}}}{\frac{a^4 - b^4}{a^4}} = \frac{\frac{b^{13}}{a^7}}{a^4 - b^4} = \frac{b^{13}}{a^{11} - b^4a^7}.$$

7 $\frac{b^2}{a^2}$ *L ändert Hrsg.* 8 licet infinitae *erg. L* 9 infinitae *erg. L* 11 $\frac{a^2b^{11} - b^{13}}{a^{11} - a^7b^4}$. *(1)* Et haec qvantitas errore major semper tanto propius accedet ad errorem, qvanto ipse error minus est. Ita *(2)* Atqve *L*

est ut credam meliorem ad usus humanos Circuli simul omniumque ejus partium et tot aliarum figurarum planarum solidarumque magnitudinis a Circuli dimensione pendentis Quadraturam, non temere expectandam. Et credibile est imo ut mihi videtur, certum si quando Geometrica invenietur ratio datum quodlibet circuli segmentum exacte quadrandi, plerumque calculum ad altiores potestates ascensurum, et rectas quarum ductu problema solvetur, non nisi curvarum linearum, magis magisque pro re nata compositarum intersectionibus Geometrice habitum iri: ut fortasse nemo etiam tunc dubitaturus sit ad usus humanos ipsi Quadraturae verae praeferre Appropinquationem nostram.

Ex dato arcu invenire sinum, aliamve adscriptam quamlibet, seu circumferentia arcum abscindere, qui ad rectam vel alium arcum rationem habeat datam.

Sectio Angulorum Universalis. Generaliterque problemata omnia in angulis efficere quae effici possunt in rectis. Ut: invenire quotcunque medios proportionales, Arithmeticos[,] Geometricos, harmonicos, inter duos angulos datos. Idem applicare ad angulum solidum seu superficiem sphaericam.

Extractio Radicum Universalis, purarum pariter atque affectarum, sive Problematum omnium Rectilineorum aut Geometriae per potestates, solutio.

Problemata omnia in portionibus Circuli aut superficiei sphaericae efficere, quae fieri possunt in lineis rectis, ut portionem a Circulo abscindere magnitudinis datae.

Eadem efficere in portionibus Sphaerae, Coni, Cylindri.

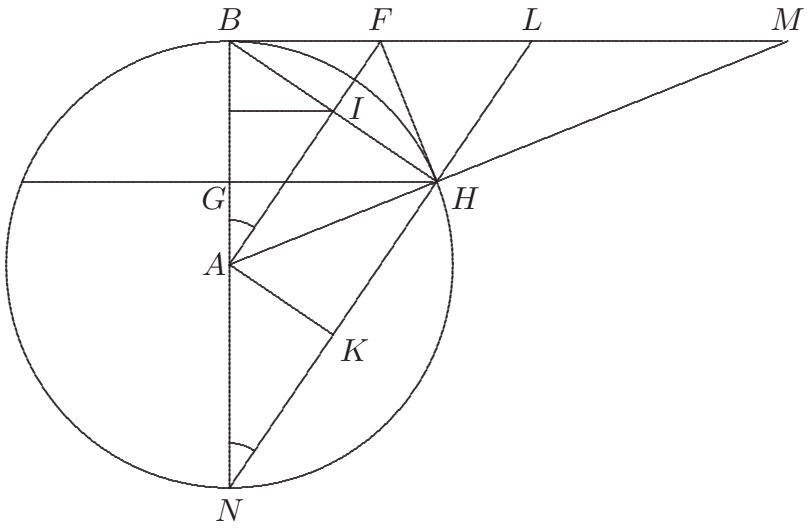
Earundem quantitatum omnium momenta ex quolibet aequilibrii axe assumto, instar rectarum tractare. (Invenire loca Centrorum gravitatis.)

Hugenius dedit rationem ex adscriptis inveniendi arcus, seu ex lateribus figurarum rectilinearum angulos. Sed ex angulis dare latera, aut ex angulis adscriptas, sine Tabulis; id quidem ille aggressus non est. Jac. Gregorius huc usque producere suam methodum posse sibi visus est; itemque abscindere a Circulo segmentum quantitatis Imperatae. Compendiosior nostra est, inprimis pro segmentis, abscindendum est a Circulo segmentum datae magnitudinis, fiat: $\frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc. $= e$[,] b autem est jam quaesita[,]

3 f. est | imo ... certum *erg.* | *(1)* etiam si Geometrica *(2)* si *L*

22 dedit: Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, prop. XII u. XX, S. 19–21 u. 40–44 (*HO* XII S. 147–149 u. 173–181); vgl. N. 2 S. 44 Erl. zu Z. 9–18. 25 visus est: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, prop. XXX, XXXI u. XXXV, S. 44–46 u. 57–59.

e est quantitas segmenti data. Porro quanto minus est segmentum datum, seu quanto minor est ipsa b, tanto pauciorum terminorum inferiorumque potestatum faciliorque resoluta est aequatio. An ita? Dato segmento ea. et quaesita b, investigemus sinum versum c rectum d[,] ante omnia $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$. Ergo $\frac{bd}{a} = c$. Jam $\frac{b}{a} = \frac{d}{2a - \frac{bd}{a}}$. erit $2ba - \frac{b^2 d}{a} = da$, vel $2ba = \frac{b^2 d + da^2}{a}$, seu $\frac{2ba^2}{b^2 + a^2} = (d)$, et c erit $= \frac{2b^2 a}{b^2 + a^2}$. Unde apparet si quadratum tangentis semiarcus sit radio commensurabile etiam sinum versum esse commensurabilem. At non et sinum rectum, nisi ipsa tangens sit commensurabilis.



[*Fig. 4*]

Porro ex his[:] AB radio BF tangente semiarcus invenimus BG, GH[,] ergo datur et $BH = \sqrt{BG^2 + GH^2} = \sqrt{\frac{4b^2a^4 + 4b^4a^2}{b^4 + 2b^2a^2 + a^4}} = \frac{2ba\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} = \frac{2ba}{\sqrt{a^2+b^2}} = BH$ atque ita

2 f. faciliorqve ... aeqvatio *erg.* L 10–70,1 = BH | *(1)* ecce *(2)* atqve ... circumscripto *erg.* | et L

1 quantitas segmenti: Mit den Bezeichnungen von S. 68 Z. 27 – Z. 4 lautet der Wert des Segments $\frac{bc}{2} - e$. Der Fehler wirkt sich nicht weiter aus. 8 *Fig. 4*: Leibniz verwendet in seiner Skizze Kleinbuchstaben für die Punktbezeichnungen, außerdem sind die Bezeichnungen für M und N vertauscht.

jam latus inscriptum ex circumscripto et $IA = \sqrt{a^2 - \frac{b^2a^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^4+b^2a^2-b^2a^2}{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Jam AM secans arcus dupli est $\frac{a^2}{GA} = \frac{a^2}{a - \frac{2b^2a}{b^2+a^2}} = \frac{a^2b^2+a^4}{ab^2+a^3-2b^2a} = \frac{a^2b^2+a^4}{a^3-b^2a} = \frac{ab^2+a^3}{a^2-b^2}$. Ab ejus quadrato auferatur quadratum radii a^2, fiet Tangens arcus dupli BM. Fiet:

$$\square \text{ secantis } \frac{a^2b^4+2a^4b^2+a^6}{a^4-2a^2b^2+b^4} - a^2 = \cancel{a^2b^4} + 2a^4b^2 + \cancel{a^6} - \cancel{a^6} + 2a^4b^2 - \cancel{a^2b^4}$$

$$= \frac{4a^4b^2}{a^4-2a^2b^2+b^4} = \frac{2ab^2}{a^2-b^2}.$$

Unde patet Tangentem semiarcus non inepte assumi pro basi, cum ipso posito commensurabili cum Radio, pleraque alia commensurabilia sint. Quemadmodum et area fulcri arcus integri, quod facile ostendo[,] fit enim ex ductis in se $IA = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et

---

6 *Späterer Zusatz:* Si tangentem semiarcus sumas pro incognita <u>b.</u> et investiges sinum versum arcus dupli, habebis $\sqcap \frac{2ab^2}{a^2-b^2}$. Sin vero investiges tangentem arcus dupli, habebis ut a Pellio ostensum est: $\frac{2a^2b}{a^2-b^2}$. Unde ad $\frac{\text{Sin. Rect. arcus}}{\text{Tang. ejusdem arcus}} \sqcap \frac{2ab^2}{2a^2b}$ seu $\sqcap \frac{2ab}{2a^2} \sqcap \frac{b}{a}$ seu Sinus Rectus est ad suam Tangentem, ut Tangens semiarcus ad Radium.

2 AM *(1)* |secans arcus dupli *nicht gestr.*| $\frac{a^2b^2+a^4}{2b^2a}$ et tangens arcus dupli est qvadratum radii a qvadrato secantis ademtum *(2)* secans *L*

---

6 $\frac{2ab^2}{a^2-b^2}$: Richtig wäre $\frac{2a^2b}{a^2-b^2}$. wie in Z. 12. Leibniz verwendet den fehlerhaften Wert weiter in S. 72 Z. 5. 11 $\frac{2ab^2}{a^2-b^2}$: Richtig wäre $\frac{2ab^2}{a^2+b^2}$ wie in S. 69 Z. 5. Leibniz verwechselt außerdem sinus rectus und versus und gelangt zu einem falschen Ergebnis. 12 ostensum: J. Pell, *Controversiae de vera circuli mensura ... pars prima*, 1647, S. 13. Leibniz kennt den Satz aus Fr. van Schooten, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*, 1661, *DGS* II S. 366 bis 368; vgl. VII, 4 N. 22 S. 394.

$\frac{BH}{2} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, fiet $\frac{a^3b}{a^2+b^2}$ area fulcri. Unde brevioris calculi causa, si modo sinus versus dimidius arcus totius dividatur per b et multiplicetur per a. fit fulcrum.

$$\frac{a^3b}{a^2+b^2} = \frac{a^3b}{a^2+b^2} - \frac{a^3b^3}{a^4+b^2a^2} + \frac{a^5b^5}{a^8+b^2a^6} - \frac{a^{11}b^7}{a^{16}+b^2a^{14}} \text{ etc.}$$

$$\frac{ab}{1} - \frac{b^3}{a} + \frac{b^5}{a^3} - \frac{b^7}{a^5} \text{ etc. fulcrum. Semi-}$$

rectangulum sub sinu verso et tangente semiarcus est $\frac{b^3a}{b^2+a^2}$. Quod si dividas facit: 5

$\frac{b^3a}{a^2} - \frac{b^5a}{a^4} + \frac{b^7a}{a^6} - \frac{b^9a}{a^8}$ etc. seu $\frac{b^3}{a} - \frac{b^5}{a^3}$ etc.

Jam sector est Fulcrum + Segm.

$$\frac{a^3b}{a^2+b^2} + \text{semirectang.} - \text{serie}$$

$$\frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7} \text{ etc.}$$

$$\frac{b^3a}{b^2+a^2} = \frac{b^3}{a} - \frac{b^5}{a^3} + \frac{b^7}{a^5} - \frac{b^9}{a^7} \text{ etc.} \qquad 10$$

$$\frac{a^3b+b^3a}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \frown ab = ab$$

---

3 f. *Nebenrechnung:*

$$\frac{a^3b}{a^2} - \frac{a^3b^3}{a^4} + \frac{a^3b^5}{a^6} - \frac{a^3b^7}{a^8} + \frac{a^3b^9}{a^{10}}$$

$$ab - \frac{b^3}{a} + \frac{b^5}{[a]^3} - \frac{b^7}{[a]^5} + \frac{b^9}{[a]^7} \text{ etc.}$$

2 f. fulcrum. *(1)* Ergo si adjicias ad seriem ita facias: $\frac{a^3b}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3}$ etc., habebitur sector. *(2)* $\frac{a^3b}{a^2+b^2}$ L

---

3 $\frac{a^3b}{a^2+b^2}$: Leibniz schreibt auf der rechten Seite fortlaufend die Restglieder der fortgesetzten Division an.

Ergo habemus valorem sectoris ita expressum: $\dfrac{b}{\frac{1}{a}} - \dfrac{b^3}{3a} + \dfrac{b^5}{5a^3} - \dfrac{b^7}{7a^5} + \dfrac{b^9}{9a^7} - \dfrac{b^{11}}{11a^9}$ etc., seu posito $a = 1$. fiet $\dfrac{b^1}{1} - \dfrac{b^3}{3} + \dfrac{b^5}{5} - \dfrac{b^7}{7} + \dfrac{b^9}{9} - \dfrac{b^{11}}{11}$ etc.

Et segmentum, si seriem a semirectangulo per partes subtrahas, erit $\dfrac{2b^3}{3a} - \dfrac{4b^5}{5a^3} + \dfrac{6b^7}{7a^5} - \dfrac{8b^9}{9a^7}$ etc., vel omisso a, erit: $\dfrac{2}{3}b^3 - \dfrac{4}{5}b^5 + \dfrac{6}{7}b^7 - \dfrac{8}{9}b^9$ etc.

5 *b.* $\dfrac{2ab^2}{a^2 - b^2}$. $\dfrac{2a \frown \dfrac{4a^2b^4}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}}{a^2 - \dfrac{4a^2b^4}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}} = \dfrac{\dfrac{8a^3b^4}{\cdots\cdots}}{\dfrac{a^6 - 2a^4b^2 + \cancel{a^2b^4} - 3\cancel{4}a^2b^4}{\cdots\cdots}} = \dfrac{8ab^4}{a^4 - 2a^2b^2 + 3b^4}$

ita porro $\dfrac{2a \frown \dfrac{64a^2b^8}{a^8 - 4a^6b^2 + 6a^4b^4 + 4a^4b^4 - 12a^2b^6 + 9b^8}}{a^2 - \dfrac{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}} =$

$\dfrac{128ab^8}{a^8 - 4a^6b^2 + 10a^4b^4 - 12a^2b^6 + 55b^8}$.

Eaque progressio facile continuari potest fere quadrando terminum praecedentem, si tantum numerator sine a, intelligatur quadrari, productumque ejus multiplicari per $2a$. 10 Nominator vero quadretur, hac sola adhibita mutatione, ut notae ultimae, in qua b ad potestatem numeratoris ascendit numerus praefigatur qui sit differentia inter numerum maximae ipsius b. potestatis in numeratore et nominatore quadrandae fractionis, ut in sequente fiet nota b^{16} in numeratore multiplicetur per $128 - 55 = 73$.

Et quia $\begin{array}{r} 128 \\ 128 \\ \hline 1004 \\ 256 \\ 128 \\ \hline 16364 \end{array}$ $\begin{array}{r} 16364 \\ 2 \\ \hline 32728 \\ 73 \\ \hline 32675 \end{array}$ fiet in nominatore adhuc sequenti $32675b^{32}$.

8 fere ... praecedentem *erg. L*

5 $\dfrac{2ab^2}{a^2 - b^2}$: Leibniz übernimmt den fehlerhaften Wert von S. 70 Z. 6. Dieser beeinträchtigt zusammen mit weiteren Versehen die Rechnung bis Z. 14.

Appropinquationes Gregorii quarum methodum suppressit videntur fieri per differentias.

Videndum an summae iniri possint per appropinquationem: $b - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \frac{ba^4}{1} & + & \frac{b^2a^3}{2} & + & \frac{b^3a^2}{3} & + & \frac{b^4a}{4} & + & \frac{b^5}{5} & & \\ \frac{3}{1} & + & \frac{9}{2} & + & \frac{27}{3} & + & \frac{81}{4} & + & \frac{243}{5} & + & \frac{729}{6} \end{array}$$

Esto $a =$ radio[,] $\odot =$ circulo, et $\aleph$ circumferentiae, fiet: $\frac{a\aleph}{2} = \odot$. Ergo $\frac{\odot}{2a} = \frac{a\aleph}{4a} = \frac{\aleph}{4}$.

Ideo cum posita diametro $= 1 = 2a$. inventum sit esse Circulum:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \frac{2}{195} \text{ etc.} = \odot$$

Ergo $\frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} \text{ etc.}}{1} = \frac{\odot}{2a}$ erit $\frac{\aleph}{4}$.

Ergo $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ etc. $= \frac{\aleph}{8}$. et $\frac{8}{3} + \frac{8}{35} + \frac{8}{99}$ etc. $= \aleph$ Circumferentiae.

Ita Quadratura Circuli Arithmetica, sive per infinitam seriem numerorum rationalium. Id est non Mechanica quidem, quia exacta est, neque Geometrica tamen, quia nondum recta arcui aequalis exhibita est. Inventa est tamen vera circuli magnitudo, et Ratio diametri ad circum-

11 f. Circumferentiae *(1)* Magnitudo circuli et ratio diametri ad circumferentiam nunc primum *(a)* geometrice *(aa)* expressas *(bb)* expressa, sed portionibus *(b)* accurate *(c)* exacte inventa sed per seriem numerorum rationalium, infinitam *(2)* ita *L* 13 rationalium *(1)* id est non Mechanica qvidem, qvia exacta est, neqve Geometrica tamen, qvoniam |etsi *erg.*| serie infinita numerorum rationalium exprimi potest Circuli *(a)* aut Circumferentiae magnitudo, lineis *(b)* area, aut circumferentiae ratio ad diametrum, |etsi *gestr.*| summa tamen totius seriei nond *(2)* Id *L*

1 Appropinquationes: J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 5–8; vgl. dazu III, 1 N. 88_4 S. 519 f.

f e r e n t i a m accurate expressa est, infinita serie portionum Geometrice datarum rectae cujusdam datae p r o g r e s s i o n e h a r m o n i c a decrescentium scilicet.

Nam si Diameter sit $= 1$

Erit Circumferentia $= \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15}$ etc.

in infinitum.

2 datae *(1)* sive per differentiam duarum p r o g r e s s i o n i s h a r m o n i c a e *(a)* serierum *(b)* serierum *(2)* p r o g r e s s i o n e *L* 2 f. scilicet *(1)* A Numero impare sine fine continuato duplica *(2)* Ab omnium sine fine Numerorum imparium continuatorum duplicatorum *(3)* „Numeri impares in infinitum deinceps ab unitate continuati duplicentur a duplicatorum qvadratis unitas auferatur, *(a)* Residua sint Numeratores *(b)* Residui sunto Nominatores fractionum qvarum Numerator unitas; *(aa)* si pos *(bb)* erit harum fractionum *(cc)* jam si qva mensura semel sumta aeqvivaleat d i a m e t r o ; *(aaa)* ejusdem *(bbb)* tunc portionum ejusdem mensurae secundum has fractiones in infinitum assumtarum summa aeqvabitur o c t a n t i p e r i p h e r i a e *Dazu Nebenbetrachtung, nicht gestr.:*

1	3	5	7
2	6	10	14
4	36	100	196
3	35	99	195

(4) | Nam *erg.* | si *L*

5. LA RAISON DU DIAMÈTRE À LA CIRCONFERENCE DU CERCLE [September – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 122–123. 1 Bog. 4°. Die untere Hälfte von Bl. 123 ist abgetrennt. 1 S. auf Bl. 123 v°. Auf dem Rest des Bogens VII, 5 N. 10 u. Cc 2, Nr. 842 (Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 843

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Anfang September bis November 1674 belegt. Das vorliegende Stück enthält Vorüberlegungen zur franz. Fassung der Abhandlung zur Kreisquadratur, die Leibniz im Oktober 1674 an Huygens gab (vgl. III, 1 N. 39_2, insbesondere den Titel auf S. 154 und prop. X S. 165 f.). Den falschen Wert 4 in S. 76 Z. 1 verwendet Leibniz auch in N. 7, dort korrigiert er den Fehler jedoch. Außerdem verweist er in N. 7 vermutlich auf N. 5, so dass N. 5 wahrscheinlich vor N. 7 entstanden ist.

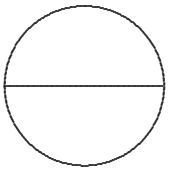
1.	3.	5.	7.	9
2	6	10	14	18
4	36	100	196	
3	35	99	195	etc.

1	1	
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
6	21	56

1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$
etc.	etc.

1	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
etc.	$\frac{1}{35}$

$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	
	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	etc.



comme 1 est à 4 fois $\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195} \quad \text{etc.}}$

$$\frac{1}{4-1} \quad \frac{1}{36-1} \quad \frac{1}{100-1} \quad \frac{1}{196-1}$$

$$2 \qquad 6 \qquad 10 \qquad 14$$

$$4 \qquad 4 \qquad 4$$

$$\boxed{\frac{1}{4-1}} \quad \frac{1}{9-1} \quad \frac{1}{16-1} \quad \frac{1}{25-1} \quad \boxed{\frac{1}{36-1}} \text{ etc. } \sqcap \frac{3}{4}$$

$$2 \qquad 3$$

1 4: Richtig wäre 8; vgl. N. 7 S. 89 Z. 25 – S. 90 Z. 1 sowie III, 1 N. 39_2 S. 165 f. 5 $\sqcap \frac{3}{4}$: vgl. N. 7 S. 90 Z. 18–22.

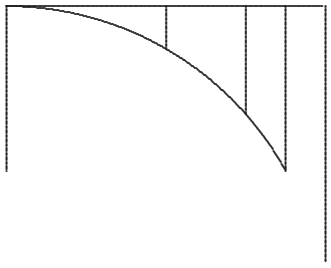
6. ACCESSIONES MEMORABILES AD ARITHMETICAM INFINITORUM

[10. September – Oktober 1674 u. November 1675 – Herbst 1676]

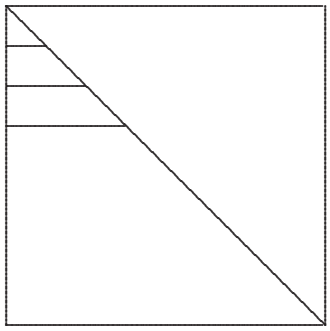
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 115. 1 Bl. 2°. Ca. $1\frac{1}{2}$ S. Teil 1 und 3 in der Mitte von Bl. 115 r°, Teil 2 auf Bl. 115 v°. Auf dem Rest von Bl. 115 r° VII, 1 N. 74. Teil 1 wurde nach Teil 1 von VII, 1 N. 74 und vor Teil 2 von VII, 1 N. 74 auf Bl. 115 r° geschrieben, Teil 3 in die frei gebliebenen Lücken. Auf Bl. 115 v° oben Rechnungen ohne direkten Textbezug (S. 84 Z. 2–7), vor Teil 2 geschrieben.
Cc 2, Nr. 1519

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum September 1674 bis Januar 1675 belegt. N. 6 ist nach Teil 1 von VII, 1 N. 74 geschrieben worden, dieser wiederum nach dem auf den 10. September 1674 datierten VII, 1 N. 72. Teil 1 von N. 6 ist wohl vor N. 7 entstanden, das eine Bemerkung daraus aufgreift. Die Näherungsrechnung in Teil 2 verwendet die Kreisreihe für den Kreis mit Radius 1, wie am Ende von N. 4 und in III, 1 N. 39_2, S. 154 u. 165, und dürfte kurz nach Teil 1 verfasst sein. Der später ergänzte Teil 3 ist wohl in der Zeit von November 1675 bis Herbst 1676 geschrieben worden, wie die Verwendung des Integralzeichens zeigt.

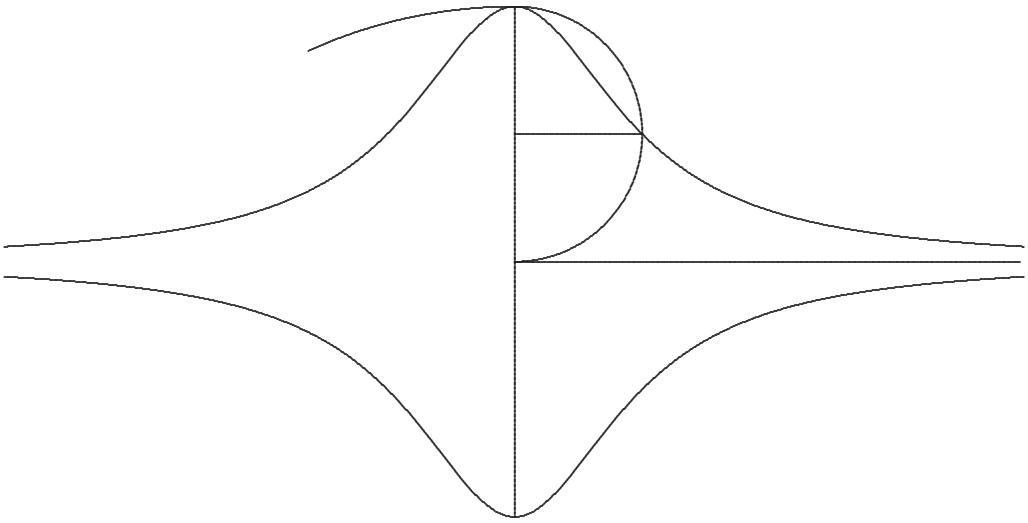
[*Teil 1*]



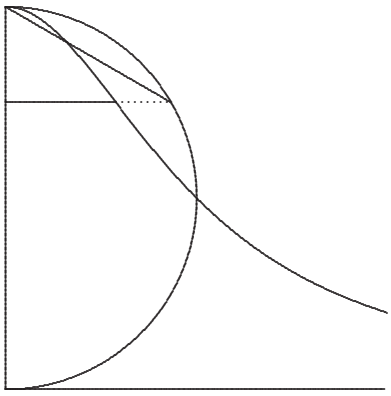
[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3a*]



[*Fig. 3b*]

Omnes qui hactenus circulum Geometrice quadrare conati sunt, ne aditum quidem ad hoc problema aperuerunt.

3 f. Omnes . . . aperuerunt: vgl. N. 7 S. 89 Z. 14 f.

[*Teil 2*]

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & \text{etc.} & \end{array} \quad \text{etc.}$$

Radio existente 1(00)

Erit circumferentia: $\underbrace{\frac{4}{1}(00) - \frac{4}{3}(00)} + \underbrace{\frac{4}{5}(00) - \frac{4}{7}} + \underbrace{\frac{4}{9} - \frac{4}{11}}$ 5

$$\begin{array}{rl} 1\ 0\ 0 & 3\ 1\ 4 \\ 1\ 0\ 0\ 0 & 3\ 1\ 4\ 1 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 & 3\ 1\ 4\ 1\ 5 \\ 1.\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & \boxed{3\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2} \end{array}$$

5 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rr} 35 & 105 \\ 315 & 945 \\ \underline{315} & \underline{945} \\ 3465 & 10395 \end{array}$$

5 $\underbrace{\frac{4}{1}(00) - \frac{4}{3}(00)} \ldots + \underbrace{\frac{4}{9} - \frac{4}{11}}$ *gestr. L, erg. Hrsg.*

4 Radio: Richtig wäre diametro; vgl. N. 7 S. 89 Z. 24 f.

4000000		3252368		3200333	
1333333	$-\frac{1}{3}$	210526	−19	114285	−35
2666667		3041842		3086048	
80000	+5	190476	+21	108108	+37
346666		3232318		3194156	
571428	−7	173913	−23	102564	−39
2895239		3058405		3091592	
444444	+9	160000	+25	97560	+41
3339683		3218405		3189152	
363636	[−11]	148148	−27	93023	−43
2976047		3070257		3096129	
307693	[+13]	137896	+29	88888	+45
3283740		3208153		3185017	
266666	−15	129032	−31	85106	−47
3017074		3079121		3099911	
235294	+17	121212	+33	81632	+49
3252368		3200333		3181543	
				78431	−51
				3103112	

1–19 *Nebenrechnungen und Nebenbetrachtungen:*

Zu Z. 3 l. Spalte – Z. 7 m. Spalte: 266
289
297
301
304
305

4 +5: Leibniz kennzeichnet die Summanden bzw. Subtrahenden mit dem Vorzeichen und dem Nenner des Glieds der Kreisreihe. 12 307693: Richtig wäre 307692. Zusammen mit weiteren Versehen beeinträchtigt der Fehler die beiden letzten Stellen des Ergebnisses der Näherungsrechnung.

80,1–19 *Zu S. 80 Z. 10 l. Spalte:*

```
   747
4000000(363636
```

```
   747
4000000
 363636
 3076..
```

Zu S. 80 Z. 12 l. Spalte:

```
     1
  1  ∅23
4000000(307693
```

Zu S. 80 Z. 14 l. Spalte:

```
4000000(266666
15
100
 15
  100
```

Zu S. 80 Z. 16 l. Spalte:

```
4000000(235294
17
 60
 17
  90
  17
   50
   17
   160
    17
     70
```

Zu S. 80 Z. 2 m. Spalte:

```
4000000(210526
19
 20
  100
   19
    50
    19
    120
     19
      60
```

80,1–19 *Zu S. 80 Z. 4 m. Spalte:*

```
4000000(190476
21
190
 21
   100
    21
     160
      21
       130
        21
```

Zu S. 80 Z. 6 m. Spalte:

```
4000000(173913
23
170
 23
   90
   23
   210
    23
      30
        70
        23
```

Zu S. 80 Z. 8 m. Spalte:

```
4000000
 800000
 160000
```

Zu S. 80 Z. 9 m. Spalte:

```
3218405
3058405
6276810
3138405
```

Zu S. 80 Z. 10 m. Spalte:

```
 2  12
156256
2324324
4000000 ⊦ 148148
2777777
 22222
```

Zu S. 80 Z. 12 m. Spalte:

```
  11
 22211
159007
2136896
4000000 ⊦ 137896
2999999
 22222
```

80,1–19 *Zu S. 80 Z. 14 m. Spalte:*

2
31 1
1981178
4000000 ∸ 129032
3111111
33333

Zu S. 80 Z. 16 m. Spalte:

11111
1747474
4000000 ∸ 121212
3333333
33333

Zu S. 80 Z. 2 r. Spalte:

11
23322
1554655
4000000 ∸ 114285
3555555
33333

Zu S. 80 Z. 4 r. Spalte:

1
1364364
4000000 ∸ 108108
3777777
33333

Zu S. 80 Z. 6 r. Spalte:

21
2774
1142564
4000000 ∸ 102564
3999999
33333

Zu S. 80 Z. 8 m. Spalte:

2
3321
4134
4000000 ∸ 97560
4111111
4444

Zu S. 80 Z. 10 r. Spalte:

1
11 12
431241
4000000 ∸ 93023
433333
4444

Zu S. 80 Z. 12 r. Spalte:

44444
88888
4000000 ∸ 88888
455555
4444

[*Rechnungen ohne direkten Bezug zum Text*]

877	424	864	376
132	216	4	376
745	2544	[3]456	2256
	15264		2632
	91584		1128
			151376

80,1–19 *Zu S. 80 Z. 14 r. Spalte:*

$$\begin{array}{l} \cancel{2}\ \ \cancel{1}\ \ 1 \\ \cancel{8}\,\cancel{4}\,\cancel{5}\,\cancel{3}\,\cancel{6}\,8 \\ \cancel{4}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{-}\,8\,5\,1\,0\,6 \\ \cancel{4}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,\cancel{7} \\ \cancel{4}\,\cancel{4}\,\cancel{4}\,\cancel{4} \end{array}$$

Zu S. 80 Z. 16 r. Spalte:

$$\begin{array}{l} \cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,3 \\ \cancel{4}\,\cancel{7}\,\cancel{4}\,\cancel{5} \\ \cancel{8}\,\cancel{8}\,\cancel{1}\,\cancel{6}\,\cancel{3}\,2 \\ \cancel{4}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{-}\,8\,1\,6\,3\,2 \\ \cancel{4}\,\cancel{9}\,\cancel{9}\,\cancel{9}\,\cancel{9}\,\cancel{9} \\ \cancel{4}\,\cancel{4}\,\cancel{4}\,\cancel{4} \end{array}$$

Zu S. 80 Z. 18 r. Spalte:

$$\begin{array}{l} \qquad\quad 1 \\ \cancel{4}\,\cancel{2}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{2} \\ \cancel{5}\,\cancel{3}\,\cancel{2}\,\cancel{6}\,\cancel{7}\,9 \\ \cancel{4}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{-}\,7\,8\,4\,3\,1 \\ \cancel{5}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1} \\ \cancel{5}\,\cancel{5}\,\cancel{5}\,\cancel{5} \end{array}$$

Neben S. 80 Z. 19: NB.

7 151376: Richtig wäre 141376.

[*Teil 3*]

Accessiones memorabiles ad Arithmeticam infinitorum

$\frac{y^2}{a^2+y^2}$. ex quad. Circ. Item $\frac{y^2}{\boxed{2}\overline{a^2+y^2}}$. Item $\boxed{2}\frac{y^2}{a^2+y^2}$.

$\frac{y^2}{a^2-y^2}$ ex quad. Hyp. Item $\frac{y^3}{a^2+y^2}$. Ergo $\frac{a^2y^2+y^4+a^2y^3-y^5}{a^4-y^4}$ $\odot$ ex quad. Hyp. Item $\frac{a^2}{a^2-y^2}$. Ergo et $\frac{a^4+y^2a^2+a^2y^3-y^5}{a^4-y^4}$ $\supset$. 5

$\frac{y^4+\psi y^2+\varphi a^2}{\boxed{2}a^2+y^2}$ ex quad. Circ.

$\frac{y}{a^2+y^2}$ pendet ex quad. Hyp. quia est momentum Circularis Rationalis ex vertice, quod scimus haberi ex quad. Hyp.

Quia $\frac{1}{1+y^2}$ ex circulo ergo etiam $\frac{1}{1+y^2}+y^2-1$ ex circulo.

Ergo $\frac{1,+y^4-1}{1+y^2}$ $\sqcap$ $\frac{y^4}{1+y^2}$ ex circulo. Eodem modo $\frac{y^4}{1-y^2}$ ex Hyperbola et $\frac{y^2}{1+y^2}+$ 10 y^4-y^2 $\sqcap$ $\frac{\boxed{y^2}+y^6\boxed{-y^2}}{1+y^2}$.

Ergo generaliter figurae quarum ordinatae sunt $\frac{y^0}{1+y^2}$ $\frac{y^2}{1+y^2}$ $\frac{y^4}{1+y^2}$ $\frac{y^6}{1+y^2}$ et aliae quaelibet in infinitum, in quibus y dimensionum parium in numeratore, et denomi-

2 Accessiones ... infinitorum *erg. L* 5 f. $\supset$ *(1)* Ergo et $\frac{y^4}{a^4-y^4}$, vel etiam $\frac{y^4}{y^4-a^4}$ ex qvad. Hyp. vel etiam $\frac{a^4}{a^4-y^4}$ *(a)* addendo $\odot$ et $\supset$, erit et *(b)* auferendo a se invicem $\odot$ et $\supset$. erit et *(aa)* a^2y^2 *(bb)* $a^4+y^2a^2+a^2y^3-y^5-a^2y^2-y^4-a^2y^3+y^5$ $\sqcap$ $\frac{a^4-y^4}{a^4-y^4}$ $\sqcap$ 1. *(aaa)* nondum ergo sci *(bbb)* $\frac{y^3}{a^2-y^2}$ habetur etiam ex qvad. Hyp. qvia momentum $\frac{y^2}{a^2-y^2}$ ex aliqvo vertice. *(aaaa)* Ergo *(bbbb)* auferatur ab $\frac{ay^2}{a^2-y^2}$, fiet $\frac{ay^2-y^3}{a^2-y^2}$ $\sqcap$ $\frac{y^2}{a+y}$ ad Hyperbolam. multi *(2)* $\frac{y^4+\psi y^2+\varphi a^2}{\boxed{2}a^2+y^2}$ *L*

nator, $1+y^2$ haberi possunt ex quad. Circuli, at: $\frac{y}{1+y^2}$ $\frac{y^3}{1+y^2}$ $\frac{y^5}{1+y^2}$ $\frac{y^7}{1+y^2}$ etc. ex quad. Hyp. Si vero sit denominator $\dagger 1 \dagger y^2$ semper habebitur ex quad. Hyp.

Sit $\frac{1}{1+y^3} \sqcap z \sqcap \frac{1}{1-y+y^2 \frown 1+y} \sqcap \frac{y}{y+y^4}$. Si ad $\frac{1}{1+y^3}$ addatur $\frac{+y+y^2}{1+y^3}$ fiet $\frac{1}{1-y}$ at $\frac{y+y^2}{1+y^3} \sqcap \frac{y}{1-y+y^2}$.

Generaliter: $\frac{by^v}{1+y^2} \sqcap z$. Ergo $t + y^2 t \sqcap bvy^v - 2y^2 z \sqcap bvy^v - \frac{2y^{2+v}}{1+y^2} \sqcap bvy^v + bvy^{v+2} - 2y^{2+v}$ et faciendo $bv \sqcap 2$. seu $b \sqcap \frac{2}{v}$ fiet: $t \sqcap \frac{2y^v}{\boxed{2}\overline{1+y^2}}$ quae si numerus v est par pendebunt ex quadratura Circuli, sin impar ex quadratura Hyperbolae. Sive vero sit par sive impar modo denominator non sit $1+y^2$ vel $\boxed{2}\overline{1+y^2}$ seu $1-y^2$, sive y^2-1. aut horum $\boxed{2}$ pendebit figura ex Hyperbola. Sed quoniam b. arbitraria fuit, et ita etiam sumi poterit, ut nulla sequeretur destructio, hinc patet potuisse relinqui, et tunc semper ex data figura $\frac{by^v}{1+y^2}$ haberi et $\frac{bvy^{v+2}}{\boxed{2}1+y^2}$. quod rursus praeberet theoremata, nisi ea jam in prioribus continerentur. Potest tamen servire ad probam.

$\frac{1}{1+y} + y - 1 \sqcap \frac{1+y^2-1}{1+y} \sqcap \frac{y^2}{1+y}$. Eodem modo generaliter $\frac{y^z}{1+y}$ vel $\frac{y^z}{\dagger 1 \dagger y}$ ex quad. Hyp. cumque uniuscujusque momentum ex vertice detur, per quad. Hyp. multiplicando per y ideo et quadrata ordinatarum dabuntur ex quad. Hyp. sive dabitur: $\frac{y^{2z}}{\boxed{2} \dagger 1 \dagger y}$ unde ope imaginariarum exponentium habebuntur et $\frac{y^z}{\boxed{2}[\dagger]1 \dagger y}$.

$\frac{1}{y^2+y}$ ex quad. Hyp. Ergo et $\frac{1}{y^3-y}$ aliaque idgenus in infinitum.

---

3 fiet: Richtig wäre $\frac{1+y+y^2}{1-y^3} = \frac{1}{1-y}$. 5 $-\frac{2y^{2+v}}{1+y^2}$: Leibniz vergisst den Faktor b im Zähler. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit einem weiteren Versehen die Überlegung bis Z. 11. 7 impar: Die Aussage gilt nicht für $v = 1$.

$$\int \frac{y}{1+y^2} \sqcap \int \overline{y - y^3 + y^5 - y^7 + y^9 - y^{11}}$$
$$\sqcap \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}$$
$$\sqcap 2 \frown \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} .$$

Ergo $\int \frac{y}{1+y^2} \sqcap 2 \int \left[\frac{1}{1+y}\right]$. $\int \frac{1}{1+y} \sqcap [\int] 1 - \int y + \int y^2 - \int y^3 + \int y^4$

$$\sqcap 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{y}{1+y^2} \sqcap \int \overline{y - y^3 + y^5 - y^7 + y^9 - y^{11}}$$
$$\frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^6}{6a^4} - \frac{b^8}{8a^6} \quad \text{etc.}$$
$$\int \frac{1}{1+y} \sqcap \int \overline{1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5}$$
$$\sqcap \frac{ba}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3a} - \frac{b^4}{4a^2} \quad \text{etc.}$$

Ubi patet Mercatoris methodo reperiri tantum posse in toto, quod $\int \frac{y}{1+y^2}$ dimidia $\int \frac{1}{1+y}$ non vero in partibus.

11 f. dimidia $\int$ *(1)* $\frac{\mathrm{y}}{1+\mathrm{y}^2}$ *(2)* | $\frac{\mathrm{y}}{1+\mathrm{y}}$ *ändert Hrsg.* | non *L*

3 $\sqcap 2 \frown$: Richtig wäre der Faktor $\frac{1}{2}$. Leibniz übernimmt den falschen Wert in die folgende Gleichung, hat aber in Z. 11 f. die richtige Aussage.

7. LA QUADRATURE DU CERCLE PAR UNE PROGRESSION RATIONELLE

[10. September – Oktober 1674]

Überlieferung:

L Konzept: LH 35 XI 4 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 1. (Unsere Druckvorlage.)

l Reinschrift: LH 35 XI 4 Bl. 3. 1 Bl. 2°. $1\frac{1}{3}$ S. Geringe Textverluste durch Randschäden. Cc 2, Nr. 794 A, B

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum September 1674 bis Januar 1675 belegt. N. 7 ist wahrscheinlich nach N. 5 u. N. 6 und vor VII, 3 N. 38_2 sowie vor III, 1 N. 39_2, beide von Oktober 1674, entstanden. Es gibt inhaltliche Gemeinsamkeiten mit der vom Herausgeber auf Oktober 1674 datierten Mitteilung III, 1 N. 38_2.

La Geometrie qui passe les Elements se peut diviser commodement, en deux Especes, sçavoir celle d'Apollonius, et celle d'Archimede, dont l'une a esté resuscitée par Viete et des Cartes, l'autre par Guldin, Cavalieri, et le Pere Gregoire de S. Vincent. Celle d'Apollonius traite des P r o b l e m e s r e c t i l i g n e s , en donnant la determination de quelques lignes droites demandées par l'intersection des courbes ou lieux appropriez, ce qui se connoist par le moyen des Equations rendues aussi simples que faire se peut. Mais quoyque elle ait besoin de la description des Courbes, elle n'en cherche ny suppose pourtant pas la dimension. La Geometrie d'Archimede au contraire cherche la dimension des Courbes, des Lignes aussi bien que des Surfaces ou Solides, dont les Centres de Gravité dependent. Or tous ces p r o b l e m e s c u r v i l i g n e s , ne dependent d'aucune Equation, et par consequent ils sont ny plans, ny solides, ny sursolides, mais si vous voulez de l'infinitesiême degrez. D'ou vient que Mons. des Cartes n'y a jamais voulu toucher, et qu'il a pris même la dimension des lignes courbes pour impossible, comme il dit en termes formels, dans sa *Geometrie*, quoyque le contraire se soit trouvé apres.

Mais quoyque les E q u a t i o n s nous abandonnent en cette rencontre, la Nature des choses n'a pas laissé pourtant de nous fournir un autre moyen, sçavoir les

13 est resuscitée *l*

24 f. il dit: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39.

P r o g r e s s i o n s. Car comme les Problemes rectilignes, se reduisent au calcul et aux nombres par les Equations; de même la difficulté des Curvilignes est transferée de la Geometrie à l'Arithmetique par les progressions. Et comme nous tachons d'oster les signes radicaux, des Equations; de même faut il tacher de trouver une Progression de Nombres rationaux; et quand la progression des ordonnées de la figure est irrationelle; il la faut changer en une autre figure Equivalente, dont les ordonnées soient rationelles aux abscisses. Il est vray qu'il y a certaines methodes des Quadratures, purement Geometriques, qui dependent de la Transformation ou Transposition, des parties: finies, comme il arrive dans la Quadrature de la Lunule d'Hippocrate; ou innumerables infiniment petites, comme il arrive dans la Quadrature de toutes les figures dans les quelles les abscisses ont une certaine raison constante, aux intervalles des ordonnées et tangentes, pris dans l'axe.

Mais toutes ces methodes sont particulieres et nous abandonnent au besoin: car en effect tous les essays se sont trouvés inutiles jusques icy, estant appliqués au cercle.

J'ose dire, que tant s'en faut que ceux qui ont cherché la Quadrature exacte du Cercle ayant avancé considerablement, qu'ils n'ont même donné aucune ouverture, ny moyen d'y arriver. Car les Transpositions ayant esté essayées inutilement on chercha des progressions à la verité, mais on n'en a pas trouvé jusques icy des regulieres et encor moins des rationelles, qui satisfassent; la progression des polygones estant tout à fait intraitable; outre qu'elle ne fournit pas mêmes aucune progression dont l a s o m m e soit égale au cercle, non plus que la belle approximation de Monsieur Wallis par nombres rationaux.

J'ay eu le bonheur enfin d'en trouver une, qui n'est pas seulement rationelle, mais même aussi simple et aussi reguliere, qu'on la puisse pretendre; ayant decouvert apres un grand detour de raisonnements, que le Diametre estant 1, la Circomference est, 4 fois: $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. c'est à dire 8 fois: $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ etc., ou 8 fois $\frac{1}{4-1} +$

25 dire *(1)* 4 *(2)* 8 fois L 25 ou | 8 fois *erg.* | $\frac{1}{4-1}$ L

14 f. J'ose ... ouverture: vgl. N. 6 S. 78 Z. 3 f. 20 approximation: s. J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191, S. 178–182 (*WO* I S. 467–469). 22 une: vgl. N. 1. 25 8 fois: Leibniz verwendet zuerst den falschen Wert 4 wie in N. 5 S. 76 Z. 1 und verbessert dann (vgl. die zugehörige Lesart).

$\frac{1}{36-1}+\frac{1}{100-1}$ etc. Il s'ensuit de la, que la circomference est egale à la difference entre deux progressions harmoniques, $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$ etc., et $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}$ etc.

Or il y a grande apparence que les sommes de ces progressions se pourront donner à la fin; car je puis donner déja la somme de la progression de toutes les fractions Triangulaires, de même que des Pyramido-Pyramidales, Triangulo-Triangulaires. Mons. Huguens m'ayant proposé du temps passé de chercher la somme de cette progression des fractions Triangulaires, sçavoir: $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ etc. Je ne la trouvay pas seulement égale à 2. comme il avoit trouvé devant moy; mais je donnay en meme temps par une regle generale les sommes de toutes les autres progressions des fractions de cette nature, dont les nominateurs vont en progressions Arithmetique repliquée, sçavoir

1	2	3	4	5	6		
1	3	6	10	15	21	etc.	Triangulaires
1	4	10	20	35	56	etc.	Pyramidaux,
1	5	15	35	70	126	etc.	Triangulo-Triangulaires;
1	6	21	56	126	252	etc.	Triangulo-Pyramidaux.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Il y a une infinité d'autres progressions fort simples et fort regulieres dont j'ay la somme; je me souviens mêmes d'avoir donné la somme de cette progression:

$$\frac{1}{1}+\underset{\bullet}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\underset{\bullet}{\frac{1}{35}}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\underset{\bullet}{\frac{1}{99}}\text{ etc.}$$

dont les termes pointés $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. à l'infini laissant tousjours trois autres entre deux font la progression de la quelle dépend la Quadrature. Mais je ne puis pas a present trouver sur le champ le billet sur le quel j'avois mis cette observation.

17 f. dont ... somme *erg. L*

4 la somme: vgl. VII, 3 N. 2 S. 13. 6 proposé: vgl. VII, 3 N. 1 S. 3 u. VII, 3 N. 36 S. 365. 8 trouvé: vgl. *HO* XIV S. 144–150. 8 donnay: vgl. VII, 3 N. 2. 18 la somme: vgl. VII, 3 N. 15 S. 181. 22 billet: Gemeint ist wohl N. 5, wo die beiden Reihen zusammen auftreten (vgl. auch VII, 3 N. 31 S. 345). Die ausführliche Tabelle in VII, 3 N. 38_2 S. 386, dat. Oktober 1674, dürfte etwas später enstanden sein.

Enfin je crois que ceux qui entendent la matiere demeureront d'accord que c'est peut estre le premier Moyen, qu'on ait donné pour arriver à la Quadrature Geometrique du Cercle; et que même la moitié du chemin estant faite, il y a grande apparence, si elle se trouvera jamais, que ce sera par cette voye. Au reste quoyque j'avoue d'avoir profité en cette matiere des Écrits des Geometres de nostre temps, et sur tout des Messieurs Huguens, Roberval, Wallis et Mercator, j'espere neantmoins d'avoir adjouté du mien quelque chose d'assez considerable, en mêlant un peu de bonheur avec beaucoup de diligence.

4–8 Au ... Huguens, | Roberval, *erg.* | Wallis ... diligence *erg. L, fehlt l*

4–8 Au ... diligence: vgl. die ausführlichere Darstellung in III, 1 N. 39_2 S. 168 f.

8. REDUCTIO CIRCULI AD FIGURAM RATIONALEM AEQUIVALENTEM [Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 83–84. 1 Bog. 2°. 4 S. Geringe Textverluste durch Papierschäden. — Gedr. (ohne Lesarten): III, 1 N. 39_1 S. 142–153.
Cc 2, Nr. 773_1

Datierungsgründe: N. 8 diente als Vorlage für eine franz. Ausarbeitung (III, 1 N. 39_2), die Leibniz an Huygens gab und von diesem mit einem Begleitschreiben vom 6. November 1674 (III, 1 N. 40) zurück erhielt. Im vorliegenden Stück bezieht sich Leibniz auf das von ihm auf den 3. Oktober 1674 datierte *Schediasma de superficiebus Conoeidum* (VII, 5 N. 6).

Reductio Circuli ad Figuram Rationalem aequivalentem

Defin. 1. F i g u r a m R a t i o n a l e m voco, cujus abscissae sunt rationales ad ordinatas, vel ordinatae ad abscissas, id est quae aequatione exprimi possunt, in qua unius incognitae valor purus simplexque est.

Def. 2. F i g u r a s s y n t o m o s voco, quarum portiones portionibus continue aequantur.

Prop. I.

„Ut sinus versus est ad rectum, ita tangens arcus dimidii ad radium.

Centro C, sit arcus circuli descriptus AFB, cujus dimidius AF, ejusque tangens AD. Jungatur BD, in quam si opus est productam, agatur perpendicularis AO, porro ipsius Arcus AB sinus versus est AE, et sinus rectus EB. Ajo esse AD ad CA, uti AE ad EB.

Nam cum AD et EB, item AO, et CB sint parallelae, Triangula Rectangula AOD, et EBC, similia erunt, adeoque AO ad EB, ut AD ad CB. Jam AO aequalis ipsi AE,

14 F i g u r a s *(1)* a e q v i v a l e n t e s *(2)* s y n t o m o s *L*

14 s y n t o m o s : Leibniz ersetzt punktuell aequivalens durch syntomos. 16 Prop. I.: vgl. III, 1 N. 39_2 S. 154 Z. 8 – S. 155 Z. 4.

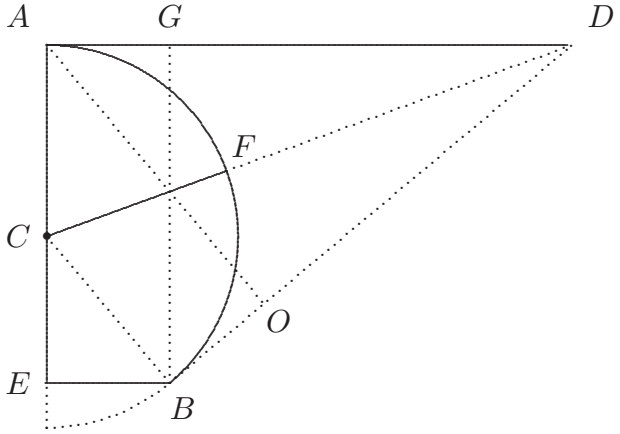


fig. 1

(: est enim AO aequalis ipsi BG, et BG ipsi AE :). Ergo AE ad EB ut AD ad CB, vel ut AD ad AC. Quod erat ostendendum. In Terminis Analyticis, sinu verso posito x, et radio a, constat sinum rectum esse $\sqrt{2ax - x^2}$, et Tangente arcus dimidii appellata y fiet:

$$\frac{y}{a} \sqcap \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}, \text{ sive } y \sqcap \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Prop. II.

„Si Tangens arcus dimidii, appelletur y, et sinus versus arcus dati, x, et Radius, a, „fiet: $x \sqcap \dfrac{2ay^2}{a^2 + y^2}$.

Nam sinu verso posito x, erit sinus rectus $\sqrt{2ax - x^2}$. Erit ergo: $\dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} \sqcap \dfrac{a}{y}$. Ergo Tangens arcus dimidii sive $y \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$ per prop. I. Ergo $2axy^2 - x^2y^2 \sqcap a^2x^2$, sive $2ay^2 - xy^2 \sqcap a^2x$ et denique $x \sqcap \dfrac{2ay^2}{a^2 + y^2}$.

3–6 In ... y $\sqcap \dfrac{\text{ax}}{\sqrt{2\text{ax} - \text{x}^2}}$ *erg. L* 11 Ergo Tangens ... prop. I. *erg. L*

7 Prop. II.: vgl. *a. a. O.*, S. 155 Z. 4–7.

Unde corollarium sequitur satis memorabile: nempe si Tangens arcus sit radio commensurabilis, sinum versum arcus dupli, commensurabilem quoque ipsis fore; sive data in numeris tangente arcus Circuli, et radio, etiam sinum versum arcus dupli, ac proinde et sinum complementi ejus in numeris rationalibus haberi posse. Idque non est minus memorabile, ac illud a Clarissimo Pellio observatum, quod Tangente aliqua posita rationali, etiam Tangens arcus dupli sit rationalis, nam Tangente appellata y, et tangente arcus dupli z, fiet $z \sqcap \dfrac{2a^2y}{a^2-y^2}$. Unde jungendo haec duo theoremata inter se, patet Tangente posita rationali, arcus dupli tam tangentem quam sagittam sive sinum versum fore rationales. Sed quod de sinu verso nunc invenimus, ab eo inprimis aestimandum est, quod viam nobis aperuit ad figuram rationalem circulo aequivalentem inveniendam.

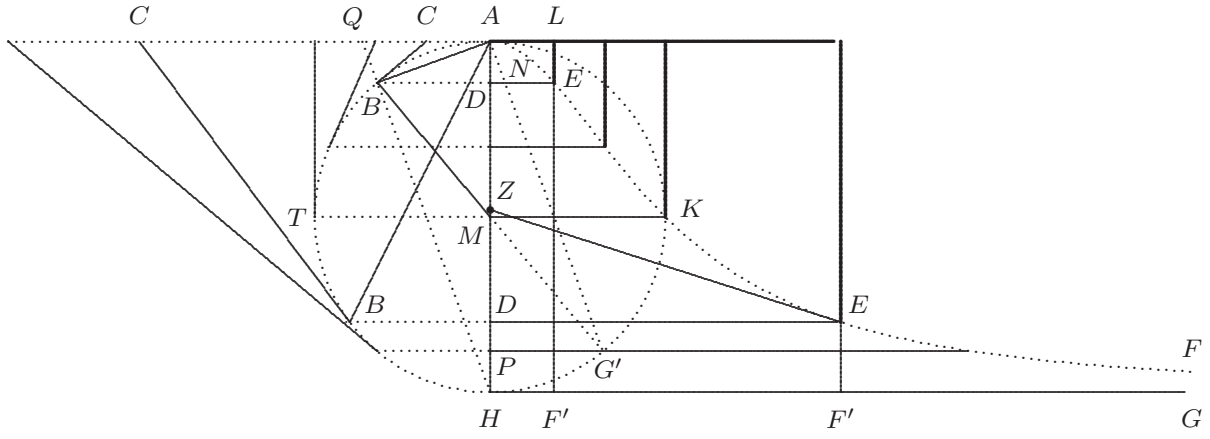
D e f i n i t i o 3. F i g u r a m S e g m e n t o r u m voco quae constituitur, ex tangentibus arcuum dimidiorum Diametro circuli ita ordinatim applicatis, ut sinubus rectis arcuum integrorum in directum jaceant, quemadmodum in fig. 2 arcus, AB, dimidiati tangentem AC, translatam videmus in DE, sive diametro AH, ita applicatam, ut sinui recto BD arcus ipsius integri AB, in directum jaceat. Unde fit figura AEF, quae procurrit in infinitum versus F et ad rectam HG, tangentem circuli, in infinitum accedit, ita tamen ut eam nunquam attingat, quare recta HG, quam velut applicatarum ejus maximam considerare possis, est ipsi asymptotos.

Voco autem Figuram Segmentorum, quia postea ostendam portiones ab ea abscissas, ut ADE perpetuo segmentis circuli respondentibus ABA duplicatis aequivalere. Quam

---

7 *Nebenbetrachtung:* $a^2z - y^2z \sqcap 2a^2y$. vel $y^2 + \dfrac{2a^2}{z}y + \dfrac{a^4}{z^2} \sqcap \dfrac{a^4+a^2z^2}{z^2}$ et $y \sqcap \dfrac{a\sqrt{a^2+z^2}-a^2}{z}$.

1–10 Unde ... inveniendam: vgl. *a. a. O.* S. 155 Z. 7 f. 5 observatum: J. Pell, *Controversiae de vera circuli mensura* pars prima, 1647, S. 13. Leibniz hat den Satz aus Fr. van Schooten, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus ex calculo algebraico*, 1661, *DGS* II S. 368, wo auf Pell verwiesen wird; vgl. VII, 4 N. 22 S. 394. 11–95,12 Definitio ... habetur: vgl. III, 1 N. 39_2 S. 155 Z. 9 – S. 156 Z. 12.



[*Fig. 2*]

figuram a Geometris non consideratam miror, cum Cissoeide pariter et Conchoeide simplicior sit; et habeat hoc egregium, ut posita AL ordinata, ad Axem vel diametrum, sive AL, abscissa ex tangente verticis; rationali: etiam AD, abscissa ex diametro vel Axe, sive LE applicata ad Tangentem verticis futura sit rationalis. Quod breviter sic ostendo:

Prop. 3.

„Figura quam voco Segmentorum est rationalis.

Posita enim AD, sive LE[,] x, et DE sive AL, y, fiet: $x \sqcap \dfrac{2ay^2}{a^2+y^2}$ per prop. 2. Est enim per constructionem sive definitionem figurae segmentorum, AD vel LE, sinus versus arcus integri, et DE sive AL, tangens arcus dimidii. Figura autem omnis rationalis a me appellatur, vide def. 1, in cujus aequatione unius incognitarum valor simplex purusque habetur.

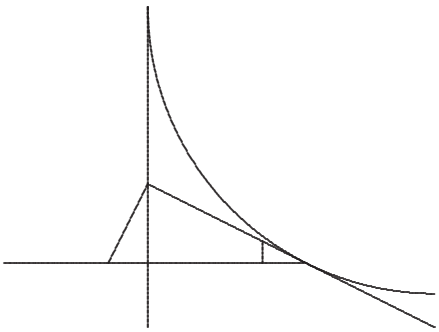
11 def. 2. *L ändert Hrsg.*

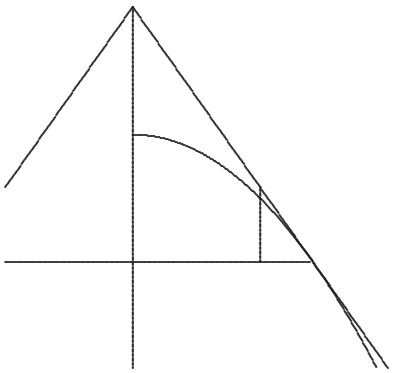
1 *Fig. 2*: Leibniz hat für die Punkte auf der Grundlinie zwischen H und G in der Figur und im zugehörigen Text ursprünglich die Bezeichnung Z verwendet und dann nicht überall zu F geändert. Zur Vermeidung von Verwechslungen werden diese Punkte mit F' bezeichnet, außerdem ein Punkt G auf der Kreisperipherie mit G'. 2 non consideratam: Eine solche Kurve verwendet bereits J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, 1668, prop. VI, S. 23 f. Vgl. die Erl. zu III, 1 N. 39_2 S. 155 Z. 9 – S. 156 Z. 12 u. zu III, 1 N. 40.

Habeatne flexum in contrarium, ita investigabimus: Aequatio ejus est: $a^2x + xy^2 \sqcap 2ay^2$, unde: $a^2l + ly^2 \sqcap 4ay^2 - 2xy^2$, ac proinde $l \sqcap \dfrac{4ay^2 - 2xy^2}{a^2 + y^2}$, et pro x posito ejus valore, fiet: $l \sqcap \dfrac{4ay^2 - \dfrac{4ay^4}{a^2 + y^2}}{a^2 + y^2}$, sive: $l \sqcap \dfrac{4a^3y^2 \boxed{+4ay^4 - 4ay^4}}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}$, sive $l \sqcap \dfrac{4a^3y^2}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}$,

---

1 f. *Nebenbetrachtung:* $a^2x + xy^2 \sqcap 2ay^2 - xy^2$. $a^2l + ly^2 \sqcap 4ay^2 - 2xy^2$ vel $l \sqcap \dfrac{4ay^2 - 2xy^2}{a^2 + y^2}$. Pro y^2 pone ejus valorem, fiet $l \sqcap \dfrac{\cancel{2}\boxed{4a - 2x}, \frown \dfrac{\cancel{a^2}x}{\boxed{2a - x}}}{a^2 + \dfrac{a^2x}{2a - x} \sqcap \dfrac{\cancel{2}a^{\cancel{3}}\boxed{-a^2x + a^2x}}{2a - x}}$ et fiet: $\dfrac{l}{x} \sqcap \dfrac{2a - x}{a}$.





Am unteren Rand: $a^2 \sqcap yx$. seu $a^2 - yx \sqcap 0$. et $yx - a^2 \sqcap 0$. Ergo $-\cancel{y}l \sqcap \cancel{y}x$

3 *Späterer Zusatz am Rand:* Summ. omnium $\int l \sqcap \int \dfrac{4ay^2}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}$ datur ex datis $\int x \sqcap \int \dfrac{2ay^2}{a^2 + y^2}$ seu cognita est differentia. Ergo datur et $\dfrac{4ay^2, +2a^3y^2 + 2ay^4}{\boxed{2}\overline{a^2 + y^2}}$. Ergo et datur ex quad. Circuli, dimensio hujus $\boxed{2}\dfrac{y^2}{a^2 + y^2}$. At quia $y^2 \sqcap \dfrac{a^2x}{2a - x}$ habetur ex quad. Hyperbolae habebitur ergo et $\dfrac{y^3}{a^2 + y^2}$ ex quad. Hyperbolae.

sive $\sqrt{\frac{l}{a}} \sqcap \frac{2ay}{a^2+y^2}$. Est ergo $\frac{l}{x} \sqcap \frac{2a^2}{a^2+y^2}$ ut obiter dicam, hinc patet, curvam nullum habere flexum contrarium, semperque obvertere concavitatem rectae AH, cum x semper sit major ipsa l.

Auferatur x, a $2a$, fiet: $2a - \frac{2ay^2}{a^2+y^2}$, sive $\frac{2a^3+2ay^2-2ay^2}{a^2+y^2}$ sive $\frac{2a^3}{a^2+y^2} \sqcap \underbrace{2a-x}_{z}$.

Eritque $z \sqcap EF'$ in figura, et summa omnium z aequalis segmento Circuli duplicato. Ducatur z in y, seu HF', distantiam ab axe, habetur solidum ex revolutione figurae $AEFGH$, circa axem AH, quae erit: $\frac{2a^2y}{a^2+y^2} \sqcap \omega$, unde $2a^2y \sqcap a^2\omega + y^2\omega$. Quaeritur ergo hujus figurae quadratura, cum appareat satis simplex. Si vera sunt quae dicuntur *de ductibus* 63 habetur ex posita Circuli quadratura: momentum figurae propositae ex basi HG, ac proinde solidum acutum infinitum ejus revolutione genitum. Habentur et revolutiones circa alias bases ut DE. Habetur jam et ipsius figurae integrae dimensio ex supposita circuli quadratura, quare habetur figurae centrum gravitatis ex supposita Circuli quadratura. Pugnare videntur prop. 6. num. 3. et prop. 63. *de ductibus.*

---

2 *Darüber:* Imo habet. Fuit error. Vide infra.

13 *Über* Circuli quadratura*:* Imo et Hyperbolae.

5 z ⊓ EZ *L ändert Hrsg.* 6 seu HZ *L ändert Hrsg.* 10 f. habentur ... DE *erg. L*

13 qvadratura *(1)* Hinc seqvitur dimensionem curvae, cuius *(a)* aeqvatio est *(b)* ordinata valet: $\frac{2a^2y}{a^2+y^2}$ etiam ex qvadratura Circuli pendere, ergo et qvadratura huius figurae: $\frac{2a^2y-2a^3}{a^2+y^2}$, vel $\frac{2a^2y^2-2a^3y}{a^2+y^2}$ ex eodem principio habetur *(2)* pugnare *L*

---

1 patet: Die folgende Aussage ist nicht richtig. Leibniz bemerkt den Irrtum später (s. u. S. 99 Z. 3 f.) und markiert die Stelle am Rand. 5 aequalis: Leibniz vergisst, zum doppelten Segment noch das Rechteck yz zu addieren. 9 *de ductibus* 63: VII, 4 N. 26 S. 460. 13 prop. 6. num. 3.: *a. a. O.*, S. 428; mit den Bezeichnungen von Fig. 2 entsprechen die Aussagen den Gleichungen $AQ(2a-x) = 2a\sqrt{2ax-x^2}$ bzw. $a(BD-DE) = \frac{a^2x-ax^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

Si vera sunt quae dicuntur *de ductibus* 52, quadratorum, ipsarum DE, summa, pendebit ex quadratura Hyperbolae. Calculum consulamus: $y \sqcap \sqrt{\frac{a^2x}{2a-x}}$. Unde, $y^2 \sqcap \frac{a^2x}{2a-x}$. Ergo quaeritur summa figurae cujus ordinatae sunt $\frac{a^2x}{2a-x}$, vel ponendo $2a-x \sqcap z$, et $x \sqcap 2a-z$, fiet: $\frac{2a^3-2az}{z} \sqcap v$, sive $\frac{2a^3}{z} - 2a \sqcap v$, quae pendet ex quadratura Hyperbolae. Ergo ad centrum gravitatis habendum hujus figurae opus tam quadratura Circuli quam quadratura Hyperbolae. Constat tamen nobis ex sola Circuli dimensione, quantum a basi vel vertice Centrum gravitatis distet, at quantum distet ab axe AH pendet ex quadratura Hyperbolae, ergo et haec ordinatarum progressio: $\frac{2a^2y}{a^2+y^2}$ pendet ab eadem.

Ostendi schediasmate novissimo de superficiebus 3. octob. 1674, $\frac{a^3}{y^2-a^2}$ etiam a quadratura Hyperbolae pendere. Ducatur in $y+a$, fiet: $\frac{a^3}{y-a}$, et habebitur momentum ejus ex quadratura Hyperbolae. Ducatur et in $y-a$, fiet $\frac{a^3}{y+a}$, et habebitur etiam momentum ejus ex quadratura alterius Hyperbolae.

Caeterum DE, ducatur in HD seu $2a-x$ fiet $\sqrt{2a^3x-2a^2x^2}$, sive $a\sqrt{2ax-2x^2}$, quae Circulo utique Homogenea est. Si ducatur $AD \sqcap x$, in DE, fiet: $\sqrt{\frac{a^2x^3}{2a-x}}$, sive $ax\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$ quam figuram necesse est, ut arbitror, ex Circuli quadratura pendere.

Nota l, seu productam figurae in ipsa AH sumendam ita rectius investigabimus: $l \sqcap \frac{4ay^2-2xy^2}{a^2+y^2}$. Pro y^2, substituatur ejus valor, fiet:

---

1 *de ductibus* 52: *a. a. O.*, coroll. 1, S. 459. 3–9 Ergo ... eadem: vgl. III, 1 N. 39_2 S. 157 Z. 10–12. 10 Ostendi: VII, 5 N. 6 S. 33. 14 $\sqrt{2a^3x-2a^2x^2}$: Richtig wäre $\sqrt{2a^3x-a^2x^2}$ bzw. $a\sqrt{2ax-x^2}$. Das Versehen beeinträchtigt nicht die allgemeine Aussage des Satzes. 16 ut arbitror: Leibniz führt diesen Teil der Untersuchung ab S. 105 Z. 7 durch.

$$\boxed{2a-x},\ \frown\ \underbrace{2y^2}_{\dfrac{2a^2x}{\boxed{2a-x}}}\ \smile\ \overbrace{\dfrac{2a^3\boxed{-a^2x+a^2x}}{2a-x}}^{a^2+y^2}\quad \text{sive } \frac{\cancel{2}\cancel{a^2}x}{\dfrac{\cancel{2}\cancel{a^3}}{2a-x}},\ \text{sive } \frac{2ax-x^2}{a} \sqcap l.$$

Hinc patet cum $2a$ sit semper major quam x non posse aequationem habere flexum contrarium; imo si l major quam x, quod fit, quamdiu x minor quam a, curva concavitatem axi obvertit, id est usque dum respondeat centro circuli, postea convexitatem. NB. Porro ratio $\dfrac{l}{x} \sqcap \dfrac{2a\cancel{x}-x^{\cancel{2}}}{a\cancel{x}}$ seu ut $2a-x$ ad a.

Summa autem omnium l ad basin, ac proinde summa omnium: $\dfrac{4a^3y^2}{a^4+2a^2y^2+y^4}$ aequatur summae omnium DE ut jacent seu figurae nostrae. Ergo haec quoque figura pendet ex circuli quadratura. Eodem modo investiga, l, ex y, et postea y elimina retenta x, habebis figuram propositae symmetram. $a^2x+xy^2 \sqcap 4ayl-2xyl$, et $l \sqcap \dfrac{a^2x+xy^2}{4ay-2xy}$, vel $l \sqcap$

$$\frac{a^2x+\dfrac{a^2x^2}{2a-x}}{4a-2x,\ \frown\ \sqrt{\dfrac{a^2x}{2a-x}}},\ \text{sive } \frac{2a^3x\boxed{-a^2x^2+a^2x^2}}{4a^2-2x^2\sqrt{\dfrac{a^2x}{2a-x}}}$$ quae pendet a Circuli quadratura.

Invenienda est Reducta, quod ita fiet: quadratum ipsius y, seu y^2, dividatur per l, habetur reducta fiet: $\dfrac{a^2x}{2a-x\ \frown\ 2ax-x^2}$, sive $\dfrac{a^2}{2a-x,\square}$ quae est Hyperbola Cubica. Si

---

4 f. *Dazu, unter* NB. *ergänzt:* Ecce elegantissimam constructionem $\dfrac{l}{x} \sqcap \dfrac{2a-x}{a}$ pro hujus figurae tangente.

3 f. imo ... NB. *erg. L*

---

3 imo: Die Bestimmung des Wendepunktes der Kurve ist nicht richtig. Leibniz übernimmt das falsche Ergebnis in III, 1 N. 39_2 S. 157. 10 sive: Im Nenner des folgenden Bruches müsste der Faktor vor dem Wurzelausdruck $2(2a-x)^2$ lauten. 12 fiet: Im Zähler der beiden folgenden Brüche müsste statt a^2 jeweils a^3 stehen.

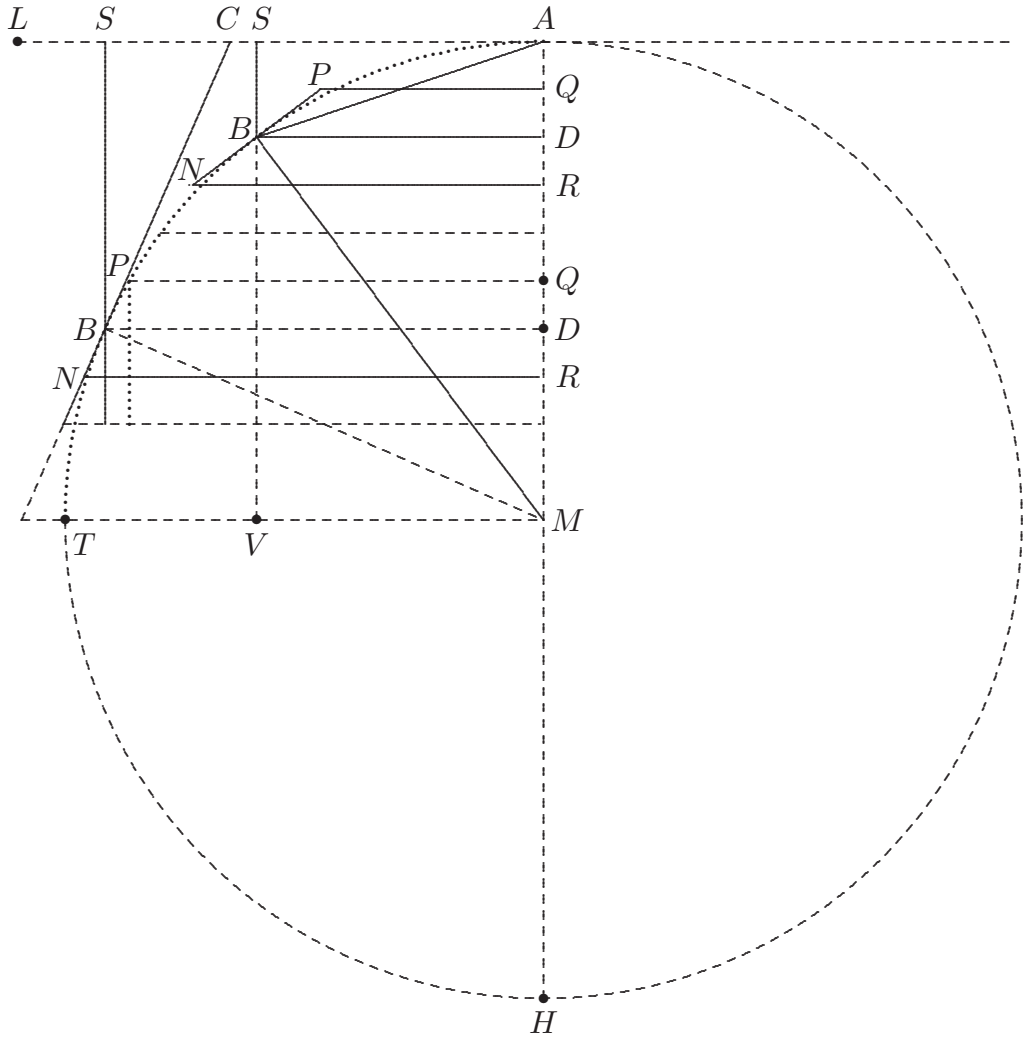
in $l \sqcap \dfrac{a^2x + xy^2}{4ay - 2xy}$ elimines x, fiet: $l \sqcap \dfrac{\boxed{a^2 + y^2,} \frown \dfrac{\cancel{2}ay^{\cancel{2}}}{\boxed{a^2 + y^2}}}{2\cancel{4}a\cancel{y} - \dfrac{2\cancel{4}ay^{\cancel{3}2}}{a^2 + y^2}}$, sive $\dfrac{\cancel{4}y^{\cancel{2}} \frown a^2 + y^2}{2a^{\cancel{2}} + \boxed{2ay^2 - 2ay^2}} \sqcap l$.

„Figura Segmentorum $ADEA$ aequatur momento arcus circuli ei respondentis, AB, „ex AC tangente extremitatis sive verticis A, servato situ ponderati.

Tangat arcum circuli AB, centro M descripti, recta NBP bisecta in B, quantum-
5 libet parva, et ex punctis N, B, P in diametrum AMH demittantur perpendiculares PQ, NR, BD. Jungatur BM. Patet esse PN tangentem ad QR, ut est BM radius ad BD sinum rectum, sive erit $NP \sqcap \dfrac{BM, \langle QR \rangle}{\text{sin. } \langle \text{rect.} \rangle}$, vel analytice, QR, vocando 1, fiet: $\dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}} \sqcap NP$, positis ut ante MB, vel $AM \sqcap a$, et $AD \sqcap x$. Jam ex B erigatur ipsi AM parallela BS, donec ipsi AL tangenti verticis A, occurrat, quae est aequalis
10 ipsi AD. Manifestum centrum gravitatis ipsius NP esse B. Ac proinde ejus pondus sive momentum ex AL erit rectangulum sub NP et BS ex notis centrobarycae principiis. Momentum ergo erit Rectangulum ex $NP \sqcap \dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$, in $BS \sqcap x$, sive $\dfrac{a\langle x \rangle}{\sqrt{2ax - \langle x^2 \rangle}}$ ipsa nimirum Tangens ad AL producta, BC $\langle$prodit$\rangle$.

1 ⊓ l | in qva vereor ne qvis insit error, qvia nulla adsunt signa negativa NB *gestr.* | *L* 4 bisecta in B *erg. L* 13 ipsa ... ⟨prodit⟩ *erg. L*

1 sive: Im Nenner des folgenden Bruches müsste der erste Term vor der Kürzung $2a^3$, danach $2a^2$ lauten. 2–102,6 „Figura ... Q. E. D.: vgl. *a. a. O.*, prop. II, S. 157 f.



[*Fig. 3*]

1 *Fig. 3*: Leibniz hat die ursprünglichen Punktbezeichnungen, die hier wiedergegeben sind, um Unstimmigkeiten mit dem Text zu vermeiden, nachträglich geändert, indem er die Punktbezeichnung C gestrichen und die Punktbezeichnung L durch C ersetzt hat. Linien in Blindtechnik werden gestrichelt wiedergegeben.

Jam intelligamus NP esse latus polygoni infinitanguli. Patet totum arcum AB, intelligi posse constare ex infinitis NP. et AR, divisam in infinitas QR inter se aequales, et cujuslibet valorem eo quo dixi modo exprimi posse, et variare pro vario valore ipsius x, seu AD: Quare et momentum ejus summa quippe momentorum omnium partium erit summa omnium $\frac{ax}{\sqrt{2ax-x^2}}$, id est inspecta fig. 2. summa omnium BC vel DE, id est figura $ADEA$. Q. E. D.

„Momentum arcus circuli AB, servato situ ex diametro AH (vel TM) ponderati, ae-
„quatur rectangulo sub radio et portioni ipsius diametri arcum subtendenti AD (vel
„VM vel BD).

Haec propositio eadem fere qua praecedens methodo demonstratur, ponendo AD, in infinitas QR, inter se aequales divisam, et arcum ex infinitis lateribus NP conflari, momentum cujuslibet NP, ex AH, aequatur rectangulo NP in BD. Jam BD constat esse $\sqrt{2ax-x^2}$, et NP invenimus calculo praecedentis propositionis esse $\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}$,

2 NP. *(1)* qvare et momentum ex ipsorum momentis conflabitur. Summa ergo omnium $\frac{a\beta x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ *(a)* aeqvatur momento ipsius arcus circuli, et ponendo autem β esse partem *(b)* toties repetitarum qvoties β repetitur in ipsa recta AM | vel a *erg.* |, aeqvatur arcus AB momento. Numerum autem infinitum, ipsarum β in a contentarum, appellemus ȝ, *(aa)* erit $\beta \sqcap \frac{a}{ȝ}$ *(bb)* (: qvemadmodum, ut exemplo res intelligatur, si β ponatur ter contineri in a, erit $\beta \sqcap \frac{a}{3}$:) *(aaa)* Ergo et *(bbb)* eritqve *(ccc)* et summa omnium $\frac{a\beta x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, sive ipsum arcus momentum erit $\frac{a\beta x^2 ȝ}{\sqrt{2ax-x^2}}$. jam si numerus ipsarum β in | ipsa *erg.* | a | repertarum *erg.* |, est ȝ, erit β idem qvod $\frac{a}{ȝ}$ *(aaaa)* ⟨qvod⟩ *(bbbb)* qvo valore in locum ipsius β substituto, fiet: $\frac{a^2 x ȝ}{ȝ\sqrt{2ax-x^2}}$, sive $\frac{a^{\cancel{2}} x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ *(2)* Atqvi $\frac{a\beta x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, idem est qvod $\frac{ax}{\sqrt{2ax-x^2}}$, qvia β, linea infinite parva | ad *erg.* | altiorem dimensionem non attollit et si constans perpetuoqve eadem intelligatur posito scilicet ipsam AR | vel AD *erg.* | in infinitas QR. inter se aeqvales divisam, unde fit *(3)* Conseqventia facile ostenditur, ponendo enim β infinite parvam sive constantem esse ipsius *(a)* a *(b)* Radii infinitesimam, *(aa)* erit *(bb)* Numerumqve infinitum *(4)* et *L* 7 *(1)* Momentum arcus circuli ex tangente extremitatis sive verticis, servato situ ponderati, aeqvatur segmento *(a)* s⟨ec⟩ *(b)* duplicato *(2)* Momentum ... circuli *(a)* ex diametro | eius *erg.* | *(b)* AB *L*

7–103,4 Momentum ... Q. E. D.: vgl. Bl. Pascal, *Traité des sinus du quart de cercle*, 1658, prop. I, S. 1 (*PO* IX S. 61 f.) u. III, 1 N. 39_2, prop. III, S. 159.

ergo NP in BD erit $\frac{a\sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{2ax-x^2}}$ sive a. Momentum ergo cujuslibet NP, ex diametro, aequatur radio, ergo momentum omnium NP, seu ipsius arcus, ex eadem diametro ponderati, aequatur radio toties sumto, quot sunt ipsae NP, seu quot in sinu verso AD sunt rectae QR, seu unitates[,] id est radio ducto in AD. Q. E. D.

Hinc facile demonstratur, quod invenit Archimedes, Superficiem Sphaericam cylindricae respondenti, aequalem esse.

„Momentum arcus circuli, AB, ex tangente extremitatis, AL, servato situ ponderati, „aequatur segmento ejus ABA, duplicato.

Nam pondus arcus AB ex diametro TM aequatur rectangulo VMA, per prop. proxime praeced. Ergo ex principiis centro-barycis pondus arcus AB, ex sinu recto BD, aequatur rectangulo VMA, demto rectangulo sub arcu AB, et sinu complementi MD. Praeterea ex iisdem principiis centrobarycis constat; summam duorum momentorum ejusdem arcus, AB, nempe unum, ipsius ex sinu recto BD, alterum ejusdem ex tangente AL, servato semper situ, ponderati; aequari rectangulo sub arcu ipso et sinu verso AD. Ergo si ab hoc rectangulo, seu summa utriusque momenti, auferas unum momentorum, nempe momentum arcus ex BD, restabit alterum, momentum scilicet arcus AB ex tangente AL. Quod ut compendiosius transigamus, sinum rectum BD appellemus v, arcum appellemus ψ. Porro AD posita x, ut semper, et radio a, erit $MD \sqcap a-x$, adeoque momentum arcus ex sinu recto erit $va-a\psi+x\psi$, quo ablato ab utriusque momenti summa, nempe $x\psi$, fiet: $x\psi-va+a\psi-x\psi$, vel abjectis $+x\psi-x\psi$, se destruentibus, fiet $a\psi-va$ seu $a\psi$, (rectangulum sub arcu et radio seu) sector duplicatus; demto rectangulo va, vel VMA, aequalis

4 AD. *(1)* vel x, Hinc patet portionem superficiei sphaericae, arcus propositi revolutione circa diametrum ad extremitatem eius pertingentem *(a)* descri *(b)* generatam aeqvari circulo cuius *(aa)* di *(bb)* ra *(cc)* radius est media proportionalis inter radium circuli dati, | et *erg.* | sinum versum arcus dati. *(2)* Q. E. D. *(3)* Q. E. D. *L* 9 *(1)* Nam Rectangulum sub arcu et radio aeqvatur sectori duplicato, ut ostendit Archimedes, ergo *(2)* Nam *L* 13 arcus, AC *L ändert Hrsg.* 20 f. (rectangulum ... seu) *erg. L*

5 invenit: Die Aussage ergibt sich aus Archimedes, *De sphaera et cylindro* I, prop. XIII, XLII u. XLIII. 7–104,5 „Momentum ... Q. E. D.: vgl. III, 1 N. 39_2, prop. IV, S. 159 f. 26 ostendit: vgl. Archimedes, *Dimensio circuli*, prop. I.

est momento arcus AB, ex AL. Quare sector, demto Triangulo MBA, ⟨r⟩ectanguli VMA dimidio, aequatur momento arcus dimidio, at sector $AMBA$ Triangulo MBA minutus, relinquit segmentum ABA, id ergo aequatur momento arcus dimidio; ac proinde Momentum arcus AB ex AL tangente extremitatis, A, servato situ ponderati, aequatur segmento ABA, duplicato. Q. E. D.

Notandum quia $x \sqcap \frac{2ay^2}{a^2+y^2}$, ergo $x \sqcap \frac{2ay^2+2a^3-2a^3}{a^2+y^2} \sqcap 2a - \frac{2a^3}{a^2+y^2}$. Jam ponendo $EF' \sqcap z$ est $x \sqcap [2]a - z$. Ergo $z \sqcap \frac{2a^3}{a^2+y^2}$. Et momentum figurae $ADEA$ ex axe AH, summa omnium zy, pendebit ergo ex quadratura hujus figurae: $\frac{2a^2y}{a^2+y^2}$. Atqui jam ostensum est summam quadratorum omnium y seu etiam momentum hujus figurae pendere ex quadratura hyperbolae, nam $y^2 \sqcap \frac{a^{[2]}x}{2a-x}$[,] figura ergo homogenea quadratis est Hyperbolica. Ergo et figura $\frac{2a^2y}{a^2+y^2}$ pendebit ex quadratura Hyperbolae. Ergo et

---

1–3 *Am Rand:* NB. Si istae detractiones ex ⟨i⟩psis lateris seu Characteribus apparerent.

10 *Nebenbetrachtung:* NB. Ex posita $\frac{x}{2a-x}$ facile et habetur $\frac{x^2}{2a-x}$. Nam illud dat: $\langle\frac{x}{2a}\rangle + \frac{x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}$ etc. ⟨hoc⟩: $\frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{4a^2} + \frac{x^4}{8a^3}$. ⟨—⟩ ponendo $2a \sqcap 1$. patet ⟨e⟩a non differre nisi x Triangulo. Eodem modo facile habetur $\frac{\langle x\rangle^3}{2a-x}$. et breviter omnes figurae ⟨qua⟩rum denominatores ⟨sunt⟩ $2a-x$. ⟨—⟩ Generaliter habita ⟨una⟩ figura certo modo ⟨s⟩ummata habentur ⟨om⟩nes aliae ab eadem ⟨fo⟩rmula denominatae. NB.

Darunter: $y \sqcap \sqrt{\frac{xa^2+bx^2}{dx}}$ $\langle y\rangle^2 \sqcap \frac{a^2+bx}{}$ [*bricht ab*]

---

7 figurae $ADEA$: s. o. Fig. 2. S. 95.

$\frac{2y^3}{a^2+y^2}$. Haec autem $\frac{4a^2y^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}$, vel $\frac{4a^6}{a^4+2a^2y^2+y^4}$, vel haec $\frac{ax^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$ pendet ex circuli quadratura. $\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} \sqcap \frac{a}{v}$, erit $v \sqcap \frac{a\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$ et $v^2 \sqcap \frac{2a^3x-xa^2}{a-x}$,$\square$ seu $a^2v^2-2av^2x+x^2v^2 \sqcap 2a^3x-xa^2$. Haec pro conchoeide quae etiam pendet ex quad. Hyperbolae. Addatur $\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$ ad $\frac{a\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$, fiet: $\frac{\boxed{ax^2}-x^3+2a^2x\boxed{-ax^2}}{a-x \frown \sqrt{2ax-x^2}}$ sive $\frac{xa+x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}+\frac{a^2x}{a-x \frown \sqrt{2ax-x^2}}$, quae pendebit ex Circ. et Hyp. simul. Jam $\frac{xa}{\sqrt{2ax-x^2}}$ pendet ex quad. Circuli.

Inquirendum ergo separatim in hanc $\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} \sqcap e$. Erit $\frac{\text{sagitta}}{\text{sinus}} \sqcap \frac{e}{\text{sagitta}}$ seu erit sagitta media proportionalis inter sinum et e, et e erit recta DN in figura. Jungatur BMG' dum circulo occurrat in G'; erit BG' diameter. Jungatur ANG'. Transibit inter AG' per N, quia angulus BAG' rectus. Patet esse $BD \sqcap PG'$ et $PH \sqcap AD$ seu x. Jam $\frac{AD}{HD \sqcap PA \sqcap 2a-x} \sqcap \frac{DN \sqcap e}{PG' \sqcap \sqrt{2ax-x^2}}$, fiet $2ae-2xe \sqcap x\sqrt{2ax-x^2}$. Momentum

4 *Unter* sive*:* Error

1 f. pendet ... qvadratura *erg. L* 5 $\frac{xa+x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$ *(1)* Jam $\frac{xa}{\sqrt{2ax-x^2}}$ pendet ex qvad. Circuli, et $\frac{xa+x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$ ex qvad. Hyperbolae. Ergo etiam $\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$ ex qvad. Circuli et Hyperbolae simul pendebit. *(2)* $+\frac{a^2x}{a-x \frown \sqrt{2ax-x^2}}$ *L*

1 f. Haec ... quadratura: Leibniz hat die Aussage zur Abhängigkeit der Flächenbestimmung ergänzt. Die Untersuchung zu $e=\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$ führt er Z. 7 – S. 106 Z. 11 durch. Für den ersten Ausdruck hat Leibniz die Abhängigkeit in VII, 4 N. 45 S. 764 Z. 12 f. festgestellt, für den zweiten lässt sich die Abhängigkeit direkt aus den dort gewonnenen Ergebnissen ableiten. 3 conchoeide: Die Abhängigkeit der Quadratur der Konchoide von Kreis- und Hyperbelquadratur kennt Leibniz bereits aus J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 23; vgl. VII, 4 N. 22 S. 402, 405 u. 417. In seinem Handexemplar hat er im einschlägigen Consectarium die Wörter hyperbolici und una cum semisegmento circulari unterstrichen; vgl. VII, 5 N. 47 S. 340. 7–106,11 Inquirendum ... simul: vgl. III, 1 N. 39_2 S. 163 Z. 15–23.

ergo sinuum ex tangente quod pendet a quad: circuli, aequabitur momento ipsarum e, ex tangente opposito. Sed et momentum ex diametro seu quadrata ab e, dant $\frac{x^3}{2a-x}$. Si haberetur $\frac{x^3}{\sqrt{2ax-x^2}}$, haberetur omnium e summa ex sola Circuli quadratura. Praeterea producatur HB in Q, ubi tangenti verticis, AC occurrat. Patet duo esse Triangula similia HAQ et ADN, ideoque $\frac{DN}{AD} \sqcap \frac{QA \sqcap \text{duplicata tangens arcus dimidii} \sqcap y}{AH \sqcap 2a}$. Cylinder ergo omnium e seu DN aequatur momento nostrae figurae Anonymae ex vertice duplicato. Sed jam video momentum nostrae anonymae ex vertice prorsus ex quad. Circuli pendere, seu $\frac{ax^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$; nam ob Triangula Similia, QAH, BDH erit $\frac{QA}{AH} \sqcap \frac{BD}{DH}$. Ergo $QA \frown DH \sqcap AH \frown BD$. Ergo cylindro sinuum BD aequatur momentum $4ay - 2xy$, atqui $4ay$ habetur ex quad. circuli, ergo et $2xy$. Ergo $\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$ habetur ex quad. Circuli. Ergo $\frac{xa+x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$ ex quad. Circuli. Ergo $\frac{2a^2x}{a-x \frown \sqrt{2ax-x^2}}$ ex Circ. et Hyp. simul.

6 f. duplicatum *L ändert Hrsg.* 11 Circuli. *(1)*, at eadem ex qvad. Hyp. et Circuli simul. Ergo ex data qvad. Circuli datur qvad. Hyp. *(2)* Ergo *L*

9. DE SERIE AD SEGMENTUM CIRCULI
[Oktober 1674 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 405. 1 trapezförmiger Ausschnitt von max. 10,4 × 3,9 cm. 6 Z. auf Bl. 405 r°.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Gleichheitsszeichen ⊓ wird von Leibniz ab Juni 1674 verwendet. Leibniz wendet ein Theorem von Sluse zur Polynomdivision, mit dem er sich im Oktober 1674 auseinandergesetzt hat, auf die Kreisreihe an; vgl. VII, 3 N. 38_2 S. 391.

$\frac{b}{3} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{3}$

$b - b^3 + b^5 \sqcap \frac{b}{1+b^2} - \frac{b^7}{1+b^2}$. $\frac{b-b^7}{1+b^2,3} \sqcap \frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{3} - \frac{2b}{3}$. Ergo $\frac{b-b^7}{1+b^2,3} + \frac{2b}{3} \sqcap \frac{b}{1}[-\frac{b^3}{3}] + \frac{b^5}{3}$.

$\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} \sqcap \frac{b-b^7}{1+b^2} + \frac{2b}{3} - \frac{2b^5}{15}$. Ergo $\frac{b}{1+b^2} + \frac{2b}{3}$ major triplo $\frac{b}{1} - \frac{2b^3}{15} - \frac{3}{15}b^3 + \frac{b^5}{5}$ seu $1 - \frac{2b^2}{15}, \frown b,, - \frac{b+b^2}{5} \frown b^2$ vel $\frac{b}{1},, - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{5}, \frown b^2$.

---

12 *Nebenrechnung:* $\frac{b^5}{3} - \frac{b^5}{5} \sqcap \frac{2b^5}{15} \sqcap \frac{1b^5}{7}$

---

10 $\frac{b}{1+b^2} - \frac{b^7}{1+b^2}$: Richtig wäre $\frac{b}{1+b^2} + \frac{b^7}{1+b^2}$. Leibniz rechnet konsequent weiter. 12 $\frac{b-b^7}{1+b^2}$: Konsequent gerechnet müsste im Nenner ein Faktor 3 stehen. In der Folge würde sich eine Abschätzung für $\frac{b}{1+b^2} + 2b$ nach oben statt nach unten ergeben. In der weiteren Rechnung kommen einige kleinere Versehen hinzu.

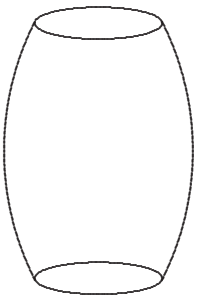
10. DE FRUSTO CONI RECTI. DE QUADRATURA HYPERBOLAE ET CIRCULI ARITHMETICA

[10. – 11. Oktober 1675]

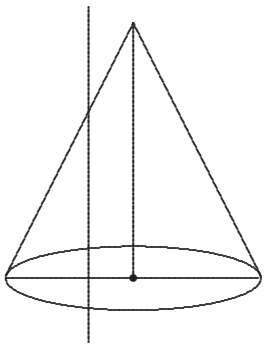
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 20 × 18,5 cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca 17,5 × 1,5 cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca 19,5 × 4 cm. $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 409 r°. — Auf dem Rest des Trägers VII, 5 N. 33 sowie Cc 2, Nr. 1069, 1070 und 00 (Druck in späteren Bänden der Reihe).
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Bei dem vorliegenden Stück handelt es sich um Notizen, die Leibniz im Verlauf eines Gesprächs, möglicherweise mit Tschirnhaus, anfertigte. Neben dem in Teil 1 aufgegriffenen Problem zur Bestimmung des Volumens eines Kegelabschnitts, das Leibniz am 10. Oktober 1675 von Dechales gestellt wurde (vgl. VII, 5 N. 32), sowie der arithmetischen Kreisquadratur betraf die Diskussion auch das Thema der Gleichungslösung (gegenläufig auf Bl. 408 v°, nachträglich zerschnitten und teilweise mit Cc 2, Nr. 1070 überschrieben; Druck in einem späteren Band der Reihe). Die auf Bl. 409 v° befindliche Aufzeichnung VII, 5 N. 33 ist datiert auf den 11. Oktober 1675 und wurde vermutlich nach dem vorliegenden Stück verfasst.

[*Teil 1*]



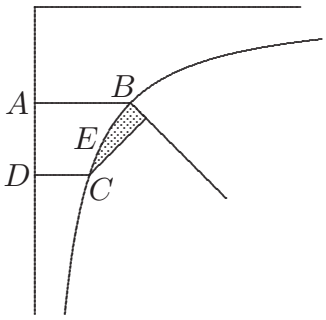
[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

18 Vgl. VII, 5 N. 32, insbesondere die Marginalie zu S. 239 Z. 5 sowie Fig. 1a auf S. 240.

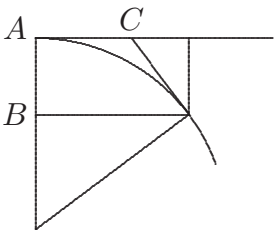
[*Teil 2*]



$$x \sqcap \frac{1}{b}$$

$$\underbrace{\frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^3} + \frac{1}{4a^4} \text{ etc.}}$$

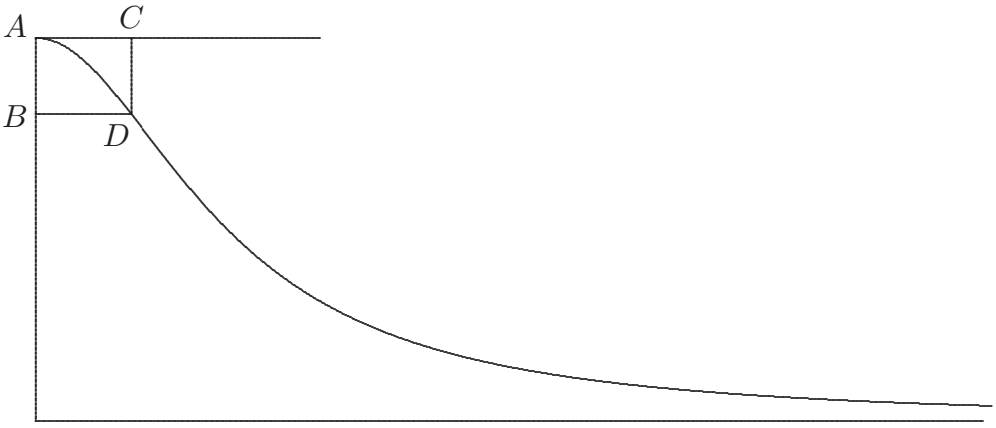
[*Fig. 3*]



$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$$ 5

$$\frac{1}{1a} - \frac{1}{3a^3} + \frac{1}{5a^5} - \frac{1}{7a^7}$$

[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

5 *Darunter:* 1

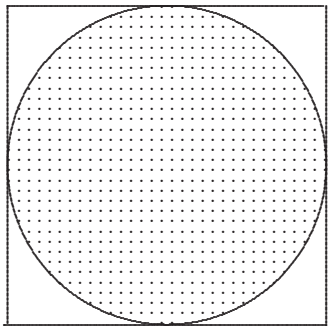
8 *Fig. 5*: Die Punktbezeichnungen A, C und D sind um 90° gedreht geschrieben.

11. QUADRATURA ARITHMETICA CIRCULI
[Herbst 1674 – September 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 126. Ca 1 Bl. 4°. Linker und unterer Rand unregelmäßig geschnitten. 1 S. auf Bl. 126 r°.
Cc 2, Nr. 628

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung von Leibniz war höchstwahrscheinlich zur Mitteilung seiner im Herbst 1673 entdeckten Kreisreihe in einem Gespräch gedacht. In den frühen Studien mit der Kreisreihe gibt Leibniz zunächst Formeln für das Kreissegment bzw. für eine komplementäre Fläche an (N. 1; VII, 3 N. 24–26 u. N. 30, 31). In den Handschriften von 1674 benutzt er meistens das Verhältnis von Kreisumfang und Durchmesser (vgl. N. 4, 5, 6, 7 sowie III, 1 N. 39_2). In einigen Fällen (wie in VII, 3 N. 27, 31, 38) bezieht er sich, manchmal zusätzlich, auf die Fläche des Vollkreises bzw. auf das Verhältnis von umbeschriebenem Quadrat und Kreisfläche. Die Aussage im vorliegenden Stück: „Le Quarré circonscrit estant 1. l'aire du cercle inscrit sera: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc.“ ähnelt sowohl der Formulierung von Huygens im Brief vom 6. November 1674 (III, 1 N. 40 S. 170) wie denen von Leibniz in den ausführlichen Mitteilungen von Ende 1675 an La Roque (III, 1 N. 72 S. 339) und an [Gallois?] (III, 1 N. 73_1 S. 356). Den Vergleich der konvergenten geometrischen Reihe der reziproken Zweierpotenzen mit der Kreisreihe verwendet Leibniz auch in *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus*, in: *Acta eruditorum*, Februar 1682, S. 45 (*LMG* V S. 121).

Quadratura Arithmetica Circuli
GL



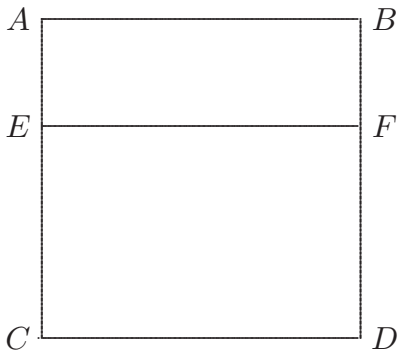
L'aire

[*Fig. 1*]

19 Quadratura ... Circuli *erg. L*

Le Quarré circomscrit estant 1.

l'aire du cercle inscrit sera: $\underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}}_{☿}$



[*Fig. 2*]

$ABDC$ soit 1. pied quarré.

$AEFB$ $\frac{1}{3}$.

$ECDF$ sera 1 pied $-\frac{1}{3}$.

$$\underbrace{\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \text{etc.}}_{♀}$$

Habeo n u m e r u m (2) aequalem infinitae seriei ♀ sed nescio an detur aut dari possit numerus aequalis seriei infinitae ☿. Interim scio aream circuli aequalem esse huic seriei infinitae.

2 *Darunter:* $+ \quad -$

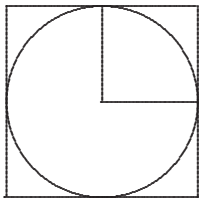
7 *Darunter:* 2

3 ABCD *L ändert Hrsg.* 4 AEBF *L ändert Hrsg.* 8 (2) *erg. L* 8 f. aut dari possit *erg. L*

12. SERIES AD CIRCULUM. EXTRACTIO RADICIS QUADRATICAE [April (?) 1676]

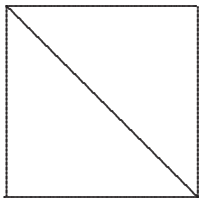
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III A 30 Bl. 7. 1 Zettel von max. 11 × 16,6 cm. Am rechten Rand unregelmäßige Risskante. 1 S. auf Bl. 7 v°. Die Notizen sind vermutlich während eines Gesprächs entstanden. — Auf der Vorderseite VII, 1 N. 99.
Cc 2, Nr. 1541 A

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück dürfte etwa zur selben Zeit entstanden sein wie das von den Herausgebern auf April 1676 datierte VII, 1 N. 99 auf der Vorderseite des Blattes.



[*Fig. 1*]

$$\underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}}$$



[*Fig. 2*]

1 $\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{4}{2}}$ $\frac{20\,000}{10,000 \sqcap 100^{[2]}}$

2 0 0 0 0
. . .
. . .

12 *Neben* $\sqrt{\frac{4}{2}}$ *:* 25

14–16 *Daneben und darunter:* 3 4 $\frac{4}{3}$

12 *Nebenrechnung* $2 \sqcap \frac{4}{2}$ *gestr. L*

13. AUS UND ZU MENGOLIS CIRCOLO
[Ende April 1676]

Die beiden folgenden Stücke sind zusammen mit der auf Ende April 1676 datierten *Arithmetica infinitorum et interpolationum figuris applicata et summa harmonicorum sub finem adjecta* (VII, 3 N. 57_2) anlässlich Leibniz' Lektüre von Pietro Mengolis *Circolo*, Bologna 1672, entstanden. N. 13_1 exzerpiert die Konstruktion der Dreieckstabellen von S. 13 bzw. 19 (§§ 22–30 bzw. 37 f., S. 9–13 bzw. 17), die Quinta tauola triangulare von S. 7 (§§ 16 und 40, S. 6–8, 17, 20) sowie den Ansatz zur näherungsweisen Kreisquadratur aus den Dreieckstabellen nach §§ 62–66 (S. 26). In dem auf Papier gleicher Sorte notierten VII, 3 N. 57_2 befasst sich Leibniz eingehender mit der mit den Dreieckstabellen zusammenhängenden Quadraturmethode. N. 13_2 schließlich ist von Leibniz als zweiter Teil der Exzerpte aus Mengolis *Circolo* tituliert. Er umfasst in teils wörtlicher, teils stark paraphrasierender lateinischer Übersetzung die aus den Dreieckstabellen abgeleitete Approximation für die Kreisquadratur (§§ 62–160, S. 26–60), punktuell von Leibniz um eigene Kommentare ergänzt. Eine explizit als erster Teil der Exzerpte überschriebene Aufzeichnung (Cc 2, Nr. 1338 A) wurde bislang nicht gefunden. Diese dürfte jedoch inhaltlich zum größten Teil mit dem in N. 13_1 und VII, 3 N. 57_2 Enthaltenen zusammenfallen.

13_1. CONSTRUCTIO TABULARUM

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 67, 79. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 67 v° u. 79 r° quer beschrieben.
Cc 2, Nr. 1384

Constructio Tabulae ⊙

21 *Am oberen Rand:* Haec refer ad excerpta ex Mengolo de Circulo.

21–117,26 Constructio ... Tabulae ⊙: vgl. P. Mengoli, *Circolo*, 1672, §§ 22–29, S. 9–13.

⊙

					A	1	(A)			
				C	1	1	(C)			
			E	1	b	1	(E)			
		G	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	(G)			
	K	1	$\frac{4b}{3}$	2	$\frac{4b}{3}$	1	(K)			
M	1	$\frac{15}{8}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{8}$	1	(M)			
P	1	$\frac{24b}{15}$	3	$\frac{8b}{3}$	3	$\frac{24b}{15}$	1	(P)		
R	1	$\frac{105}{48}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{105}{48}$	1	(R)	
1	$\frac{192b}{105}$	4	$\frac{64b}{15}$	6	$\frac{64b}{15}$	4	$\frac{192b}{105}$	1		
(B)	S	Q	N	L	H	F	D	B		
	(D)	(F)	(H)	(L)	(N)	(Q)	(S)			

9 $\frac{64}{45}$b *L ändert Hrsg. zweimal*

1 ⊙: vgl. *a. a. O.*, § 30, S. 13.

☽ 1

$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2b}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{2}{5}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{2}{5}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4b}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4b}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{2}{7}$ $\frac{16}{105}$ $\frac{4}{35}$ $\frac{4}{35}$ $\frac{16}{105}$ $\frac{2}{7}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{15}{96b}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{3}{32b}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{15}{96b}$ $\frac{1}{4}$

$\frac{2}{9}$ $\frac{32}{315}$ $\frac{4}{63}$ $\frac{16}{315}$ $\frac{16}{315}$ $\frac{4}{63}$ $\frac{32}{315}$ $\frac{2}{9}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{21}{192b}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{3}{64b}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{3}{64b}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{21}{192[b]}$ $\frac{1}{5}$

♀ 1

$\sqrt{a}$ $\sqrt{r}$

a $\sqrt{ar}$ r

$a\sqrt{a}$ $a\sqrt{r}$ $r\sqrt{a}$ $r\sqrt{r}$

a^2 $a\sqrt{ar}$ ar $r\sqrt{ar}$ r^2

$a^2\sqrt{a}$ $a^2\sqrt{r}$ $ar\sqrt{a}$ $ar\sqrt{r}$ $r^2\sqrt{a}$ $r^2\sqrt{r}$

a^3 $a^2\sqrt{ar}$ a^2r $ar\sqrt{ar}$ r^2a $r^2\sqrt{ar}$ r^3

$a^3\sqrt{a}$ $a^3\sqrt{r}$ $a^2r\sqrt{a}$ $a^2r\sqrt{r}$ $ar^2\sqrt{a}$ $r^2a\sqrt{r}$ $r^3\sqrt{a}$ $r^3\sqrt{r}$

a^4 $a^3\sqrt{ar}$ a^3r $a^2r\sqrt{ar}$ a^2r^2 $r^2a\sqrt{ar}$ r^3a $r^3\sqrt{ar}$ r^4

5 $\frac{1}{4}$b *L ändert Hrsg. zweimal* 7 $\frac{15}{96}$b, $\frac{3}{32}$b *L ändert Hrsg. zwei- bzw. einmal* 9 $\frac{21}{192}$b, $\frac{3}{64}$b *L ändert Hrsg. ein- bzw. zweimal* 16 $a^2\sqrt{ar}$ | $a^2\sqrt{r}$ $ar\sqrt{a}$ $ar\sqrt{r}$ $r^2\sqrt{a}$ $r^2\sqrt{r}$ *ändert Hrsg.* | *L*

1 ☽: vgl. *a. a. O.*, S. 19. 10 ♀: vgl. *a. a. O.*, Quinta Tauola Triangulare, S. 7.

Super lineis AB sunt alternis seu per saltus	Unitates,	1.	1.	1.
$*$				
EF	Arithmeticos	1.	2.	3.
$*$				
KL	Triangulares	1.	3.	6.
$*$				
PQ	Pyramidales	1.	4.	etc.
etc.	etc.			

Loca inter saltus ita supplentur: super linea AB. Unitates, super linea EF, inter 1. 2. 3. 4. arithmeticos, seu inter $\frac{2}{2}\ \frac{4}{2}\ \frac{6}{2}\ \frac{8}{2}$ locabuntur intermedii, $\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}$. Ergo super linea KL. intermedii tantum erunt collocandi inter Triangulares. Quod ita fiet. Triangulares fiunt ex Arithmeticis duobus in se ductis dimidiatis, ut ex 1. 2. 3. 4. fiunt Triangulares 1. 3. 6. hoc modo: $\frac{1,2}{2}.\ \frac{2,3}{2}.\ \frac{3,4}{2}.$ sive 1. 3. 6. Ergo ex arithmeticis suppletis, ducamus Triangulares suppletos, nempe ex prioribus Arithmeticis $\frac{2}{2}\ \frac{4}{2}\ \frac{6}{2}\ \frac{8}{2}$, fecimus Triangulares primos nempe $\frac{\frac{2}{2}\frown\frac{4}{2}}{1,2}\ \frac{\frac{4}{2}\frown\frac{6}{2}}{1,2}\ \frac{\frac{6}{2}\frown\frac{8}{2}}{1,2}$ seu 1 3 6. Ita ex Arithmeticis suppletis $\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}\ \frac{9}{2}$ faciemus Triangulares suppletos $\frac{\frac{3}{2}\frown\frac{5}{2}}{1,2}\ \frac{\frac{5}{2}\frown\frac{7}{2}}{1,2}\ \frac{\frac{7}{2}\frown\frac{9}{2}}{1,2}$, seu $\frac{15}{8}\ \frac{35}{8}\ \frac{63}{8}$ etc. Ut apparent in linea KL.

Eodem modo super PQ habentur Pyramidales completi, ut enim generalis Triangularium generatio positis Arithmeticis y et eorum differentia d. est $\frac{y, y+d}{1,2}$, ita generalis pyramidalium generatio est: $\frac{y, y+d, y+2d}{1,2,3}$. Unde ita fiet:

2–7 $*$ | ED Triangulares 1. 3. 6. $*$ KL *ändert Hrsg.* | Pyramidales L 13 sive 1. 3. 6. *(1)* Qvoniam *(2)* ergo ex Arithmeticis repletis, ducemus et *(a)* com *(b)* Triangulares complexos, nempe ex $\frac{2}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{4}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{6}{2}\ \frac{7}{2}\ \frac{8}{2}$, fiet: $\frac{\frac{2}{2}\frown\frac{3}{2}}{2}\ \frac{\frac{3}{2}\frown\frac{4}{2}}{2}\ \frac{\frac{4}{2}\frown\frac{5}{2}}{2}\ \frac{\frac{5}{2}\frown\frac{6}{2}}{2}$, etc seu $\frac{6}{8}\ \frac{12}{15}$ *(3)* Ergo L

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{\frac{3}{2}, \frown \frac{5}{2} \frown \frac{7}{2}}{1,2,3} & & \dfrac{\frac{5}{2}, \frown \frac{7}{2} \frown \frac{9}{2}}{1,2,3} \\ & \text{seu} & \\ \dfrac{105}{48}. & & \dfrac{315}{48}. \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Pyramidales suppleti,} \\ \text{seu supplementa} \\ \text{super linea } PQ. \text{ etc.} \end{array}$$

Supplevimus ergo quae sunt super lineis AB. EF. KL. PQ. Supersunt ea omnia quae sunt super lineis CD. GH. MN. RS. quae sunt series inter unitates, Arithmeticos, triangulares, pyramidales mediae. Sed harum serierum dimidia pars, seu numeri alterni etiam jam tum habentur; quoniam v. g. series super CD vel GH etc. a seriebus notarum reciprocis, super $(A)(B)$. super $(E)(F)$. super $(K)(L)$, (quae ex asse inventis AB, EF, KL etc. respondent) per saltus intersecantur. Rursus ergo termini harum serierum intermediarum, alterni tantum quaerendi sunt. Primus primae seriei intersertae ignotus vocetur b. Et series inserta ita stabit:

$$1 \left| b \right| \frac{3}{2} \left| * \right| \frac{15}{8} \left| * \right| \frac{105}{48} \left| * \right| .$$

Ubi patet terminum primum ad tertium esse ut 2 ad 3[,] tertium ad 5^{tum} ut 4 ad 5, quintum ad 7^{mum} ut 6 ad 7. Ergo conveniens esse secundum ad quartum ut 3 ad 4. quartum ad sextum ut 5 ad 6. et completa series super CD ita stabit:

$$1 \quad b \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4b}{3} \quad \frac{15}{8} \quad \frac{24}{15}b \quad \frac{105}{48} \quad \frac{192}{105}b \quad \text{etc.}$$

Completa jam serie super CD. completa etiam est ejus reciproca super $(C)(D)$ adeoque omnium serierum intersectarum super CD, super GH, super MN, super RS, habentur termini ignoti primi. Ut primus ignotus super GH est $\frac{4b}{3}$. Inventis ergo harum serierum terminis notis, quidem per saltum, ignotorum vero primo, invenienda tantum est in qualibet serie notorum relatio, quae dabit et relationem ignotorum. Est autem in serie GH haec relatio: primus ad tertium, ut 2 ad 5. et tertius ad quintum, ut 4 ad 7. et quintus ad septimum ut 6 ad 9. Ergo debet esse secundus ad quartum ut 3 ad 6. (seu ut 1 ad 2), quartus ad sextum, ut 5 ad 8, et ita porro. In serie super MN. est primus ad tertium ut 2 ad 7. secundus ad quartum, ut 3 ad 8 et ita porro. Habemus ergo generalem constructionem Tabulae $\odot$.

Constructio Tabulae ☉ brevis:

Regula I^{ma}.

In serie transversa descendente prima est Terminus primus ad tertium ut 2 ad 2,
secunda 2 3
tertia 2 4
quarta 2 5

secundus ad quartum ut 3 ad 3[,] tertius ad quintum 4 ad 4[,] quartus ad sextum 5 ad 5.

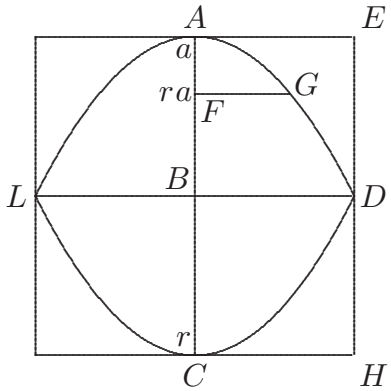
3 ad 4	4 ad 5	5 ad 6
3 5	4 6	5 7
3 6	4 7	5 8

Regula II^{da}. Series transversa descendens a dextro ad sinistrum, aequatur seriei transversae descendenti a sinistro ad dextrum. Hinc series descendentes a dextro ad sinistrum, prima et secunda, dant terminos primum et secundum, serierum ipsis parallelarum omnium; et per consequens per regulam praecedentem, omnes etiam earum terminos. Ergo ex datis seriebus transversis descendentibus prima et secunda, habentur aliae omnes. Dantur autem ipsae series prima et secunda, ex dato primo et secundo earum termino. Ergo ope duarum harum regularum, ex datis quatuor terminis, 1. 1. primo et secundo seriei transversae descendentis primae, et 1. *b*. seriei transversae descendentis secundae tota dabitur Tabula.

Constructio Tabulae ☽. ex Tabula ☉.

Series Tabulae ☉ horizontales multiplicentur, prima seu vertex 1. per 1. seu $\frac{2}{2}$. secunda seu 1. 1. per $\frac{3}{2}$. tertia seu 1. *b*. 1. per $\frac{4}{2}$ seu 2. quarta 1. $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{2}$. 1. per $\frac{5}{2}$. et ita porro. Termini singuli producti invertantur, unitato numeratore in nominatorem et contra, fiet Tabula ☽.

20–24 Constructio ... Tabula ☽: vgl. *a. a. O.*, § 37 f., S. 17.



[*Fig. 1*]

Tabula ♀. ex figura adjecta explicatur. $AF \sqcap a$. abscissa, $FC \sqcap r$ residua[,] AC tota. FG ordinata erit aliquis terminus tabulae, ♀. ut si AGD sit quadrans circuli FG erit $\sqrt{ar}$[,] si parabola sit cujus axis AB, erit FG, $\sqrt{a}$. vel $\sqrt{r}$.

Termini autem seriei ☽. explicant aream figurae $AGDCLA$, posito AC, quadrato totius AC, 1.

Caeterum superest inveniendus numerus b. qui inventus daret quadraturam Circuli. Nam posito Quadrato Diametri, 1. [semi]circulus erit $\frac{1}{2b}$. Numerus autem b, invenietur appropinquando, infinitis modis, ope Tabulae ⊙. Idque adeo verum est, ut una sola series transversa descendens, ad quantitatem circulo quantumlibet propinquam, majorem minoremve inveniendam sufficiat. Quod ut appareat excerpamus unam:

$$1t. \;\Big|\; b. \;\Big|\; \frac{3}{2}t \;\Big|\; \frac{4}{3}b \;\Big|\; \frac{15}{8}t \;\Big|\; \frac{24}{15}b \;\Big|\; \frac{105}{48}t \;\Big|\; \frac{192}{105}b. \text{ etc.}$$

in qua terminus primus ad tertium ut 2 ad 3. secundus ad quartum ut 3 ad 4. Per

tertius	quintum	4	5	quartus	6^{tum}	5	6
quintus	septimum	6	7	sextus	octavum	7	8

t. autem intelligo, id quod respondet unitati assumtae, quae postea, per quadratum totius AC. explicabitur. Porro haec series continue crescit, est enim b major quam $1t$. et $\frac{3}{2}t$

8 $\frac{1}{2}$b *L ändert Hrsg.*

5 *AGDCLA*: Richtig wäre *AGDCBA*. 7–120,7 Caeterum ... $\frac{3,3,5,5,7,7,9,9}{2,4,4,6,6,8,8,10}$: vgl. *a. a. O.*, §§ 62–66, S. 26.

major quam b. et $\frac{4}{3}b$ major quam $\frac{3}{2}t$. et ita porro. Adeoque terminus quilibet affectus litera b. situs erit inter duos terminos, affectos litera t, unum antecedentem minorem, alterum sequentem majorem. Ut b major quam $1t$, minor quam $\frac{3}{2}t$. $\frac{4}{3}b$ major quam: $\frac{3}{2}t$, minor quam $\frac{15}{8}t$ et ita porro. Quod servit ad ipsius b. quantitatem semper verae propiorem inveniendam. Eam in rem itaque b major quam

$$\begin{array}{lllll} & 1t. & \frac{3,3}{2,4}t & \frac{15,15}{8,24}t & \frac{105,105}{48,192}t & \text{etc.} \\ \text{seu} & 1t & \frac{3,3}{2,4} & \frac{3,3,5,5}{2,4,,4,6} & \frac{3,3,5,5,7,7}{2,4,6,,4,6,8} & \frac{3,3,5,5,7,7,9,9}{2,4,4,6,6,8,8,10}. \end{array}$$

13_2. PARS 2 EXCERPTORUM EX CIRCULO MENGOLI, ET AD EUM ANNOTATORUM

Überlieferung: *L* Auszug (vorwiegend in lateinischer Übersetzung) aus und Bemerkungen zu P. Mengoli, *Circolo*, Bologna 1672: LH 35 II 1 Bl. 74–75. 1 Bl. 2° u. ca $\frac{2}{5}$ Bl. 2°. 3 S. auf Bl. 74 r°–75 r°. Textverlust im Umfang von beidseitig jeweils ca 3 halben Zeilen durch Papierschaden und Tintenfraß am unteren Rand von Bl. 74. — Bl. 74 u. 75 bildeten ursprünglich einen Teil eines Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1383 B

P a r s 2 Excerptorum ex Circulo Mengoli, et ad eum annotatorum

Hactenus ex Mengolo Methodum ejus generalem qua ad quadrandas quasdam figuras utitur, excerpsi, nunc videamus quam inde appropinquationem pro Circulo ducat. Inspiciatur Tabula quam notavi signo ⊙. appendicibus ⟨ab⟩scissis. Patet in latere ultimo et secundultimo seu penultimo antecedentes esse minores subsequentibus alternis,

16 p a r s ... annotatorum *erg. L*

19 Tabula ... ⊙: s. S. 114 Z. 1. 19–122,3 Patet ... circumscriptum: vgl. *a. a. O.*, §§ 63–76, S. 26–29.

nempe $1 \sqcap \frac{3}{2}$, et $\frac{3}{2} \sqcap \frac{15}{8}$. etc. cumque praeterea manifestum sit primum esse minorem secundo, seu $1 \sqcap b$. erit etiam $b \sqcap \frac{3}{2}$. et ita semper sequentes majores antecedentibus. Erit ergo $\frac{3}{2} \sqcap \frac{4b}{3}$, vel $\frac{9}{8} \sqcap b$. et sumendo terminos quantum per tabulae continuationem licet magnos, fiet: $\frac{105}{48} \sqcap \frac{192b}{105}$ adeoque $\frac{11025}{9216} \sqcap b$. Unde patet quanto longius tabulae termini secundi saltem vel secundultimi lateris continuari sint, tanto magis ad circuli quadrationem accedi. Eodem modo numeri semper exhiberi possunt majores quam b, conferendo antecedentes puros, cum sequentibus cognita affectis. Unde patet numeros majores quam b esse $\frac{3}{2}$. $\frac{3,\frown 3,\frown 5}{2,4,4}$. $\frac{3,\frown 3,\frown 5,\frown 5,\frown 7}{2,4,4,6,6}$. et $\frac{3\frown 3\frown 5\frown 5\frown 7\frown 7\frown 9}{2\frown 4\frown 4\frown 6\frown 6\frown 8\frown 8}$. etc. Et numeros minores esse $\frac{3\frown 3}{2\frown 4}$. $\frac{3\frown 3\frown 5\frown 5}{2\frown 4\frown 4\frown 6}$. $\frac{3\frown 3\frown 5\frown 5\frown 7\frown 7}{2\frown 4\frown 4\frown 6\frown 6\frown 8}$. et $\frac{3\frown 3\frown 5\frown 5\frown 7\frown 7\frown 9\frown 9}{2\frown 4\frown 4\frown 6\frown 6\frown 8\frown 8\frown 10}$. etc. Invertantur fractiones. Unde patet primum (secundum) spatium Circulo justo minus esse ad secundum (tertium) ut ablata unitate quadrati primi (secundi) paris post binarium, residuum est ad hoc ipsum quadratum, scil. 15 ad 16 (35 ad 36). Et spatia Circulo majora sunt primum (secundum) ad secundum (tertium), ut quadratum secundi (tertii) imparis post unitatem ad ipsum quadratum unitate minutum.

Praeterea primum (secundum) spatium majus est ad secundum (tertium) minus ut 5 ad 4 (ut 7 ad 6). Porro hae quantitates invertendae sunt, ex numeratoribus fiat nominator, et contra; quia et Tabula ☉ invertenda est, ut inde fiat Tabula ☽. quae est numerorum quadratricium. Et regula haec erit: b est ad 1, seu quad. ad circulum inscriptum, est minus quam productum numeri imparis per omnia quadrata numerorum praecedentium imparium, ad productum primi paris seu binarii in omnia quadrata aliorum numerorum praecedentium parium, et b est ad 1. seu quadratum ad inscriptum circulum est majus quam productum quadratorum omnium imparium usque ad quendam parem; est ad productum hujus ultimi paris; et binarii, (: seu omnium parium primi :) et omnium quadratorum a paribus praecedentibus. Porro quoniam primum spatium justo minus est ad secundum ut 15 at 16, et 2^{dum} ad tertium, ut 35 ad 36, ideo praefigatur aliud anteprimum, quod sit ad primum $\frac{2}{3}$ ut 3 ad 4. Id ergo est $\frac{1}{2}$ et est quadratum inscriptum. Et

8 minores *L ändert Hrsg.* 21 et a vel 1. *L ändert Hrsg.*

17 Tabula ☽: S. 115 Z. 1.

quia spatiorum majorum primum est ad secundum ut 25 ad 24; et secundum ad 3^{tium}, ut 49 ad 48. ideo erit conveniens facere ante-primum, quod sit ad primum $\frac{2\frown4}{3\frown3} \sqcap \frac{8}{9}$; ut est 9 ad 8. Id vero erit 1. seu quadratum circumscriptum.

differentiae:	$\frac{1}{2}$	error minor quam differentiae oppositorum	1	differentiae
	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3,3}$	$\frac{2\frown4}{3\frown3}$	
$\frac{2,,3,5,,,-2,4,4}{3,3,5} \sqcap \frac{2}{3,3,5}$				$\frac{2,4}{3,3,5,5}$
	$\frac{2\frown4\frown4}{3\frown3\frown5}$	$\frac{2,4,4}{3,3,5,5}$	$\frac{2\frown4\frown4\frown6}{3\frown3\frown5\frown5}$	
$\frac{2,4,4}{3,3,5,5,7}$				$\frac{2,4,4,6}{3,3,5,5,7,7}$
	$\frac{2\frown4\frown4\frown6\frown6}{3\frown3\frown5\frown5\frown7}$	$\frac{2,4,4,6,6}{3,3,5,5,7,7}$	$\frac{2\frown4\frown4\frown6\frown6\frown8}{3\frown3\frown5\frown5\frown7\frown7}$	
$\frac{2,4,4,6,6}{3,3,5,5,7,7,9}$				$\frac{2,4,4,6,6,8}{3,3,5,5,7,7,9,9}$
	$\frac{2\frown4\frown4\frown6\frown6\frown8\frown8}{3\frown3\frown5\frown5\frown7\frown7\frown9}$		$\frac{2\frown4\frown4\frown6\frown6\frown8\frown8\frown10}{3\frown3\frown5\frown5\frown7\frown7\frown9\frown9}$	
	etc.		etc.	
	Spatia minora		Spatia majora	

circulo
posito diametrum esse 1.

sive

18 sive: Beim Berechnen der Produkte für die folgende Tabelle sind Leibniz mehrere Fehler unterlaufen (vgl. Neben- und Kontrollrechnungen). So müsste bei den beiden letzten Differenzen der kleineren Flächen (zweite Spalte) $\frac{2}{45}$ bzw. $\frac{32}{1575}$ stehen. Die letzten beiden Werte für die größeren Flächen (dritte Spalte) müssten $\frac{192}{225}$ bzw. $\frac{9216}{11025}$ und deren Differenz (vierte Spalte) $\frac{192}{11025}$ lauten. Leibniz rechnet konsequent weiter; die allgemeine Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

$$\frac{1}{2} \qquad\qquad 1$$

$$\frac{\quad}{\quad} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{\quad}{\quad} \qquad \frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{3} \qquad\qquad \frac{8}{9}$$

$$\left\langle \frac{1}{45} \right\rangle \qquad\qquad \frac{8}{225}$$

$$\frac{32}{45} \qquad\qquad \frac{\langle 144 \rangle}{225}$$

$$\frac{1}{1575} \qquad\qquad \frac{144}{11225}$$

$$\frac{1152}{1575} \qquad\qquad \frac{6912}{11225}$$

5–7 *Neben- und Kontrollrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{32} \\ 72 \\ \underline{108} \\ 1152 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \underline{21} \\ 75 \\ \underline{150} \\ 1575 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \underline{15} \\ 75 \\ \underline{15} \\ 225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \underline{9} \\ 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \underline{144} \\ 192 \\ \underline{192} \\ 6912 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 \\ \underline{49} \\ 2225 \\ \underline{900} \\ 11225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 192 \\ \underline{144} \\ 336 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \underline{21} \\ 32 \\ \underline{62} \\ 652 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1152 \\ \underline{652} \\ 500 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 500 & \langle 20 \rangle \\ \hline 1575 & 63 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6912 \\ \underline{144} \\ 7056 \\ \underline{6912} \\ 144 \end{array}$$

Ego vero hinc duco consequentiam: seriem omnium $\frac{1}{2}.\ \frac{1}{6}.\ \frac{1}{45}.\ \frac{1}{1575}.$ etc. aequari circulo, si diameter sit unitas. Et $\frac{1}{9}.\ \frac{8}{225}.\ \frac{144}{11225}.$ etc. + circulo aequari unitati seu quadrato circumscripto. Ergo $\frac{1}{9}.\ \frac{8}{225}.\ \frac{144}{11225}.$ etc. aequatur concavo circulari.

Ergo utriusque seriei

$$\left.\begin{array}{r|lllll} & \frac{1}{2} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{45} & +\frac{1}{1575} & \text{etc.} \\ \text{et} & & +\frac{1}{9} & +\frac{8}{225} & +\frac{144}{11225} & \text{etc.} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} & \frac{13}{225} & \text{etc.} & \sqcap 1 \end{array}\right\} \text{summa aequatur unitati.}$$

Quoniam vero in istis seriebus, spatiorum minorum terminus ante-primus $\frac{1}{2}$ est ad primum $\frac{2}{3}$ ut 3 ad 4; terminus primus ad secundum, ut 15 ad 16; secundus ad tertium ut 35 ad 36, etc. ideo ultimus, nempe ipse circulus erit ad primum, $\frac{1}{2}$ seu ad quadratum inscriptum in composita ratione ex rationibus infinitis: 3 ad 4, 15 ad 16, 35 ad 36 etc. seu $\frac{1}{2}$ per $\frown \frac{4}{3}\left[\frown \frac{16}{15}\right] \frown \frac{36}{35} \frown$ etc. dabit circulum. Seu circulus ad quad. inscriptum ut $\frac{4}{3} \frown \frac{16}{15} \frown \frac{36}{35}$ etc. ad 1, seu $\frac{\text{circ.}}{\square\ \text{inscript.}} \sqcap 1+\frac{1}{3}, \frown 1+\frac{1}{15}, \frown 1+\frac{1}{35}, \frown 1+\frac{1}{63}, \frown 1+\frac{1}{99}$ [etc.] Atqui demonstratum est a me alibi esse idem: $\frac{\text{circ.}}{\square\ \text{inscr.}} \sqcap \frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. Ergo $1+\frac{1}{3}, \frown 1+\frac{1}{15}, \frown 1+\frac{1}{35}, \frown 1+\frac{1}{63}, \frown 1+\frac{1}{99}$ etc. $\sqcap \frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. Unde methodus quoque elucet, qua procedendum sit ad terminationem ejus seriei inveniendam. Fiat

8 spatiorum *(1)* majorum | pariter ac minorum *nicht gestr.* | *(2)* minorum *L*

14 alibi: s. VII, 3 N. 27 S. 318 Z. 2 – S. 319 Z. 5. Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung fehlt ein globaler Faktor 4; Leibniz benutzt den Ausdruck konsequent weiter bis S. 125 Z. 8.

enim series terminorum qui omnes terminatione minores, nempe $\underbrace{1+\frac{1}{3}}$. $\underbrace{1+\frac{1}{3}, \frown 1+\frac{1}{15}}$. $\underbrace{1+\frac{1}{3}, \frown 1+\frac{1}{15}, \frown 1+\frac{1}{35}}$. Horum terminorum hujus seriei exponantur differentiae, et summa differentiarum serierum, erit seriei terminatio. Igitur serierum ejusmodi terminationes inveniendae sunt per serierum summas, serierum autem summae per Methodum regressus de qua alibi.

Eodem modo ratio quadrati circumscripti ad Circulum componitur ex rationibus 9 ad 8 et 25 ad 24 et 49 ad 48 etc. seu Circulus erit $\sqcap 1 \frown \frac{8}{9} \frown \frac{24}{25} \frown \frac{48}{49} \sqcap \left[\frac{1}{2} \frown\right] 1+\frac{1}{3}, \frown 1+\frac{1}{15}, \frown 1+\frac{1}{35}, \frown 1+\frac{1}{63}, \frown 1+\frac{1}{99} \frown$ etc. $\sqcap \frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc.

Redeamus ad Mengolum, is inquit a se demonstratum quinto *Elementorum Geometriae speciosae*, quod ex sumtis quatuor terminis serie harmonica naturali ab unitate; harmonice dispositis, logarithmus altissimae rationis ad logarithmum maxime depressae habet minorem rationem quam minor ad minorem, e. g. quatuor terminis $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{15}$. $\frac{1}{16}$. sumtis; logarithmus rationis $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{4}$ ad logarithmum rationis $\frac{1}{15}$ ad $\frac{1}{16}$ minor est ratione $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{15}$ seu ratione quintupla, et major ratione $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{16}$ seu quadrupla. Unde inquit, manifestum est quatuor numeris arithmetice dispositis, ordine quantitatum minoris ad majorem logarithmum rationis primae ad secundam ad logarithmum rationis 3^{tiae} ad quartam, esse minorem tertio ad primum, et majorem quarto ad secundum, hoc est in his ipsis numeris, 3. 4. 15. 16. logarithmus 3 ad 4 ad logarithmum 15 ad 16 est minor quintuplo seu minor quam 15 ad 3, et major quadruplo seu 16. ad 4. Eodem modo sumtis numeris, 15. 16. 35. 36, Ratio logarithmi de $\frac{15}{16}$ ⟨ad⟩ logarithmum de $\frac{35}{36}$ est minor $\frac{35}{15}$

1 f. $\underbrace{1+\frac{1}{3}, \frown 1+\frac{1}{35}}$. $\underbrace{1+\frac{1}{3}, \frown 1+\frac{1}{35}, \frown 1+\frac{1}{63}}$ *L ändert Hrsg.* 3 summa differentiae serierum *L ändert Hrsg.*

5 alibi: vgl. N. 36_1 Teil 4 S. 416 Z. 8–24. 9–128,8 Redeamus ... ad 121: vgl. *a. a. O.*, §§ 78–93, S. 29–34. 9 demonstratum: s. P. Mengoli, *Geometriae speciosae elementa*, 1659, prop. 99, S. 325. 14 inquit: s. P. Mengoli, *Circolo*, 1672, § 78, S. 30.

seu $\frac{7}{3}$ et major $\frac{36}{16}$ seu $\frac{9}{4}$. Et sumtis numeris: 35. 36. 63. 64. $\frac{\log.\frac{35}{36}}{\log.\frac{63}{64}} \sqcap \frac{63}{35}$ seu $\frac{9}{5}$ et $\sqcap \frac{64}{36}$ seu $\left\langle\frac{16}{9}\right\rangle$. Ita $\log.\frac{3}{4} \smile \log.\frac{\langle 3\rangle 5}{3\langle 6\rangle} \sqcap \frac{35}{3}$ et $\sqcap \frac{36}{4} \sqcap \frac{9}{1}$ etc. Itaque qualibus unitatibus logarithmus de $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{3}$, talib⟨us⟩ unitatibus $\left[\log.\frac{15}{16}\right]$ est major ⟨quam⟩ $\frac{1}{15}$ et $\log.\frac{63}{\langle 64\rangle}$ maj. quam $\frac{1}{63}$, et $\log.\frac{99}{\langle 100\rangle}$ $\left[\text{maj. quam } \frac{1}{99} \text{ et } \log.\frac{143}{144}\right]$ maj. ⟨q⟩uam $\frac{1}{143}$. Et ⟨ita⟩ de manu in manum tradendo, logari⟨thm⟩i rationum ⟨quadrati⟩ inscrip⟨ti⟩ ⟨— — — —⟩ erunt majores terminis hujus seriei: $\left\langle\frac{1}{3}\right\rangle$ $\frac{1}{\langle 15\rangle}$ $\frac{1}{35}$ $\left\langle\frac{1}{63}\right\rangle$ $\frac{1}{99}$ ⟨— — — — — —⟩ omnium sequentium, ut excessus arithmeticae dispo⟨siti⟩onis ad numerum p⟨ariter⟩ ord⟨inatum — — — — — —⟩ $\frac{1}{3}$ est ad $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$ etc. ut 2 ad 1. et $\frac{1}{15}$ ⟨ad omnes sequ⟩entes ut 2 ad 3 et ⟨— — — — — — —⟩

Ideoque ponendo logarithmum rationis $\square^{\text{ti}}$ inscripti ad primum spatium circulo minus nempe rationis $\frac{3}{4}$ esse $\frac{1}{3}$, erunt quilibet alii logarithmi rationum quadrati inscripti ad sequentia spatia, usque ad circulum majora quam massa omnium terminorum $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$, etc. seu quam $\frac{1}{6}$. Consequentiam hanc concipio. Quia quilibet alii logarithmi rationum majores quam illa massa quia minimus ex ipsis seu quadrati inscripti ad primum spatium Circulo minus, est $\frac{1}{3}$, ergo sequentes majores quam $\frac{1}{3}$ ergo et majores quam $\frac{1}{6}$. Ergo primi spatii ad Circulum rationis logarithmus major quam $\frac{1}{6}$. Est autem $\frac{1}{6}$ dimidium ab $\frac{1}{3}$ id

---

1 $\frac{\log.\left\langle\frac{f}{f+1}\right\rangle}{\log.\frac{\langle g\rangle}{g+1}} \sqcap \frac{g}{f} \sqcap \frac{g+1}{f+1}$

4 ⟨q⟩vam $\frac{143}{144}$ *L ändert Hrsg.* 16 ratio major *L ändert Hrsg.*

est dimidium logarithmi rationis 3 ad 4 seu quadrati inscripti ad primum spatium minus. Ergo logarithmus rationis primi spatii ad circulum major dimidio logarithmo $\frac{3}{4}$. Ideo logarithmus quadrati inscripti ad circulum est plus quam sesquialter logarithmi 3 ad 4.

Eodem modo, qualium unitatum Logarithmus de $\frac{15}{16}$ est $\frac{1}{15}$, talibus unitatibus logarithmi rationum de $\frac{35}{36}$ de $\frac{63}{64}$ de $\frac{99}{100}$ de $\frac{143}{144}$ sunt majores terminis $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$ $\frac{1}{99}$ $\frac{1}{143}$ et s u m m a o m n i u m horum Logarithmorum major est massa omnium terminorum seu $\frac{1}{10}$. Et stante supposito quod $\frac{1}{15}$ sit logarithmus rationis $\frac{15}{16}$ primi minorum spatiorum ad secundum; erit logarithmus rationis secundi spatii ad Circulum major quam $\frac{1}{10}$ et logarithmus rationis primi spatii ad Circulum major quam $\frac{1}{15} + \frac{1}{10}$ seu $\frac{1}{6}$. Ergo major quam $\frac{1}{6}$. Et ratio primi spatii ad circulum ad rationem 15 ad 16 est logarithmice altior quam $\frac{1}{6}$ ad $\frac{1}{15}$ hoc est quam 5 ad 2, hoc est dupla sesquialterata. Ratio igitur primi spatii ad circulum est minor quam dupla sesquialterata 15 ad 16, et addita ratione quadrati inscripti ad primum spatium, erit ratio quadrati inscripti ad circulum minor quam composita ex $\frac{3}{4}$ et dupla sesquialterata de $\frac{15}{16}$.

Eodem modo ponendo $\frac{1}{35}$ logarithmum 35 ad 36, patebit quadratum inscriptum ad Circulum habere minorem rationem, quam composita ex $\frac{45}{64}$ et tripla sesquialterata $\frac{35}{36}$. Eodem modo in infinitum demonstrabitur v. g. rationem quadrati inscripti ad circulum esse minorem composita ex 3 ad 4, 15 ad 16, 35 ad 36, 63 ad 64, 99 ad 100 et sextupla sesquialterata 143 ad 144. Et ita porro, semper ultimam ex rationibus istis alterando.

Jam per eadem quae supra manifestum est quod quatuor numerorum 8. 9. 24. 25. logarithmus 8 ad 9. ad logarithmum 24 ad 25 est minor quam 24 ad 8 hoc est quam 3 ad 1. et ita de caeteris. Itaque si logarithmus 8 ad 9 sit 1. erit logarithmus 24 ad 25 major quam $\frac{1}{3}$, et 48 ad 49 major quam $\frac{1}{6}$. et 80 ad 81 major quam $\frac{1}{10}$. etc. Jam summa horum

1 seu | primi *streicht Hrsg.* | qvadrati *L* 2 Ergo ratio primi *L ändert Hrsg.*

numerorum habetur, nam quaelibet fractio Triangularis ad omnes sequentes est ut 1 ad latus trianguli seu unitas ad omnes sequentes ut 1 ad 1. et $\frac{1}{3}$ ad omnes sequentes ut 1 ad 2. et $\frac{1}{6}$ ad omnes sequentes ut 1 ad 3. etc. Unde si logarithmus primi spatii majoris Circulo ad circumscriptum quadratum seu 8 ad 9. est 1, logarithmus rationis circuli ad primum spatium est major quam 1, et logarithmus circuli ad circumscriptum quadratum est major quam 2. Et circuli ad circumscriptum quadratum ⟨ratio⟩ minor duplicata $\frac{8}{9}$.

Eodem modo demonstrabitur, quod ratio circuli ad circumscriptum quadratum est minor composita 8 ad 9, 24 ad 25, 48 ad 49, 80 ad 81, et sextuplicata 120 ad 121. Idem continuari potest in infinitum, ponendo omnes rationes et alterando ultimam tantum.

Cogitentur jam alia spatia accedentia majora et minora. Et primum minora erunt, ad quorum primum □ inscr. habet rationem sesquialteratam primae $\frac{3}{4}$[,] [ad] secundum compositam ex prima et sesquialterata secundae $\frac{15}{16}$, [ad] tertium compositam ex pri⟨ma, se⟩cunda et sesquialterata tertiae $\frac{35}{36}$ etc. Haec spatia vocat H y p o c y c l o s . Eodem modo pro majoribus a⟨ppro⟩pinquationibus ad quorum primum quad. circumscriptum habet rationem duplicatam primae rationis, $\frac{8}{9}$. ad secundum compositam ex prima et triplicata secundae $\frac{24}{25}$ et ita in infinitum quae spatia vocat H y p e r c y c l o s . Hypocycli continuo crescunt, Hypercycli continuo decrescunt. Hae jam duae series convergentes Hypercyclorum et Hypocyclorum citius accedunt, quam spatiorum majorum ad minorum supra in tabula exhibitorum. (+ NB. Hinc nova duci potest series numerorum ratio-

---

19–129,5 NB.

3 et $\frac{1}{10}$ ad *L ändert Hrsg.* 5 minor *L ändert Hrsg.* 5 f. ad primum spatium est *L ändert Hrsg.* 11 ex qvibus primum ad □ inscr. *L ändert Hrsg.*

10–130,14 Cogitentur ... prolixus: vgl. *a. a. O.*, §§ 96–116, S. 35–43. 13 vocat: *a. a. O.*, § 96, S. 36. 15 $\frac{8}{9}$: Es müsste $\frac{9}{8}$ und in Z. 16 $\frac{25}{24}$ heißen; vgl. *a. a. O.*, § 97, S. 36 und § 101, S. 37. 16 vocat: *a. a. O.*

nalium, circulo aequalium sumtis scilicet Hypocyclorum differentiis. Et junctis inter se differentiis respondentibus ex duabus seriebus Hypercyclorum et Hypocyclorum, omnium absolute habetur summa: etiam jungi possunt hae differentiae Hypocyclorum et hypercyclorum respondentibus differentiis spatiorum majorum et minorum, et fient series tum circulo aequales tum absolute quadrabiles. +)

Interim fatendum est, inquit spatiorum multorum faciliores esse calculationes quam multorum Hypercyclorum et Hypocyclorum, et inprimis in Hypocyclis haec est incommoditas, quod accessione rationum dimidiatarum numeri fiunt surdi. Sed si rationes superparticularizandae in Hypocyclis et multiplicandae in Hypercyclis dilatentur a terminis suis in medio positis ad alios arithmetice ordinatos extremos; ita ut differentia horum ad differentiam illorum, sit ut logarithmice ratio superparticularizata aut multiplicata ad simplicem, poterunt rationes horum extremorum *adoperarsi come per comporre gl'Hypocycli e gl'Hypercycli a comporre altri spatii quasi-Hypocycli e quasi-Hypercycli, ch'io chiamo parHypocicli e parHypercicli di calcoli non sordi, meno numerosi e piu facili e disposti in due serie piu d'appresso al circulo convergenti a cui s'accostano ma non arrivano mai.* Exempli causa: ratio 3 ad 4 inscripti quadrati ad primum minus spatium sesquialterata est 1 ad 1.5396 inscripti quadrati ad primum Hypocyclum. Dilatetur ad terminos $\frac{11}{4}$ et $\frac{17}{4}$, qui ita stabunt arithmetice ordinati (: id est ordine numerorum :) $\frac{11}{4}$. 3. 4. $\frac{17}{4}$. Ita ut differentia extremorum $\frac{6}{4}\Big|\frac{3}{2}$ sit ad differentiam mediorum 1. sesquialtera, erit ratio $\frac{11}{4}$ ad $\frac{17}{4}$ seu 11 ad 17 eadem cum ratione quadrati inscripti ad primum Parhypocyclum hoc est 1. ad 1.5454545 et dilatando 15 ad 16 ad secundum parhypocyclum, 1 ad 1.5672514. Eodem modo fiet ratio quadrati circumscripti ad primum parhypercyclum 2 ad 1,5789474. et ad secundum parHypercyclum 2 ad 1,5726496. etc. et erit primus parhypocyclus ad primum parhypercyclum ut 17 ⌢ 19 ad 11 ⌢ 2 ⌢ 15; et secundus Parhypocyclus ad secundum parhypercyclum ut productum ex 67 ⌢ 3 ⌢ 26 ad 57 ⌢ 4 ⌢ 23.

Sed ut ad praxin veniamus: Generaliter p r o b l e m a t a haec solvenda: dato numero ordinis parhypocycli invenire ejus rationem ad spatium justo minus proxime minorem in ordine locum tenens. Duplicetur numerus ordinis, dat p a r e m , addatur unitas

6 inquit: *a. a. O.*, § 104, S. 39. 12–16 *adoperarsi* ... *mai*: *a. a. O.*, § 105, S. 39.

dat disparem. Quadratum hujus disparis dimidia unitate multatum, quadruplicatum adjuncto postea et subtracto dispare, dat duos terminos rationis quae quaeritur.

P r o b l e m a s e c u n d u m dato numero ordinis, invenire rationem spatii aequaliter ordinati minoris ad majus. Duplicetur numerus ordinis adjungatur unitas et binarius habentur duo termini rationis quae quaeritur.

P r o b l. 3. dato numero ordinis parhypercycli invenire ejus rationem ad spatium justo majus proxime minore loco ordinatum. Duplicato numero ordinis et addita unitate ⟨fit —⟩ impar, addito binario par; quadratum impar multatum dimidia unitate quadruplicatum adjuncto ⟨postea et subtracto pare,⟩ dat ⟨duos⟩ terminos rationis quaesitae. In ordine ad Theoriam ⟨— — — —⟩ usque parHypocyclum et parHypercyclum, sumendo ⟨— — — — — — — ma⟩ximis etiam instrumentis, ⟨— — — — — — —⟩ Decimus parHypocycl⟨us et⟩ parHypercyclus hoc modo dant sex primas notas veras. Magis autem semper accedunt parHypocycli quam parHypercycli. Calculus iste est facilior quam polygonorum nec magis prolixus.

Sed pergit ad tradendam regulam generalem dilatandi rationes superparticulares numerorum quadratorum a terminis in medio positis ad alios extremos, dilatatione non alia quam arithmetica in ordine ad facilitatem calculi cujus regulae generalis sunt duae partes: prima quod quatuor terminorum rationis dilatatae defectus primi a quarto ad defectum secundi a tertio sit praecise vel quasi ut logarithmice ipsa ratio superparticularizata aut multiplicata ad suam simplicem. Hoc est in dilatatione rationis $\frac{4}{3}$ erit praecise vel quasi ut 3 ad 2 in dilatatione rationis $\frac{9}{8}$ erit praecise vel quasi ut 4 ad 2: altera pars est, ut in quatuor terminis rationis dilatatae defectus primi a secundo ad defectum tertii a quarto sit praecise vel quasi aequalis.

Sed hinc fiunt 4 regulae, prima ubi utraque regula praecisa, et haec est quam explicuimus per parHypocyclos et parHypercyclos; secunda regula facit regulam generalem praecisam in prima parte non in secunda. Tertia regula contrarium facit. Innumerabiles fingi possunt hoc modo species, sed ut inde usum ducamus ideo in secunda regula opus ut defectus primi termini a secundo sint majores semper defectibus tertii a quarto, alioqui ratio non foret magis dilatata quam in prima regula. In tertia regula defectus primi a 4to semper debet esse major quam est logarithmice ratio superparticularizata aut mul-

15–131,3 Sed . . . praecisa: vgl. *a. a. O.*, §§ 117–135, S. 43–50. 15 pergit: *a. a. O.*, § 117, S. 43 f.

tiplicata suae simplicis, et quod semper accedant versus ad aequalitatem. Quod innumerabilibus iterum modis obtineri potest. Et quarta regula est ut neque in una neque in altera parte regula generalis sit praecisa.

Jam ut ad praxin calculi veniat sumit rationem inscripti quadrati ad 99^{num} spatium minus. Ita invenit et spatium majus et parHypocyclos et parHypercyclos respondentes. Inde eligit unum casum regulae secundae, ejusque ope jam nova invenit spatia quae vocat Tetragonismos Hypercyclicos et Hypocyclicos; sed quia non nisi octo dant figuras, emendat has regulas speciales: tandemque hanc eligit emendationem. Fiat ut circiter supponitur diam. ad Circumf. 7 ad 22. alicujus horum ($\mathfrak{A}$) quadratorum paris aut imparis, centesimi ad aliud per hoc denominetur unitas. *S'aggiunga tal parte alla stessa radice accresciuta dell'unità, e sara questo l'antecedente emendato, che al binario hau*[*e*]*rà la ragione del difetto del primo dal quarto, al diffetto del secondo dal terzo.* Quo facto calculando invenit quadraturam in decem primis figuris eandem quam Ludolphus a Colonia.

4–13 Jam ... Colonia: vgl. *a. a. O.*, §§ 136–160, S. 50–60. 4 sumit: *a. a. O.*, § 136, S. 50. 5 invenit: *a. a. O.*, § 143 f., S. 52–54. 6 eligit: *a. a. O.*, § 145, S. 54. 6 invenit: *a. a. O.*, § 147, S. 54 f. 8 Fiat: *a. a. O.*, § 159, S. 59. 10–12 *S'aggiunga ... terzo*: *a. a. O.* 13 invenit: *a. a. O.*, § 160, S. 59 f. 13 Ludolphus a Colonia: LUDOLPH van Ceulen, *Vanden Circkel*, 1596; lat. Fassung *De circulo et adscriptis liber*, 1619.

14. DISSERTATIONIS DE ARITHMETICA CIRCULI QUADRATURA PROPOSITIONES SEPTEM

[Frühjahr 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 85–86. 2 Bl. 2°, die ursprünglich einen Bogen bildeten. 4 S. Text tlw. zweispaltig mit mehreren Einschüben und Umstellungen. Figuren tlw. mit mehreren Vorstufen. Geringe Textverluste durch Papierschäden.
Cc 2, Nr. 1233 B

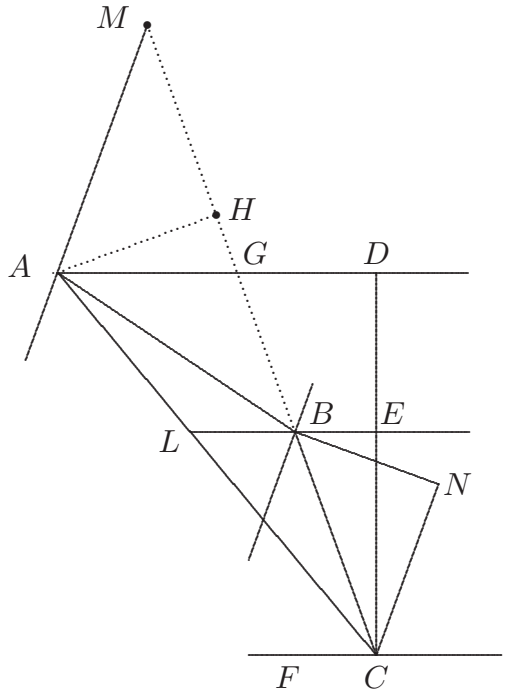
Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für April und Juni 1676 belegt. N. 14 ist vor N. 15 entstanden, das zusätzlich zu den sieben nummerierten Propositionen von N. 14 Aussagen enthält, die etwa prop. 8 u. prop. 14 von N. 20 entsprechen.

Prop. 1.

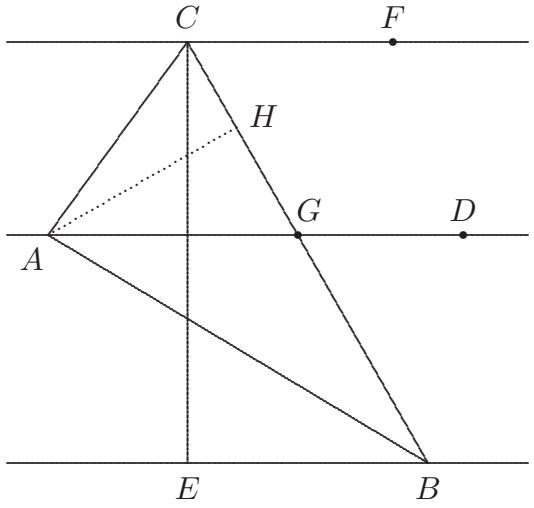
Si per Trianguli tres angulos totidem transeant rectae parallelae indefinitae, Triangulum erit dimidium Rectanguli sub intervallo duarum parallelarum, et sub portione tertiae parallelae, inter angulum per quem transit, et latus ei oppositum, si opus est, productum.

Sit Triangulum ABC. fig. 1. et 2., per cujus tres angulos transeant parallelae AD. BE. CF. Duarum, BE, CF, intervallum CE. Tertia parallela AD cujus angulo A oppositum Trianguli latus CB, productum si opus est, occurrat ipsi AD in G. Ajo Triangulum ABC, rectanguli sub AG et CE. dimidium esse. Ad ipsam CB productam quantum satis est, ex angulo opposito A, perpendicularis agatur AH. Angulus BGD vel HGA aequalis angulo CBE. Sunt ergo duo Triangula rectangula AHG, CEB, similia, eritque $CE : AH :: CB : AG$, sive rectangulum CE in AG aequabitur Rectangulo AH in CB. At Rectangulum AH in CB. duplum est Trianguli ABC cum sit factum scilicet ex basi ejus in altitudinem. Ergo et rectang. CE in AG Trianguli ABC duplum, sive Triangulum ABC rectanguli sub AG et CE dimidium erit. Q. E. D.

13 sub *(1)* intervallo inter angulum *(2)* segmento tertiae *(a)* inter angulum per qvem transit, et punctum qvo latus Trianguli *(aa)* huic *(bb)* angulo eius oppo *(b)* inde ab angulo per qvem transit, a producta *(3)* intervallo anguli in *(4)* portione *L*



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

S c h o l.

Cum infinitis modis in eodem Triangulo, et parallelae duci, et intervalla eligi possint patet omnia Rectangula, hujusmodi ut AG in CE. et BL in CD etiam fore aequalia inter se cum uni eidemque Triangulo duplo aequentur. 5

5 *Daneben:* Sequentes propositiones 2. 3. 4. 5. 6. praeterire potest, qui summum rigorem in demonstrandu prop. 7. non desiderat.

4 huiusmodi | ut AG in CE. et BL in CD *gestr. u. wieder gültig gemacht* | | et AM in BN *gestr.* | | etiam *erg.* | fore *L*

6 Sequentes propositiones: Die für den Beweis der ursprünglich als prop. 2 bezeichneten prop. 7 verwendeten prop. 2–6 sind von Leibniz sukzessive in umgekehrter Reihenfolge ergänzt worden.

Prop. 2.

Summa differentiarum seriei quantitatum ordine perturbato dispositarum major est summa differentiarum seriei quantitatum earundem ordine naturali dispositarum.

Sint termini quilibet ordine naturali dispositi: $A \quad A+B \quad A+B+C$
Differentiae $B \quad C$
summa differentiarum $B+C.$
Iidem termini ordine perturbato $A+B \quad A \quad A+B+C$
differentiae $B \quad B+C$
summa differentiarum erit $2B+C.$
Idemque in serie longiore saepius perturbata, saepius fiet. Ergo generaliter summa differentiarum in serie perturbata, major quam in naturali, quod erat propositum.

Prop. 3.

In serie quotcunque quantitatum, differentia extremarum non potest esse major summa differentiarum intermediarum.

Sit $A. \quad B. \quad C. \quad D. \quad E.$ nempe differentia inter A et B. sit f. inter B et C sit g. etc.
$f \quad g \quad h \quad l$
Denique differentia inter A et E sit m. Ajo m non posse esse majorem quam $f+g+h+l$. Nam termini $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ vel ordine recto collocantur, procedendo scilicet semper a minoribus ad majores, sive a majoribus ad minores, et tunc constat m esse

1 *Nebenbetrachtung auf der gegenüberliegenden Seite:* Si ordo qu⟨antitatum⟩ ⟨pertur⟩batus tunc vel ⟨medii⟩ sunt perturbati, extremi autem recte collocati sunt, uno scilicet eorum existente maximo altero minimo, vel etiam extremi sunt per⟨turbati.⟩ Si medii [*bricht ab*]

4 *(1)* Sint termini perturbati A A + B + C C C + A harum summa 2A + 2B + C
Differentiae B + C A + B A
(2) Sint L

1 Prop. 2.: Die prop. 2–5 gelten, da der durch den Absolutbetrag der Differenz definierte Abstand die Dreiecksungleichung (prop. 4) erfüllt, die Leibniz in der ersten Fassung korrekt beweist.

$f+g+h+l$. (Nam si verbi gratia E. sit minima, D erit $l+E$. et C erit $h+l+E$. et B erit $g+h+l+E$. et A erit $f+g+h+l+E$. Ergo $A-E$ erit $f+g+h+l$.) V e l o r d i n e p e r t u r b a t o p r o c e d u n t , ut si B quidem sit major quam A, sed C. minor quam B. et tunc m minor erit quam $f+g+h+l$. quod sic ostendo. Transponantur in ordinem naturalem, et summa differentiarum ut tunc stabunt aequabitur ipsi m, ut constat. Ea autem minor est priore, ordinis perturbati, per prop. 2. Ergo m ipsa summa differentiarum ordinis perturbati m i n o r erit cumque summae differentiarum terminorum naturaliter dispositorum sit a e q u a l i s . Hinc nullo casu summa differentiarum m a j o r , quod ostendere propositum erat.

[*Erste Fassung von prop. 4 und 5, gestrichen*]

P r o p. 4.

Differentia duarum quantitatum, non potest esse major summa differentiarum tertiae a singulis.

---

9 *Darunter mit Bezug auf prop. 2:* Superest ut probemus hoc.

12 f. *Nebenbetrachtung:* Ut si A sit 10. C. 4. E 12. b, erit 6. et d erit 8. et f erit 2. utique f sive 2. non erit major quam $b+d$ sive 14. Item si A sit 10. C. sit 5. E sit 2. b erit 5. d erit 3. et f erit 8. Jam $b+d$ etiam erit 8. Ergo nec sic quidem f major erit quam $b+d$. Haec est nimirum vel A. C. E. ordine stant naturali, ut scilicet a majoribus ad minora vel a minoribus ad [*bricht ab*]

1 f. Nam ... f + g + h + l *erg. L* 6 perturbati, *(1)* ut si sit $\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ 6. & 12. & 4. \\ & 6 \quad 8 & \\ & \text{f} \quad \text{g} & \end{array}$ utiqve major est f + g seu 6 + 8 seu 14. qvam si in ordinem naturalem colloces $\begin{array}{ccc} \text{B} & \text{A} & \text{C} \\ 12 & 6 & 4 \end{array}$ *(2)* qvia in ordine perturbato si verbi gratia sit $\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ 6 & 12 & 4 \\ & \text{f} \quad \text{g} & \\ & 6 \quad 8 & \end{array}$ *(a)* ut a 6 *(b)* si a 6 procedas *(aa)* ad 4 *(bb)* per 12 regrederis *(3)* per *L* 11 f. *(1)* p r o p. 2 *(2)* | p r o p. 2 *ändert Hrsg.* | *(a)* Si inter *(aa)* duas Qvantitates *(bb)* duos Terminos | A et C. *gestr.* | differentia minor aliqva qvantitate | b *gestr.* | et inter alios duos rursus minor alia qv *(b)* Si qva sit differentia qvantitatis unius ab alia, et rursus huius a tertia differentia primae a tertia non potest esse major summa duarum priorum differentiarum *(c)* Si tres sunt qvantitates differentia duarum, inter se *(d)* differentia duarum, | ex tribus *gestr.* | qvantitatum *L*

Differentia inter A et C sit b. et differentia inter C et E sit d. Ajo differentiam inter A et E quae sit f. non posse esse majorem quam $b+d$. Nam C vel minima trium maximave vel media est.

Sit C. minima maximave sive extrema; tunc aliqua reliquarum scilicet vel A ipsi propior media est. Ergo minor erit f differentia ex his duabus E $(1)^{\text{mo}}$ casu vel A $(2)^{\text{do}}$ scil. mediae ab altera A primo vel E secundo casu quippe quae tunc una extremis est quam ipsarum extremarum C et A primo vel C et E secundo quae scilicet est modo minor quam b. modo minor quam d. Ergo erit utroque casu minor quam $b+d$. Ergo non major.

Sin C media sit magnitudine inter A et E constat f differentiam inter A et E extremas fore $b+d$ exacte scil. summam differentiarum mediarum; non ergo major. Cum ergo f vel minor sit quam $b+d$ vel aequalis, nunquam major erit.

Corollarium

Si unius ex tribus quantitatibus differentia ab una reliquarum duarum sit minor b. ab altera minor d differentia duarum reliquarum erit minor quam $b+d$.

[*Zweite Fassung*]

Prop. ⟨4⟩.

Differentia duarum quantitatum non potest esse major summa differentiarum tertiae a singulis.

Nempe differentia inter A et C sit b. et inter C. et E sit d. et inter A et E sit f. Non potest f esse major quam $b+d$. quia in serie $A.\ \underset{b}{\ }\ C.\ \underset{d}{\ }\ E.$ non potest f differentia extremarum major esse $b+d$. summa differentiarum intermediarum per prop. 3.

Prop. 5.

Differentia duarum quantitatum minor est summa duarum aliarum quantitatum, quarum una unius, altera alterius priorum differentiam a tertia excedit.

12 f. erit *(1)* C o r o l l. Si differentia unius qvantitatis ab alia sit minor aliqvo et secundae a tertia rursus aliqvo differentia primae a tertia minor est summa duarum priorum differentiarum *(2)* Corollarium *L* 17 *(1)* ⟨C⟩oro⟨ll.⟩ prop. 3 *(2)* prop. ⟨4⟩ *L*

Id est si differentia A et C sit minor b (ut $\frac{1}{4}$). et C et E differentia sit minor d (ut $\frac{1}{2}$). differentia inter A et E erit minor quam $b+d$ (ut $\frac{3}{4}$). Nam summa differentiarum tertiae C, a singulis A et E. est quantitas minor quam b plus quantitate minor quam d. Est ergo minor quam $b+d$. Ergo et minor quam differentia ipsarum A et E per prop. praeced.

S c h o l.

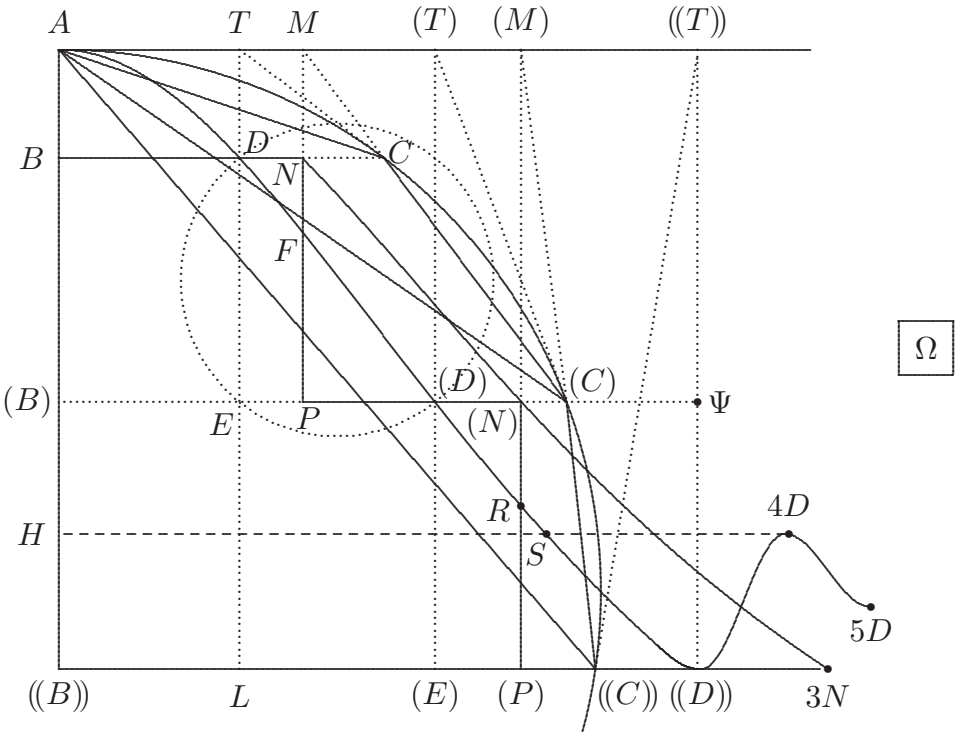
Has propositiones etsi valde claras attente consideranti, adjiciendas duxi tamen, tum quod servient ad facilem admodum per sola polygona inscripta sine circumscriptis, demonstrationem apagogicam qua sequenti propositioni utar; tum quod operae pretium videatur, ipsius per se differentiae proprietates con⟨s⟩idera⟨re⟩ quatenus ab excessu defectuque animo abstrahitur sive quando non exprimitur, quaenam ex differentibus altera major min⟨orve⟩ ⟨sit⟩.

⟨Pr⟩op. 6.

Si a quolibet curvae cujusdam $C(C)((C))$ propositae puncto C, ad unum anguli cujusdam recti TAB latus velut ad axem, AB. ducantur ordinatae normales $CB, (C)(B)$, ad alterum tangentes CT. $(C)(T)$, et ex punctis occursus tangentium T. (T) agantur perpendiculares TD. $(T)(D)$ ad earum ordinatas, et curva nova, $D(D)((D))$ per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat: Rursus si quaelibet in curva priore designata puncta sibi proxima et rectis inscriptis sive chordis

13 *Daneben:* Hujus propositionis lectio omitti potest, si quis in demonst. prop. 7 summum rigorem non desideret.

3 E. *(1)* ⟨minor⟩ | est qvam b+d, *nicht gestr.* |; *(a)* et *(b)* atqvi *(2)* est qvantitas minor b+q⟨—⟩ *(3)* est *L* 11 f. abstrahitur | sive . . . ⟨sit⟩ *erg.* |. *(1)* Et si hinc *(2)* porro seqvitur ex illis *(3)* Et eodem modo facile demonstrari posset, illud generale, si qvotcunqve sint qvantitates, *(a)* qvocunqve ordine collocatae *(b)* or⟨dine⟩ licet perturbato collocatae, differentiam extremarum ⟨—⟩ excedere summam differentiarum intermediarum; aeqv⟨alis⟩ ⟨—⟩ huic summae est, cum ordine naturali collocantur; minor ⟨—⟩ quam cum collocantur naturali | ut facile ostendi potest *erg.* |, ergo tunc minor est hac sum⟨ma⟩ ⟨—⟩ vel aeqvalis vel m⟨inor⟩ sit ⟨nunqvam⟩ major fi⟨—⟩ ⟨—⟩ *gestr.* | *L* 13 *(1)* ⟨Prop. 2⟩ *(2)* ⟨Pr⟩op 4 *L ändert Hrsg.* 20 prop. 3 *L ändert Hrsg.*



[*Fig. 3, HS4D in Blindzeichnung*]

$C(C)$. $(C)((C))$ jungantur, quae productae eidem cui tangentes Anguli illius recti Lateri, occurrant, et ex punctis occursuum M. (M) similiter perpendiculares MNP. $(M)(N)(P)$ ad duorum punctorum C. (C) vel (C). $((C))$ per quae transierant inscriptae ordinatas, nempe ad CNB et $(C)(D)(B)$ vel $(C)(N)(B)$ et $((C))(P)((B))$ demittantur quae ab ipsis inde ab axe portiones quasdam BN. $(B)(N)$ resecent. His ita positis, poterunt in curva priore puncta C. (C). etc. tam sibi vicina, tantoque numero assumta intelligi, u t s p a t i u m rectilineum gradiforme $N\,B\,((B))\,(P)\,(N)\,P\,N$. ex rectangulis $NB(B)$. $(N)(B)((B))$ sub ordinatarum resectis portionibus BN. $(B)(N)$ et intervallis $B(B)$. $(B)((B))$ comprehensis compositum a b i p s o s p a t i o mixtilineo $D\,B\,((B))\,((D))\,(D)\,D$, axe $B((B))$. ordinatis extremis $BD.((B))((D))$, et curva nova $D(D)((D))$, comprehenso; d i f f e r a t q u a n t i t a t e m i n o r e q u a v i s d a t a. Et eadem demonstratio locum habet in quovis alio spatio Gradiformi et

1 *Zur Figur:* $B(B)$ et $(B)((B))$ sunt fere aequales.

13–139,2 Et ... potest *erg. L*

Mixtilineo Gradiformi continua rectarum ad quendam axem applicatione formatis, adeoque Methodus indivisibilium Cavaleriana pro demonstrata haberi potest.

Ponantur ita assumi puncta C. in curva priore proposita, ut portiones C(C) vel $(C)(\!(C)\!)$ aliaeque similes inter duo vicina puncta intercepta sint singulae aut totae ascendentes, aut totae descendentes, non vero partim ascendentes partim descendentes; quod obtineri poterit, si in punctorum C. assumtorum numero sint omnia, si qua sunt, puncta reversionum. Hoc posito manifestum est curvam a D. ad (D) transire non posse, quin rectam NP inter ea puncta cadentem alicubi inter N et P. secet in F. alioqui enim ⟨ip⟩sam N vel P. circumire, et modo ascendere modo descendere deberet contra hypothesin. Rectam autem NP cadere patet, inter D et (D) quia et M inter T et (T) necessario cadit. His ita positis ajo primum, ipso Rectangulo $DE(D)$ minorem esse differentiam inter quadrilineum $DB(B)(D)D$ et rectangulum $NB(B)$ quod ⟨—⟩ Auferatur ab utroque quod utrique commune est, scilicet Quinquilineum $DB(B)PFD$, restabit ex rectangulo, trilineum $DNFD$. ex quadrilineo Trilineum $(D)PF(D)$. ⟨H⟩orum ergo residuorum differentia eadem cum differentia Quadrilinei et rectanguli. Generaliter enim eadem est differentia duarum quantitatum, et differentia residuorum ex ipsis sublata quantitate communi. Porro horum Trilineorum exiguorum differentia minor est eorum summa. Minor ergo multo magis eo quod eorum summa majus est, id est ipso Rectangulo $DE(D)$. Ergo et quadrilinei et rectanguli dicti differentia minor quam hoc rectangulum, quod primum susceperam probandum. Eodem modo probabitur Quadrilinei $(D)(B)(\!(B)\!)(\!(D)\!)(D)$ et rectanguli $(N)(B)(\!(B)\!)$ differentiam minorem rectangulo $(D)(E)(\!(D)\!)$. Et ita si alia quotcunque sequantur. Itaque generaliter Differentia summae exiguorum quadrilineorum id est totius Mixtilinei novi a summa omnium rectangulorum id est spatii inter ordinatas novas BD $(B)(D)$ etc. et eorum intervalla $B(B)$. $(B)(\!(B)\!)$ etc. contentorum minor erit summa omnium rectangulorum $ED(E)$. $(E)(D)(\!(E)\!)$ sub $E(D)$. $(E)(\!(D)\!)$ etc. differentiis ordinatarum novarum et earum intervallis $B(B)$. $(B)(\!(B)\!)$ etc. contentorum. ⟨—⟩ sumantur intervalla haec omnia inter se aequalia, foret summa horum rectangulorum aequalis rectangulo $EL(\!(C)\!)$ sub summa differentiarum $E(D)$ $(E)(\!(D)\!)$ etc. id est sub minima ma-

4 similes | inter . . . intercepta *erg.* | sint *(1)* ad easdem p *(2)* singulae ad easdem partes cavae, qvod fiet si inter puncta assumta sint omnia puncta flexuum contrariorum. Jam | singulaeqve *nicht gestr.* | aut accedentes totae versus axem, aut totae recedentes ab axe, non vero revertentes modoqve accedentes aut recedentes. Qvod obtinebimus *(3)* singulae *L* 13 ex qvadrilineo *L ändert Hrsg.* 14 ex rectangulo *L ändert Hrsg.*

ximaque eademque ⟨—⟩ ordinatae differentia BD. et $L((C))$ intervallo earum $B(B)$ ac EL constante comprehensa. Quia intervallum cum possit esse quantumlibet parvum, etiam hoc rectangulum cujus latus est, adeoque ⟨ta⟩m summa dictorum rectangulorum $DE(D)$ etc. quantumlibet exigua erit. Si foret $B(B)$ minus quam $(B)((B))$ summa rectangulorum $ED(E)$ et $E(D)((E))$ etc. adhuc minor foret quam rectang. $EL((C))$. Semper ergo summa horum rectangulorum adeoque et differentia spatii gradiformis et mixtilinei novi, quae ipsa minor ostensa est, erit quantitas aliqua quantumlibet parva, adeoque qualibet assignata minor reddi potest. Quod ostendendum erat.

Si curva aliqua transire intelligeretur, per omnia puncta N (N) $((N))$ adhuc facilius id demonstrabitur, quia et summa exiguorum Triangulorum ut $NP(N)$ etiam quavis data quantitate minor eodem modo reddi potest.

P r o p. 7.

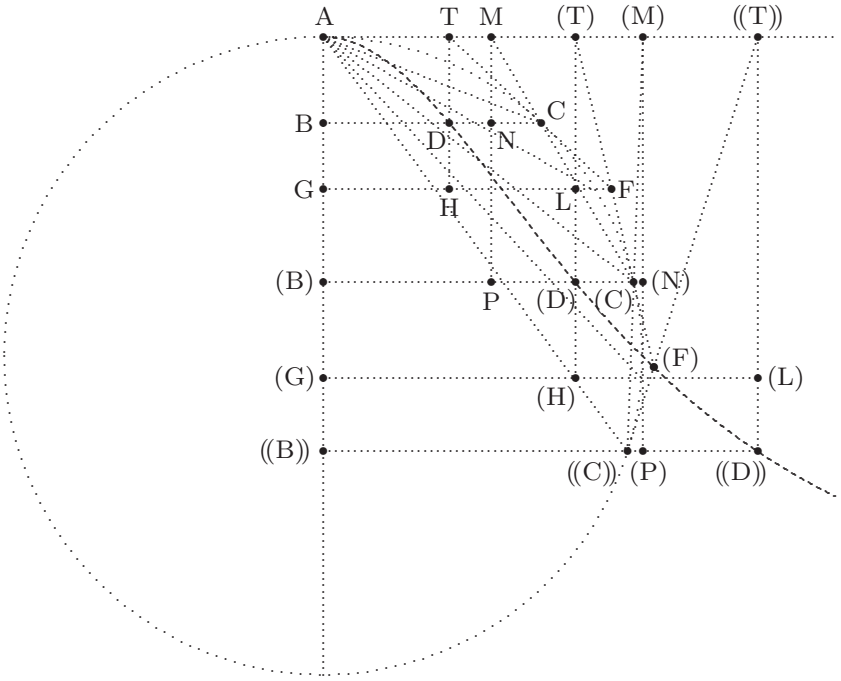
Si a quolibet curvae cujusdam propositae puncto ad unum anguli cujusdam recti latus ducantur ordinatae normales, ad alterum tangentes et ex punctis occursus tangentium agantur perpendiculares ad earum ordinatas si opus est productas, et curva alia per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat; erit spatium inter axem ordinatarum[,] duas ordinatas extremas, et curvam secundam comprehensum, spatii inter curvam primam et rectas duas ejus extrema cum anguli recti propositi centro jungentes, comprehensi, duplum.

Sit Curva proposita (fig. 3) $C(C)((C))$ a cujus punctis C. (C) etc. ad anguli recti TAB latus AT ducantur tangentes, CT. et ad alterum AB ordinatae normales CB. Ex T occursibus tangentium, perpendiculares TD ad ordinatas CB. demittantur, et per puncta intersectionum, D transeat curva $D(D)((D))$. Ajo spatium Mixtilineum $DB((B))\overset{\odot}{}((D))(D)D$ esse spatii Mixtilinei $CA((C))\overset{☽}{}(C)C$ duplum.

9–11 Si ... potest. *erg. L* 12 p r o p. *(1)* 2 *(2)* 3 *(3)* 7 *(4)* 7 *L*

Ponatur non esse duplum et differentia inter unum duplum et alterum simplum sit Ω. Inscribantur ipsi curvae $C(C)(\!(C)\!)$ polygona, quotcunque libuerit quantumcunque satis erit. Sitque ultimum ejusmodi inscriptum, $AC(C)(\!(C)\!)A$. Hujus latera $C(C)$ et $(C)(\!(C)\!)$ etc. producantur ut prius tangentes donec ipsi AT occurrant in M. (M). Unde demissae

1 sit *(1)* E.



Inscribantur et circumscribantur curvae C(C)(((C))) | qvaliacunqve *erg.* | polygona, donec ultimi inscripti et ultimi circumscripti differentia sit minor qvam E. sitqve ejusmodi inscriptum, AC(C)(((C)))A et circumscriptum ACF(F)(((C)))A. Ex punctis F(F) ducantur in axem AB. perpendiculares FG. F(G) qvae productae si opus est, demissis ex occursu tangentium | TD. (T)(D) *erg.* | productis si opus est occurrant in punctis *(a)* H. (H) *(b)* H. L. (H). (L) Manifestum est ex propositione praecedenti, rectangulum *(aa)* BGH *(bb)* DBGH esse duplum Trianguli ACF; et eodem modo Rectang. LG(G)H. Trianguli AF(F), *(aaa)* et Rectang. *(aaaa)* G(((B))) *(bbbb)* (((B)))(G)(H) *(bbb)* (idemqve foret de caeteris si qvi in figura seqverentur;) deniqve | Rectang. *erg.* | (L)(G)(((B)))(((D))) Trianguli A(F)(((C))) adeoqve spatium *(aaaa)* scalar *(bbbb)* gradiforme *(aaaaa)* L(((B)))(((D))) *(bbbbb)* DB(((B)))(((D)))(L)(H)LHD ♂ duplum polygoni circumscripti ACF(F)(((C)))A ♃ Adeoqve maius duplo sectoris curvilinei AC(C)(((C)))A. Jam Latera Polygoni inscripti *(2)* Ω *L*

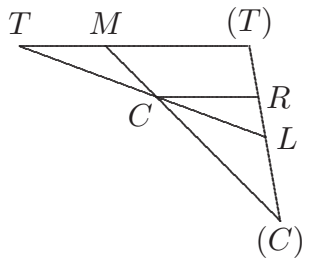
1 Bei der Figur in der zugehörigen Lesart sind alle Linien in Blindtechnik gezogen.

perpendiculares MNP vel $(M)(N)(P)$ secent ipsas BNC. $(B)P(C)$ vel ipsas $(B)(N)(C)$. $(\!(B)\!)(P)(\!(C)\!)$. Et ponamus inscriptionem polygonorum eousque productam, donec polygoni inscripti $AC(C)(\!(C)\!)$ differentia a Mixtilineo proposito $CA(\!(C)\!)(C)C$, item spatii gradiformis $BNP(N)(P)(\!(B)\!)$ differentia a M i x t i l i n e o n o v o $DB(\!(B)\!)(\!(D)\!)(D)D$ sit minor quam quarta pars ipsius Ω. Jam patet e x P r o p o s i t i o n e 1 Trianguli $AC(C)$ duplum esse rectangulum $NB(B)N$, et Trianguli $A(C)(\!(C)\!)$ duplum esse Rectangulum $(N)(B)(\!(B)\!)N$ et ita de caeteris si qua sint, ergo et summa Rectangulorum hujusmodi quotcunque seu s p a t i u m g r a d i f o r m e , duplum erit summae omnium ejusmodi Triangulorum seu polygoni inscripti. Jam ex constructione differentia inter Mixtilineum novum et spatium gradiforme id est ut probavi duplum polygonum inscriptum minor est quam $\frac{1}{4}\Omega$. et inter Polygonum ⟨inscri⟩ptum duplum, et duplum Mixtilineum propositum minor quam $\frac{1}{2}\Omega$ (quia ex constructione inter ipsa simpla minor quam $\frac{1}{4}\Omega$). Ergo per p r o p. 5 inter ⟨du⟩plum Mixtilineum novum et duplum mixtilineum propositum minor necessario quam Ω. ⟨— — — —⟩

---

5 *Darüber:* De polygono constat. De spatio Gradiformi qui rigorem desiderabit inveniet demonstratum prop. praeced.

14 *Nebenbetrachtung:*



2 (\!(B)\!)(P)(\!(C)\!) *(1)* erit eodem plane | ratiocinandi *erg.* | modo spatium gradiforme NB(\!(B)\!)(P)(N)PN ♀ duplum polygoni inscripti AC((C))A ☿ Sit pol *(2)* Et *L* 5 P r o p o s i t i o n e *(1)* praecedenti *(2)* 1 *L* 13 Ergo *(1)* inter ⟨du⟩plum Mixtilineum novum et duplum Mixtilineum propositum minor necessario qvam inter Ω | per p⟨rop.⟩ ⟨p⟩raeced. *erg.* | ⟨—⟩ generaliter enim patet si inter A et E differentia | minor *(a)* qvam hoc loco $\frac{1}{4}\Omega$ *(b)* hoc loco qvam $\frac{1}{4}\Omega$ *erg.* | b. et inter *(aa)* D et F *(bb)* C et E ⟨— —⟩ minor qvam d, | hoc loco qvam $\frac{1}{2}\Omega$ *erg.* | fore inter A et E minorem ⟨qv⟩am b plus d. id est ⟨q⟩vam $\frac{3}{4}\Omega$. *(2)* per p r o p. *(a)* p r a e c e d. *(b)* 5 *L* 16 prop. *(1)* 4. *(2)* praeced *L*

S c h o l.

Solent in Demonstrationibus Apagogicis adhiberi ⟨inscripta⟩ pariter et circumscripta Polygona; cum vero alterutrum hoc loco sufficere viderem, non putavi omittendam demonstrandi formam, quae exemplo esse posset aliquando ad Geometrarum demonstrationes servato robore, contrahendas. Hoc jam theorema inter generalissima et foecundissima Geometriae jure merito censeri potest; novum enim aperit contemplandi campum; et ut mox patebit non tantum omnes hactenus notas quadraturas statim conficit, sed et alias infinitas quotcunque sola applicatione ad exempla facta, exhibere potest tentanti. Locum enim habet in curvis quibuscunque etiam quas casu aliquis aut manuum errore describeret. Ego in circulo figurarum simplicissima, ut decet, expertus, statim nactus sum, quod hac dissertatione in lucem produco. Porro et Geometriae indivisibilium insignem hinc Promotionem sperare licet. Quoniam hactenus soliti sunt Geometrae spatia tantum

---

$E \sqcap$ Polyg. ext. $I \sqcap$ Polyg. int. $T \sqcap$ Spatium Trilineum datum, sc. Sector. $Q \sqcap$ Spatium Quadrilineum seu absegmentum.
$SE \sqcap$ Scalare seu Gradiforme Spatium polygoni exterior. $SE \sqcap 2E$. $SI \sqcap$ Scalare seu gradiforme spat. polygoni interioris. $SI \sqcap 2I$.
$T \overset{(1)}{\sqcap} E - b\,\Omega$ ex constructione. $T \overset{(2)}{\sqcap} E$. $\dagger\, 2T \,\dagger\, Q \overset{(3)}{\sqcap} \Omega$. $c\,\Omega \overset{(4)}{\sqcap} Q - 2E$. $Q \overset{(5)}{\sqcap} 2E$.
T consistit inter E majus et $E - [b]\Omega$ minus. Ergo explicando E, quia T majus quam $E - b\,\Omega$. per 1 erit et majus quam id quod est minus quam E, scil. per 4 $\dfrac{Q - c\Omega}{2}$. Ex 2 et 5. $Q \overset{(7)}{\sqcap} 2T$. Ergo 3 ita reformanda, $Q \overset{(8)}{\sqcap} 2T + \Omega$. $T \overset{(9)}{\sqcap} I + d\,\Omega$. $I \overset{(10)}{\sqcap} T$. $Q \overset{(11)}{\sqcap} 2I$. $E \overset{(12)}{\sqcap} I$. $I + d\,\Omega \sqcap E$.

5 contrahendas. | Non putavi opus ostendere generaliter, qvod polygona ejusmodi vel spatia gradiformia eousqve continuari possint, donec minus differant a curvilineis suis, qvam qvantitas qvaelibet proposita; *(1)* id enim *(2)* cum ab aliis toties et ostensum sit et usurpatum, et cuivis inspicienti manifestissimum. *gestr.* | Hoc *L* 8–10 Locum ... describeret *erg. L*

---

6 novum ... campum: vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 170: „infinitae speculationis campus aperitur“.

per ordinatas parallelas resolvere in parallelogramma, cum nos fortasse primi hoc loco ordinatarum ad unum idemque punctum convergentium usum doceamus in quadraturis, quibus figurae generaliter in Triangula resolvantur. Rectissime enim a Pascalio in Conicis admonitum est convergentes rectas non minus censeri debere ordinatas quam rectas parallelas. Cum et parallelae possint species convergentium haberi, quarum punctum concursus infinite absit. Sed plura de his fortasse aliquando, cum generalissima quaedam inventa tractabimus, nunc institutum prosequamur.

Definitiones

C u r v a r e g u l a r i s est cujus omnia puncta per certam quandam regulam universalem unicam inveniri possunt. Qualis non est quae manibus pro arbitrio ducitur.

C u r v a A n a l y t i c a est cujus omnia puncta inveniri possunt per regulam relatione tantum analytica constantem. R e l a t i o n e m autem a n a l y t i c a m , quaecun-

3 qvibus ... resolvantur *erg. L* 3 enim *(1)* a Pascalio in Conicis *(2)* a Desarguesio et Pascalio admonitum est convergentes *(3)* a *L* 9–145,6 *(1)* F i g u r a m | planam *erg.* | A n a l y t i c a m voco, cuius ordinatarum ad abscissas relatio *(a)* qvadam aeqvatione explicari potest *(b)* certa universalis analytica est. O r d i n a t a e | hoc loco *erg.* | sunt rectae *(aa)* parallelae inter *(bb)* infinit⟨ae⟩ *(aaa)* utrinqve ad figurae terminum aut convergentes *(bbb)* utrinqve cum figura terminatae, convergentes *(aaaa)* aut parallelae (qvoniam parallelae haberi possunt pro convergentibus qvorum punctum *(bbbb)* parallelae *(cccc)* parallelae *(dddd)* ad unum punctum, qvod si infinitae abesse intelligatur sunt parallelae. Cum utrinqve *(aaaaa)* terminatas *(bbbbb)* cum figura terminatas dico, ho *(2)* F i g u r a p l a n a est *(a)* spat *(b)* pars plani *(c)* superficies plana ubiqve terminata. *(aa)* ubiqve *(bb)* id est; ut nulla in ea duci possit recta, qvae non producta ita cadat extra ipsam, ut nunqvam redeat | ad *erg.* | ipsam. *(aaa)* Figura *(bbb)* vel qvae linea qvadam lineisve includitur *(3)* Curva omnis est *(4)* Linea omnis aut incerta aut certa est *(5)* C u r v a ... a u t e m a n a l y t i c a m *(a)* video *(b)* voco, qvaecunqve *(aa)* per solas operationes magnitudinum generales *(bb)* expressiones *(cc)* relationes; s⟨uu⟩m *(dd)* ex ... ratio, *(aaa)* potentia, radix, expo⟨nen⟩s *(bbb)* analogia, *(aaaa)* potentia, factus multiplus, *(bbbb)* factor ... Relatio *(aaaaa)* analytica *(bbbbb)* geometrica ... exhibet. *erg. L*

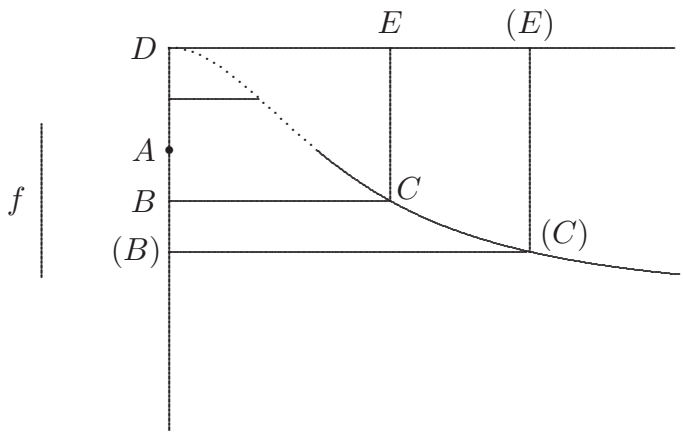
---

3 f. in Conicis: Leibniz bezieht sich wohl auf Bl. Pascal, *Essay pour les coniques*, 1640, def. 1 (*PO* I S. [252]), und in der Stufe *(2)* der zugehörigen Lesart auf G. Desargues, *Brouillon project*, 1639, S. 1, aus dem die Definition bei Pascal fast wörtlich übernommen ist. Leibniz hat in den Papieren aus dem Nachlass von Pascal, die er von Januar bis August 1676 zur Einsicht hatte, zwei Exemplare des *Essay*, eines Einblattdruckes, gefunden und eines davon behalten (vgl. III, 1 N. 90 S. 590). Auf der Rückseite dieses Blattes (LH 35 XV 1 Bl. 10) hat Leibniz einige Bemerkungen zu Desargues' *Brouillon* notiert (Cc 2, Nr. 1497, gedr. in Gerhardt, *Desargues und Pascal*, 1892. S. 196 f.).

que ex generalibus magnitudinum relationibus constat adeoque tam lineis quam numeris, aliisque quibuscunque rebus quantitatis capacibus accommodari potest. Talis relatio est, summa, differentia, excessus, defectus, ratio, analogia, factor, factus multiplus, quotiens; rationis multiplicatio, potentia, radix, aequatio. Relatio geometrica est, quae non calculo sive magnitudine sola, sed certis quibusdam assumtis spatiis sive lineis quaesitum exhibet.

C u r v a m A n a l y t i c a m a e q u a b i l e m voco, cujus ordinatarum ad abscissas relatio certi gradus aequatione explicari potest.

C u r v a G e o m e t r i c e haberi dicitur quando quocunque exacte adeoque motu continuo[,] nam si tantum punctis designetur etiam polygonum ei inscriptum vel circumscriptum solummodo habebitur[,] describi potest.



[*Fig. 4*]

Sit curva quaedam $C(C)$. et pro Directrice, ut vocavit Wittius sumatur recta quaelibet $AB(B)$ in qua designetur punctum fixum A. quod vocabimus v e r t i c e m et ductis ex punctis C ad directricem $AB(B)$ ordin⟨atis⟩ CB. $(C)(B)$ inter se parallelis, (: quae si normales sint, Directrix vocabitur A x i s :) ipsae AB vocabuntur a b s c i s s a e , ex axe sive directrice, BC ad directricem o r d i n a t a e , vel ordinatim applicatae, quarum

7 aeqvabilem *erg. L* 9–11 *(1)* G e o m e t r i c a m *(2)* C u r v a ... potest. *erg. L* 13 pro ... sumatur *erg. L*

13 vocavit: J. de Witt, *Elementa curvarum linearum*, 1659, *DGS* II S. 159.

duarum, AB, ad respondentem BC, vel $A(B)$ ad respondentem $(B)(C)$ si una constanti in omnibus locum habente aequatio⟨ne⟩ certi gradus explicari potest, ut si quadratum ab AB in certa⟨m⟩ ⟨par⟩ametru⟨m⟩ ductum, aequetur perpetuo Cubo a BC, qualis aequatio ad certum usque gradum cubicum scilicet ascendit, tunc curva $C(C)$ vocabitur a nobis
5 A n a l y t i c a a e q u a b i l i s.

Scio a Cartesio Curvas hujusmodi aequabiles solas haberi Geom⟨etricas⟩. Ego libenter sequor exemplum tanti viri, nisi magna sit ratio in adversum. Veteres nihil pro satis Geometrico agnoscerent, quod non recta circuloque perageretur. Necessitas tamen jam inde a Platonis tempore ad composita magis instrumenta compulit, effectionesque, ut
10 appellabant, Organicas, quasi non et Regula Circinusque organa essent. Unde factum est, ut curvas quae per organa describuntur, cum iis quae omnino non sunt in potestate aut quae curvarum in rectum extensione fiunt, confuderint, usque adeo, ut vir summus Franciscus Vieta non magis recipiendam duceret inventionem duarum mediarum per Conicas, quam Tetragonismum per Helicis tangentem. Quasi vero Helix, nisi supposita
15 Circuli Materialis elaboratione, sit in potestate. Circulum autem materialem elaborare, pro describenda Helice ad quadraturam serviente ridiculum est, cum breviore opera si sic agendum sit, per filum ipsi materiali circulo circumligatum dimensio circumferentiae adeoque et quadratura habeatur. Neque id voluit Archimedes, cui theorema praeclarum

7 viri, | praesertim cum de *(1)* loqvendi *(2)* phraseologin formulis agitur; *gestr.* | nisi *L*
7 adversum. | *(1)* Utile enim judico *(2)* Vellem enim, ut tandem aliqvando certas *(a)* loqvendi ⟨et⟩ si nova *(b)* loqvendi ac designandi formulas *(aa)* im⟨—⟩ *(bb)* novis inventis congruentes inter Geometras recipi, ut planius imposterum ac liqvidius omnia decurrant, et ut | qvemadmodum *erg.* | in veterum scriptis usu venit; omnes ab omnibus intelligantur. Cavendum tamen ne qvid recipiatur qvod | aliqvando *erg.* | praejudicet veritati, apud *(aaa)* suetos *(bbb)* homines res verbis metiri suetos. *gestr.* | *(3)* Veteres *(4)* ad ipsum usqve summum Virum Franciscum Vietam, veteres nihil habebant *(5)* veteres *L* 12 aut qvae *(1)* id qvod qvaeritur aliarum *(2)* curvarum ... fiunt *erg. L*

---

6 Geom⟨etricas⟩: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 21; zum Folgenden vgl. *a. a. O.*, S. 17 bis 24. 9 a Platonis tempore: Leibniz bezieht sich vermutlich auf die Vorschläge zur Lösung des Problems der Würfelverdopplung, von denen einer auch Platon zugeschrieben wurde; vgl. Eutokios, *Commentarii in libros Archimedis*, gedr. in *AO* III S. 66–71; vgl. auch die Darstellung in Fr. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593, cap. I u. II, Bl. 1r°–2v° (*VO* S. 347–350). 13 Vieta: *a. a. O.* Bl. 1 u. 5r°–6r° (*VO* S. 347 f. u. 355 f.); vgl. auch Fr. Viète, *Supplementum geometriae*, 1593, Bl. 13r° (*VO* S. 240), u. *ders., Apollonius Gallus*, 1600, Bl. 1r° (*VO* S. 325). 18 theorema praeclarum: Archimedes, *De lineis spiralibus*, prop. XVIII.

quo relatio inter Helicem et quadraturam explicatur dare satis erat. At vero duarum Mediarum inventio per Conicas omnino Geometrica, id est non tantum exacta sed et perfectissima, et simplicissima est, ut constat. Generaliter enim id vide⟨tur⟩ jure Geometricum appellari, quod exacte fit, et simpliciori operandi genere fieri non potest. Et his simil⟨ibus⟩ argumentis recte a Cartesio et discipulis evictum est, esse ⟨conica⟩s quoque imo et altiores, modo aequabiles, in Geometriam recipiendas.

⟨—⟩ibus argumentis nunc utemur in ipsos, ut ostendamus Geometricas censeri debere quaecunque exacte describi possunt, etsi neque analyticas neque aequabiles. Nam et ipsi, quod exactum sit, Geometricum esse fatentur. Quod si ergo ostendam esse problemata in rerum natura, quae Curvis quas Cartesius Geometricas nos Analyticas aequabiles appellamus, solvi non possint, jam satis patebit, alias quae satisfaciant problemati, in Geometriam, eo ipso quo Cartesius in veteres argumento usus est, recipiendas esse. Talia autem problemata multa sunt, et memoranda, unum adducere suffecerit. Sint tres rectae, A. B. C. quaeritur quarta D. quae sit ad A. in multiplicata ratione B ad C. Ajo si B et C sint incommensurabiles, problema per Curvas a Cartesio in Geometriam exclusis aliis receptas, cujuscunque sint gradus, aut quocunque inter se numero misceantur, solvi non posse. Quod mirum illis fortasse videbitur, qui spreto aliorum autorum commercio, apud unum quemcunque summum licet virum inveniri cuncta posse arbitrantur.

Hanc digressionem etsi sequentibus minime necessariam adjeci ut admonerem, nondum omnia ne in Geometria quidem occupata esse. Porro Curvas quarum descriptio non

8 etsi ... aeqvabiles *erg. L* 9 fatentur. *(1)* Sane si *(2)* Certe si rem ad vivum resecemus omnis linea qvae in Geometriam cadit, Geometrica erit, illis solis exceptis qvae nulla regula sed | ut nobis videtur *erg.* | casu describuntur. Qvanqvam et illae revera semper certa ratione a natura elaborentur, et proprietates nobis incognitas habeant, et sint theorema Geometrica, (qvalia nostrum novissimum est) qvae ad ipsa qvoqve extendantur. Ita ut *(a)* revera dici *(b)* de constructione tantum qvaestio videatur, Geometrica scilicet, an Physica, an vero Mechanica sit. Geometrica est, qvae in nostra est potestate ut circuli per radium circa centrum, Hyperbolae aut Ellipseos per fila; Physica est exacta qvidem sed nobis inimitabilis ut *(aa)* qvae paramet *(bb)* si *(aaa)* natura *(bbb)* gravia *(ccc)* projecta parabolam describere intelligantur. Mechanica *(aaaa)* est, cum curvae, aut s *(bbbb)* sunt species ut curv *(3)* Qvod *L*
17 f. apud *(1)* Cartesium *(2)* unum ... virum *(a)* Renatum Cartesium *(b)* inveniri *L* 19–148,3 Hanc ... erit *erg. (1)* F i g u r a *(2)* C u r v a A n a l y t i c a s i m p l e x *(a)* est *(aa)* cuius *(bb)* cuius aeqvatio ad duos terminos *(b)* a *L*

5 a Cartesio et discipulis: Leibniz bezieht sich neben R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 17–20, wohl vor allem auf Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 167–169, u. J. de Witt, *Elementa curvarum linearum*, *DGS* II S. [156 f.]. 9 fatentur: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 18.

nisi per puncta habetur, eas Geometricis non accensio, revera enim non habentur nisi eorum polygona. Quae omnia fusius explicare alterius operae erit.

C u r v a A n a l y t i c a s i m p l e x a me vocatur, cujus natura per aequationem duorum tantum terminorum explicari potest.

Ut si in fig. ... abscissa DB sit y, ordinata x. Et recta quaedam constans sive parameter forinsecus assumta f. Sitque fy aequalis x^2. sive rectangulum sub f et y aequale quadrato ab x sive BC ad $(B)(C)$ in duplicata ratione DB. [ad] $D(B)$. Curvam $C(C)$ voco simplicem, quia aequatio fy aeq. x^2. est duorum tantum terminorum. Si in DE ipsi DB normalem demittantur ordinatae CE ex punctis curvae C. erit ordinata $CE, y_{[,]}$ abscissa DE, x, et manente eadem enuntiatione analytica, mutabitur enuntiatio Geometrica, dicemusque ordinatas $CE, (C)(E)$ esse in subduplicata ratione abscissarum $DE, D(E)$. Hinc autem facile patet, quandocunque ordinatae vel earum potentiae, sunt inter se in multiplicata secundum numerum ad numerum, ratione directa, vel reciproca, abscissarum, vel potentiarum ab ipsis, tunc Curvam appellari, stylo meo, A n a l y t i c a m a e q u a b i l e m s i m p l i c e m. Quarum et Tabulam exhibere facile est:

Aequationes curvarum quarum ordinatae x in ratione
Directa

	simplici	duplicata	triplicata	quadruplicata
abscissarum, y.	$x \sqcap y$	$fx \sqcap y^2$	$f^2x \sqcap y^3$	$f^3x \sqcap y^4$
Quadratorum ab abscissis:	$x^2 \sqcap fy$	$x^2 \sqcap y^2$	$fx^2 \sqcap y^3$	$f^2x^2 \sqcap y^4$
Cuborum	$x^3 \sqcap f^2y$	$x^3 \sqcap fy^2$	$x^3 \sqcap y^3$	$fx^3 \sqcap y^4$
Quadrato-quadratorum	$x^4 \sqcap f^3y$	$x^4 \sqcap f^2y^2$	$x^4 \sqcap fy^3$	$x^4 \sqcap y^4$

15 *Nebenbetrachtung:* Aequatio generalis omnium analyticarum simplicium ita formari potest $f^v x^{z-v} \sqcap y^z$ ubi si z major qvam v sunt directae, sin minor sunt reciprocae. Sit enim $z \sqcap 2.$ et $v \sqcap 1.$ erit $f^v x^{z-v} \sqcap y^z$ id⟨em⟩ quod $f^1 x^{2-1} \sqcap y^2$ seu $f^1 x^1 \sqcap y^2$. Si vero sit $v \sqcap 2.$ et $z \sqcap 1.$ erit $z - v \sqcap -1$. Jam subtractio logarithmorum sive exponentium denotat divisionem quantitatum, ergo x^{-1} idem est quod $\frac{1}{x^1}$. et x^{-2} idem quod $\frac{1}{x^2}$. Ergo si $v \sqcap 2.$ et $z \sqcap 1.$ erit $f^v x^{z-v} \sqcap y^z$ idem quod $\frac{f^2}{x} \sqcap y$, seu $f^2 \sqcap xy$.

5 fig. ... : s. o. Fig. 4.

Reciproca

	simplici	duplicata	triplicata	quadruplicata
abscissarum	$f^2 \sqcap xy$	$f^3 \sqcap xy^2$	$f^4 \sqcap xy^3$	$f^5 \sqcap xy^4$
quadratorum ab abscissis:	$f^3 \sqcap x^2y$	$f^4 \sqcap x^2y^2$	$f^5 \sqcap x^2y^3$	$f^6 \sqcap x^2y^4$
Cuborum	$f^4 \sqcap x^3y$	$f^5 \sqcap x^3y^2$	$f^6 \sqcap x^3y^3$	$f^7 \sqcap x^3y^4$
Quadrato-quadratorum	$f^5 \sqcap x^4y$	$f^6 \sqcap x^4y^2$	$f^7 \sqcap x^4y^3$	$f^8 \sqcap x^4y^4$

quae tabula in infinitum continuari potest. Ubi tandem notandum redire saepe hoc modo easdem curvas duas, ob causas, depressionem et permutationem. Ob depressionem scilicet quod aliquando evenit ut extractione deprimi possit aequatio, ut extractione radicis quadraticae aequatio $x^2 \sqcap y^2$. exhibet aequationem $x \sqcap y$. et $f^2x^2 \sqcap y^4$ dat $fx \sqcap y^2$. Extractione vero radicis cubicae $x^3 \sqcap y^3$, dat $x \sqcap y$. et $f^6 \sqcap x^3y^3$, dat $f^2 \sqcap yx$. Ob permutationem quod quae antea de abscissis dicebantur postea dicantur de ordinatis, et viceversa, quae non mutant speciem curvae, quia in nostro arbitrio est, alterutram earum x vel y. pro ordinata vel abscissa sumere, ut supra exemplo ostendi. Et patet eandem specie dari aequatione $x^2 \sqcap fy$. quae datur aequatione $fx \sqcap y^2$. et ejusdem specie curvae esse aequationes $f^3 \sqcap xy^2$. et $f^3 \sqcap x^2y$. Haec omnia in prima Analyseos symbolicae elementa callenti adeo manifesta sunt, ut ultra explicando hic tempus perditurum credam. Has curvas quidam generali nomine paraboloeides appellant omnes, alii rectius directas appellant Paraboloeides, reciprocas Hyperboloeides. Primaria enim in illis Parabola Conica, cujus aequatio $fx \sqcap y^2$ in his Hyperbola Conica, cujus aequatio est $f^2 \sqcap xy$. Caeterum sunt egregii quidam Geometrae etsi ut arbitror pauci qui suspicantur plerasque harum linearum imaginarias esse, nec reapse exhiberi posse adeoque licet puncta ⟨—⟩ earum quotlibet possint inveniri, non ideo tamen dari posse omnia, ⟨—⟩ posse nos fingere motum continuum, quo revera describantur ⟨— —⟩ occurratur, et ut stabiliatur haec Geometriae non poenitenda accessio ⟨— — —⟩ dubitationum genus, ostendam exemplo, quomodo Parabola Cubica ⟨— — —⟩ ⟨—⟩atim dubitatam memini, describi possit.

17 f. credam. *(1)* Cur autem symbola rejiciantur, causam nullam video, nam et ad commode enuntiandum, et ad *(a)* elegante *(b)* breviter inveniendum magno usui |esse *erg.*| dubitari *(aa)* non potest. *(bb)* potest non nisi ab inexpertis *(cc)* non potest. Constat enim Problemata qvaedam adeo difficilia atqve implicata esse, ut artibus pure Geometricis, hactenus certe notis, tractari *(aaa)* ⟨neqveant⟩ *(bbb)* non nisi maximo labore possint. Tametsi vicissim non negem, esse qvae multo facilius Geometria pura qvam calculo *(aaaa)* conficiantur *(bbbb)* inveniantur au⟨t⟩ demonstrentur. *(2)* Has *L* 21 etsi . . . pauci *erg. L*

Primum illud admonebo ad firmitatem eorum quae dicemus in sequentibus non esse necesse, ut describatur linea continuo motu. Quoniam enim datis quotcunque lineis totidem aliae quae sint in triplicata priorum ratione exhiberi possunt; non video quid prohibeat cuilibet abscissae applicatam hujusmodi lineam fingi adeoque curvam concipi quae earum terminos transeat, ejusque proprietates ex supposita constructione considerari.

15. PROPOSITIONES ET DEFINITIONES PRO QUADRATURA ARITHMETICA CIRCULI

[Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 55–56. 1 Bog. 2°. Ca $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 55 r° zweispaltig (linke Spalte komplett beschrieben, einige Ergänzungen in der rechten Spalte). Auf Bl. 56 N. 16_1 und 16_2 sowie VII, 1 N. 34.
Cc 2, Nr. 1233 D

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum März – August 1676 belegt. Die Stücke N. 16_1, 16_2 und VII, 1 N. 34 dürften etwa im Juni entstanden sein (s. N. 16). N. 15 ist vermutlich als erstes auf dem Bogen notiert worden. N. 15 ist nach N. 14 (s. dort) und vor der umfangreicheren Ausarbeitung N. 20 (Wasserzeichen belegt für den 8. Juni 1676) entstanden. Die in S. 153 Z. 19 f. ergänzten Seitenzahlen beziehen sich vermutlich auf eine nicht gefundene paginierte Ausarbeitung der Abhandlung im 4°-Format.

Prop. 1. Si per Trianguli tres angulos: etc:

P r o p. 2. Summa differentiarum seriei quantitatum ordine perturbato dispositarum est major summa differentiarum seriei quantitatum earundem ordine naturali dispositarum.

P r o p. 3. In serie quotcunque quantitatum differentia extremarum non potest esse major summa differentiarum intermediarum.

P r o p. 4. Differentia duarum quantitatum non potest esse major summa differentiarum tertiae a singulis.

P r o p. 5. Differentia duarum quantitatum minor est summa duarum aliarum quantitatum, quarum una unius altera alterius priorum differentiam a tertia excedit.

P r o p. 6. Si a quolibet curvae cujusdam propositae $C(C)((C))$ etc.

P r o p. 7. Si a quolibet curvae propositae puncto ad unum [etc.]

21 f. singulis. | prop. *(1)* 5 *(2)* 6 Si a qvolibet curvae cujusdam propositae C(C)((C)) etc *gestr.* | prop. 5. *L*

Corollar. Iisdem positis si figurae propositae vertex sit punctum anguli recti, area figurae novae aequabitur segmento prioris duplicato. S e g m e n t u m voco spatium recta curvaque comprehensum. Hinc Figuram novam imposterum vocabimus Figuram segmentorum ejusque curvam Lineam segmentorum.

Definitiones.

C u r v a r e g u l a r i s.

Curva Analytice expressa est (analytice non-geometrice curva Wallisii).

Curva Geometrice expressa.

C u r v a r e a l i s est, quamcunque constat esse in natura rerum, seu posse generari. Omnis curva geometrica est realis. Non omnis realis Geometrica.

C u r v a G e o m e t r i c e haberi dicitur, quaecunque motu continuo describi potest, qui supposita Instrumentorum exactitudine in nostra potestate sit. Talis hactenus non est Logarithmica. (: Etsi per puncta aut physice possit delineari. :) Nec Quadratrix.

Curva Analytica Ordinaria vel specialiori vocis usu, Analytica, simpliciter est, cujus omnia puncta per aequationem ordinariam seu finito dimensionum effabilium numero constantem explicari possunt. Caeterae quae analytice habentur, a me transcendentes vocantur.

Hae curvae merito analyticae simpliciter dicuntur, quoniam multa in iis (exceptis dimensionibus et quadraturis, et quae hinc pendent) sunt in nostra potestate ope so-

---

1 *Darüber:* Prop. Differentia figurae novae, seu fi [*bricht ab*]

1–4 *(1)* p r o p. 8. *(2)* corollar. . . . si *(a)* curva ad *(b)* figura proposita ad verticem *(c)* | figura *ändert Hrsg.* | propositae . . . recti, *(aa)* pro *(bb)* area . . . segmentorum | eiusqve . . . segmentorum *erg.* | . *erg. L* 8 *(1)* Curvae Geometricae | ut *nicht gestr.* | cycloeides et Linea Sinuum | determi *nicht gestr.* | *(2)* Curva *L* 9 f. C u r v a . . . seu *(1)* essentiam qvandam h *(2)* posse . . . Geometrica. *erg. L* 11 continuo *(1)* possibili des *(2)* describi *L* 12 f. Talis . . . Quadratrix *erg. L* 14 Analytica *(1)* aeqvabilis est *(2)* Ordinaria *(a)* est *(b)* vel *L* 14 f. cuius *(1)* ordinatarum ad absissas relatio *(2)* omnia . . . aeqvationem *(a)* finita *(b)* ordinariam *L* 16 f. Caeterae . . . vocantur. *erg. L*

1–4 Corollar. . . . segmentorum: s. N. 20 prop. 8. 7 Wallisii: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 194, S. 194–198 (*WO* I S. 476–478). 20 Differentia figurae novae: vgl. N. 18_2 S. 168 Z. 4–6 und N. 20 prop. 9 S. 207 Z. 17 – S. 208 Z. 2.

lius calculi analytici, ut, vertices, maximae, flexus, tangentes; et inter se intersectiones; praeterea et descriptio.

Hic disserendum est de phrasi Cartesii qui solas Analyticas ordinarias vocat Geometricas.

D i r e c t r i x recta ad quam ex curva ducuntur rectae parallelae inter se.

A b s c i s s a e sunt portiones directricis inter punctum quoddam fixum et unam parallelarum a curva in directricem ductarum interceptae.

O r d i n a t a e sunt ex quolibet curvae puncto ductae rectae inter se convergentes aut parallelae.

Hic disserendum de Pascalio etc.

D i r e c t r i c e s conjugatae sunt quae in eodem puncto fixo se secant, et una alterius ordinatis parallela est; hinc fit ut abscissae unius aequentur ordinatis alterius et vice versa.

C u r v a A n a l y t i c a s i m p l e x; ejus species P a r a b o l o e i d e s et H y p e r b o l o e i d e s, seu directae et reciprocae. Hic catalogus ejusmodi curvarum et explicatio quid sit esse in ratione multiplicata vel submultiplicata, directa et reciproca, vel ut dignitates. Huc potentiae, exponentes. Gradus.

Ostenditur etiam altiores Paraboloeides Geometrice haberi posse, adeoque esse curvas reales.

Propositio Slusii. pag. 42.

Propositio Riccii, et demonstratio Slusii. pag. 43.

Tangentes Curvarum Analyticarum simplicium ex Riccio.

Prop. . . . Si in Curva proposita analytica simplice[,] in qua scilicet dignitates quae-

3–5 Geometricas; *(1)* qvoniam credidit descriptionem *(2)* Curva Analytica simplex. Paraboloeides. Hyperboloeides. *(3)* Ord *(4)* Directrices sunt duae rectae se secantes, qvarum alterutri parallelae ex dato puncto ad alteram ducuntur *(5)* D i r e c t r i x *L* 19 pag 42 *erg. L* 20 pag. *(1)* 42. *(2)* 43 *erg. L* 22 Curva | proposita | sit *streicht Hrsg.* | *erg.* | analytica *L* 22–154,2 in qva . . . ordinatarum *erg. L*

3 phrasi Cartesii: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 20 f. — In N. 51 fehlt eine Diskussion von Descartes' Kurveneinteilung; vgl. N. 14 S. 146 Z. 6 und N. 20 Lesart zu S. 221 Z. 2. 10 Pascalio: vgl. N. 20 S. 200 Z. 19–25. 19 Propositio Slusii: R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 114–116. 20 Propositio Riccii: M. Ricci, *Exercitatio geometrica*, 1668, theorema tertium, S. 7 f. — demonstratio Slusii: R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 116 f. Vgl. das vorher geschriebene VII, 5 N. 68 S. 480 sowie die späteren VII, 3 N. 65 und N. 20 S. 230 Z. 10–14. 22 Prop. . . . : vgl. N. 20 prop. 16 S. 246 Z. 1–6.

dam abscissarum sint proportionales directe vel reciproce quibusdam dignitatibus ordinatarum[,] ea fiant quae diximus prop. 7. et corollar. Linea Segmentorum proveniens, erit ejusdem speciei cum proposita, habebitque ordinatas quae sint constanter ad ordinatas respondentes propositae, ut differentia in exponente dignitatum abscissae et ordinatae, ad exponentem dignitatis abscissae.

2 prop. 7. | et corollar. *erg.* | *(1)* fiet curva analytica nova *(2)* Curva proveniens nova *(3)* Figura *(4)* Linea L

16. DE MOMENTIS FIGURAE ANGULORUM. DE LOCIS CURVARUM [Juni 1676]

Die beiden folgenden Stücke stehen zusammen mit VII, 1 N. 34 in engem inneren und äußeren Zusammenhang. N. 16_1 wurde zuerst auf das Blatt geschrieben, N. 16_2 danach rückseitig notiert, schließlich wurden für VII, 1 N. 34 die freigebliebenen Räume genutzt. Auf dem Rest des Bogens befindet sich N. 15, das vermutlich als erstes verfasst wurde. Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum März bis August 1676 belegt. Das abschließende Theorem aus VII, 1 N. 34 S. 210 hat Leibniz nachträglich in N. 20 (Wasserzeichen belegt für 8. Juni 1676) als Lemma zu prop. 1 (s. Lesart zu S. 182 Z. 3 – S. 184 Z. 1) übernommen, dieses jedoch für N. 51 wieder gestrichen. Die drei Stücke dürften etwa zur gleichen Zeit wie N. 20 entstanden sein.

16_1. DE MOMENTIS FIGURAE ANGULORUM

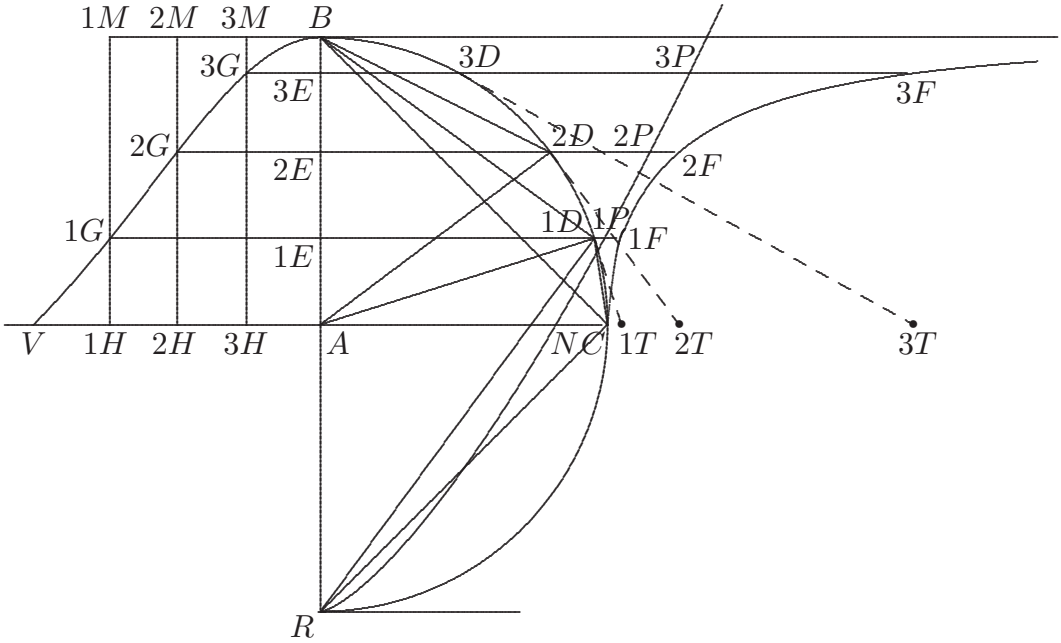
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 55–56. 1 Bog. 2°. $\frac{2}{3}$ S. auf Bl. 56 r°. Auf der Rückseite N. 16_2, auf Bl. 56 unten beidseitig VII, 1 N. 34, auf Bl. 55 r° N. 15.
Cc 2, Nr. 1236

$RA \sqcap AC \sqcap AB \sqcap r$. $AE \sqcap e$. $ED \sqcap \sqrt{r^2-e^2}$. $EF \sqcap y \sqcap \dfrac{r^2}{\sqrt{r^2-e^2}}$. vel $y \sqcap \dfrac{r^2\sqrt{r^2-e^2}}{r^2-e^2}$. $BE \sqcap r-e$. $RE \sqcap r+e$. $\dfrac{r^2\sqrt{r^2-e^2}}{r+e} \sqcap y \frown r-e$, seu momentum figurae ex $B \sqcap zr$. et $\dfrac{r^2\sqrt{r^2-e^2}}{r-e} \sqcap y \frown r+e$. momentum figurae ex $R \sqcap \omega r$. et si ad $\int \overline{\omega r}$, addatur $\int zr$, fiet $\int yr$. seu $r\int y$. vel area figurae $r\int \omega + r\int z \sqcap r\int y$.

$AH \sqcap EG \sqcap z \sqcap \dfrac{r\sqrt{r^2-e^2}}{r+e}$, vel $z \sqcap r\sqrt{\dfrac{r-e}{r+e}}$. unde $\dfrac{z^2}{r^2} \sqcap \dfrac{r-e}{r+e}$. vel $z^2r+z^2e \sqcap r^3-r^2e$. vel $e \sqcap \dfrac{r^3-z^2r}{z^2+r^2}$. vel $e+r \sqcap \dfrac{r^3-z^2r+z^2r+r^3}{z^2+r^2} \sqcap \dfrac{2r^3}{z^2+r^2}$. et $r-e \sqcap BE \sqcap MG \sqcap \dfrac{rz^2+r^3-r^3+rz^2}{z^2+r^2} \sqcap \dfrac{2rz^2}{z^2+r^2}$ adeoque figura $BEGB$ aequatur duplo segmento BDB. Ergo hinc haberi potest summa ipsarum EG seu z nam BG erit figura segmentorum.

21 A,E,GA *L ändert Hrsg.* 22 nam ... segmentorum *erg. L*

18 $\int yr$: Richtig wäre $\int 2yr$; Leibniz rechnet konsequent weiter.



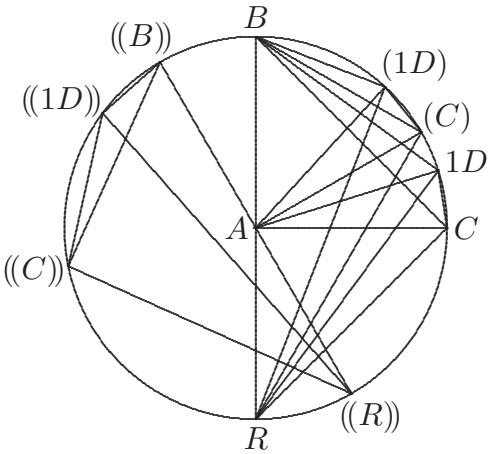
[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

Pergamus ad ω. nempe $\omega \sqcap EP \sqcap \dfrac{r\sqrt{r^2-e^2}}{r-e}$, seu $r\sqrt{\dfrac{r+e}{r-e}}$. Ergo $\omega^2 \sqcap \dfrac{r^3+r^2e}{r-e}$. et $r\omega^2 - e\omega^2 \sqcap r^3 + r^2e$ et $e \sqcap \dfrac{r\omega^2 - r^3}{r^2+\omega^2}$ et $r + e \sqcap RE \sqcap \dfrac{r^3 + r\omega^2, +r\omega^2 - r^3}{r^2+\omega^2} \sqcap \dfrac{2r\omega^2}{r^2+\omega^2}$.

Nimirum BD quadrans continuetur in R, ut sit semicirculus BDR. Per $RN1P2P3P$ ducatur curva segmentorum, alia similis plane et opposita priori: ipsae EP, sunt ω, quae repraesentant momentum figurae angulorum, seu ipsorum arcuum ex AC. Sit ergo arcus $C1D$, seu ei proportionalis figura $CA1E1FC$, cujus momentum ex B, est $\int z$, id est sum. EG, id est figura $A1E1GVA$, id est duplum trilineum $B1D$. Ejusdem momentum ex R, est $\int \omega$, seu $\int \overline{EP}$. seu figura $NA1E1PN$, quae aequalis duplo trilineo $1DRC1D$.

8 figura B1E1GB, id est duplum segmentum B1D *L ändert Hrsg.*

1 *Fig. 1*: Der von Leibniz nur skizzenhaft angedeutete Verlauf der Kurve $RN1P2P3P$ ist nicht korrekt. — Linien in Blindtechnik sind gestrichelt wiedergegeben.



[*Fig. 2*]

Ergo omnibus expensis hinc illud tantum colligo trilineum $1DBC1D$, + Trilin. $1DRC1D$ aequari sectori $1DAC1D$ duplicato adeoque Triang: $B1DC + R1DC$ aequari Triangulo $A1DC$. Quod sic ostendo ex figura superiore: arcus $1DC$ momentum ex B est figura $VA1E1GV$, id est $\underbrace{\text{duplum Trilineum } 1DBC1D}_{2TB}$. Ejusdem arcus ex R momentum est figura $NA1E1PN$ seu $\underbrace{2^{\text{plum}} \text{ Trilineum } 1DRC1D}_{2TR}$. Summa utriusque est ipse arcus in RB, seu sector quadruplicatus, $2ra$, si a sit arcus. Ergo $2ar \sqcap 2TB + 2TR$. et $ar \sqcap TB + TR$. Est autem ar arcus in radium seu sector duplicatus. Ergo sector duplicatus aequalis his duobus Trilineis. Auferatur a sectore [duplicato] $1DAC1D$ segmentum duplicatum $1DC1D$, restabit Triangulum duplicatum, $A1DC$. Eodem modo a summa horum Trilineorum auferatur segmentum bis, semel ab uno, $1DBC1D$ ut restet Triangulum $B1DC$[,] semel ab altero. $1DRC1D$, ut restet Triangulum, $R1DC$, ergo haec duo Triangula aequalia triangulo $A1DC$ duplicato. Sed hoc sine tot curvis aliunde poterit probari.

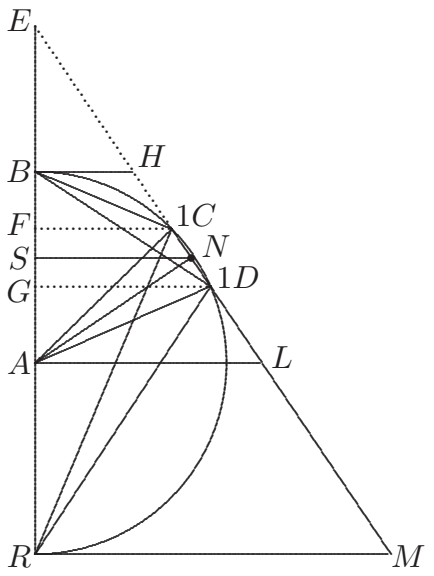
---

14 *Daneben:* Notabilis modus inveniendi theorema geometriae communis per transcendentem.

Am Rand, unter Fig. 2: Habetur hinc locus. Nihil enim refert ubi in circulo sumantur puncta B. R. ideoque ex diversis punctis expositis in circulo sumtis diversa paria Triangulorum, erunt aequalia inter se. Hinc rectangulum sub sinu et radio duplum $\bigtriangledown^{\text{li}}$ ACD, est duobus illis $\bigtriangledown^{\text{lis}}$ aequale.

16_2. DE LOCIS CURVARUM

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 55–56. 1 Bog. 2°. $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 56 v°. Auf der Vorderseite N. 16_1, auf Bl. 56 unten beidseitig VII, 1 N. 34, auf Bl. 55 r° N. 15.
Cc 2, Nr. 1234



[*Fig. 3*]

Quaestio loci qui ad circulum esse reperiretur talis foret; invenire curvam talis naturae, ut dato quodam puncto A, et recta $1DC$, recta quaelibet transiens per A curvam secet in duobus punctis B. R. ita ut triangul. $B1DC$ + triang. $R1DC$ aequetur duplo Triangulo $A1DC$. Locus erit ad circulum. Quid si quaereretur, ut simplo vel triplo. Si additum fuisset infinitas tales rectas $1DC$ sumi posse debere, et quaesitus fuisset determinandi modus, apparuisset nimius esse numerus postulatorum; et calculus fuisset factus uno; excerptis scilicet aliquot postulatis determinabilibus, nempe hic una, ex qua sponte reliquum fluere debet, aut problema est impossibile.

Quid si sit[:] formetur quaestio, curvam invenire ejus naturae, ut duobus in ea sumtis punctis $1C$. $1D$ et junctis CD Triangulum RCD, +Triang. BCD aequetur Triangulo

15 Triangulum | ACD *ändert Hrsg.* | , +Triang. BCD *(1)* sit aequale Triangulo RCD *nicht gestr.* *(2)* aequetur *L*

ACD duplicato posito puncta B. A. R. esse in una recta, et A in ejus medio. Sit $AB \sqcap a$. $CD \sqcap c$. $FG \sqcap g$. $BF \sqcap b$. $EF \sqcap e$. $EB \sqcap e-b$. $EB \sqcap e-b : BH :: f : c$. $BHf \sqcap c, e-b$. et $BH \sqcap \frac{c, e-b}{f}$. Jam BH in $FG \sqcap 2\bigtriangledown BCD$. Ergo $c, e-b \sqcap 2\bigtriangledown BCD$. Porro $EA : AL :: f : c$. et $ALf \sqcap \overset{a+e-b}{a+e-b}, c, \sqcap 2\bigtriangledown ACD$ et eodem modo $RM, f \sqcap 2a+e-b, c \sqcap 2\bigtriangledown RCD$. Ex hypothesi: $\not{c}, e-b, +\not{c}, 2a+e-b \sqcap 2a+2e-2b, \not{c}$, fit aequatio perfecta, ergo, problema est theorema, sive, id verum est in omni curva, et in data qualibet linea recta. In circulo vero hoc peculiare, quod utcunque in ejus circumferentia varientur puncta B. R. idem semper maneat punctum A.

Interim notabile invenimus theorema generalissimum, sint datae rectae duae CD, BR, punctum alterutrius, ut BR, medium A, omnia puncta omnibus jungantur; tria habebimus triangula, quorum basis communis, recta CD, apices puncta tria rectae bisectae: B. A. R. Erunt triangula ad extrema B. R. simul sumta aequalia duplo triangulo ad medium A. Hinc si quis alicubi curvam proponeret quaerendam in cujus inscripta ei contingeret, is ei contingeret, fieret enim in qualibet. Nota non tantum in eodem circulo puncta B. R. alia sumi possent, sed et in concentrico modo opposita ideo locus punctorum B. R. erit superficies plana infinita, modo sint in recta transeunte per A. Est singulare loci genus.

Caeterum alias operae pretium erit problemata quaerere ex proprietate inscriptarum invenire curvam, illis haud dubie affinia ex Tangentium proprietate invenire curvam. Nam et in tangentibus duobus opus curvae punctis ad ejus proprietatem propositam explicandam, etsi infinite parvae distantiae. Possunt et problemata proponi, ubi ad proprietatem Curvae tribus opus punctis etc.

Proprietates inscriptarum generaliores sunt quasi tangentium, imo has comprehendunt; sunt enim tangentes, quasi minimae inscriptae. Curvam invenire talem, ut inscripta qualibet bisecta, ex medio puncto ductae perpendiculares omnes in idem concurrant punctum; est circulus. Quid si non in eodem A, sed ita ut semper SA sit constans; aliaque id genus. Hoc si in ulla fieri potest linea fieri potest in parabola; et si in parabola

15 f. ideo *(1)* locus erit planus *(2)* | locus *erg. Hrsg.* | punctorum L

2 $EB \sqcap e-b : BH :: f : c$: Die von Leibniz nicht explizit definierte Größe f hat den Wert $\frac{FG}{\sin\sphericalangle BEH}$. Im Folgenden benutzt Leibniz in den Ausdrücken für die Dreiecke BCD, ACD und RCD stattdessen $f = FG$. Für die Beziehung zwischen den Dreiecken bleibt dies jedoch ohne Konsequenz.

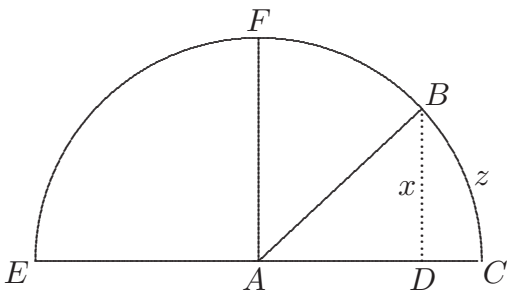
9–17 Interim ... genus: vgl. VII, 4 N. 34 S. 209 f.

fieri non potest, concludere possum hoc problema esse impossibile. Hoc ita concludo, si in omnibus inscriptis verum est, verum etiam id erit de minima, seu tangente; at non nisi in parabolae tangente id evenire possibile est, ut ostendere possum. Ergo in nulla alia hoc problema locum habet, ergo si in parabola non habet locum, est impossibile. Hinc apparet modus solvendi haec problemata, reducantur ad problemata tangentium, et singulae curvae inveniantur, quarum tangentibus hoc procedit, ex quibus excerpentur illae in quibus generaliter. Item multa autem talia problemata esse impossibilia sic ostendo, ponamus fieri in parabola, ut sit FA semper constans, posita ex A perpendiculari ad N medium AC, ponatur aliam curvam quaeri, in qua sit GA semper constans. Ea etiam erit parabola, nam in minimis seu tangentibus coincidit priori, ut reducta perpendicularis sit constans, ut in parabola. Imo in ulla curva impossibile est, in lineis ordinariis simul FA et GA esse constantem, ergo alterutrum eorum impossibile est in ulla curva reperiri.

17. BEREKENING VAN DE SINUS
[Januar – Sommer 1676]

Überlieferung: *M* Aufzeichnung (Mohr für Leibniz): LH 35 VIII 30 Bl. 106 v°. Ca $\frac{3}{4}$ Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 106 v°.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Georg Mohr verließ London gegen Ende September oder Anfang Oktober 1675 in Richtung Paris (s. Oldenburg an Leibniz, 30. September (10. Oktober) 1675, III, 1 N. 65_1 S. 287) und ist mit Leibniz spätestens im Mai 1676 (vgl. Leibniz an Oldenburg, 12. Mai 1676, III, 1 N. 80_1 S. 375), möglicherweise aber schon zu Jahresanfang (vgl. VII, 2 N. 76 S. 851, datiert auf den 2. Februar 1676) bekannt geworden. Das vorliegende Stück ist auf Pariser Papier notiert und stellt eine Näherungsrechnung unter Verwendung der Sinusformel dar, die Mohr aus London nach Paris mitgebracht hatte (s. Leibniz an Oldenburg, 12. Mai 1676, III, 1 N. 80_1 S. 375). Ein Wert in der ergänzten Anmerkung von Leibniz wurde in N. 36_2 berechnet. N. 17 und N. 38 sind formal ähnlich aufgebaut.



[*Fig. 1*]

Soo men neembt de Diam. tot de Circomfer. ofte de Rad. AC tot de $\frac{1}{2}$ Circomf. $CBFE$ als 100 tot 314 (is te kleijn) ende stelt als volgt de

				Tab. sinus	BD
$\angle BAC$	18 gr	.....	$\frac{314}{1000}$	.....	$\frac{30901}{1⑤}$
		dan is		haer sinus	
	36 gr	de arcus	$\frac{628}{1000}$	BD, naer de	$\frac{58778}{1⑤}$
		BC		Tab. sin. is	
	45 gr	.....	$\frac{785}{1000}$	.....	$\frac{70710}{1⑤}$

	BD		BD
.....	$\frac{308840143}{1⑨}$	.....	$\frac{308865580064682}{1⑮}$
nae de reeckening,		naer de reek.	
met de twee	$\frac{586721142}{1⑨}$	met de 3	$\frac{587535128069819}{1⑮}$
eerst. termen als		eerste termen	
$z - \frac{z^3}{6}$ kombt	$\frac{704377229}{1⑨}$	$z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120}$	$\frac{706861317347838}{1⑮}$

Maer soo men neembt de Rad. AC tot de $\frac{1}{2}$ Circ. $CBFE$, als 10000 tot 31416 (is te groot), ende stelt de $\angle BAC$ als boven

$\angle BAC$	18 gr	.....	$\frac{31416}{1⑤}$	.....
		dan is		haer sinus
	36 gr	de arcus	$\frac{62832}{1⑤}$	BD naer de
		BC		Tab. sinus
	45 gr	.....	$\frac{78540}{1⑤}$	is als boven

6 $\frac{706811317347838}{1⑮}$ *M ändert Hrsg.*

6 $z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120}$: Die Reihenentwicklung für den Sinus eines Kreisbogens hatte Mohr aus London mitgebracht (s. Leibniz an Oldenburg, 12. Mai 1676, III, 1 N. 80_1 S. 375); sie war Leibniz bereits in Oldenburgs Brief vom 12. (22.) April 1675 mitgeteilt worden (s. III, 1 N. 49_2 S. 233).

	BD		BD
.....	$\frac{308992250966784}{1\textcircled{15}}$	.....	$\frac{309017752905353809876500 4}{1\textcircled{25}}$
nae de reeck.		nae de reeck.	
met de twe	$\frac{586978007734272}{1\textcircled{15}}$	met de 3	$\frac{587794069768505916048012 8}{1\textcircled{25}}$
eerste term.		eerste termen	
is $z - \frac{z^3}{6}$ kombt	$\frac{704653921356000}{1\textcircled{15}}$	$z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120}$	$\frac{707144345044457995752000 0}{1\textcircled{25}}$

5 *Darunter von Leibniz' Hand:* Arc. a. rad. 1. sin. compl. $1 - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4}$ etc. Wann der arc. 18 grad. die peripheria $\frac{314}{100}$ und der arc. von 18 grad. $\frac{314}{1000}$ und man sezt den sinum complementi nur $1 - \frac{a^2}{2}$ komt dafür $\frac{950702}{1,000,000}$ solte seyn aus den tafeln $\frac{951056}{1000000}$. differenz $\frac{354}{1000000}$. Daß ist noch nicht $\frac{1}{2800}$ des Radii.

4 $\frac{586977007734272}{1\textcircled{15}}$ *M ändert Hrsg.* 5 $\frac{704653921456000}{1\textcircled{15}}$ *M ändert Hrsg.*

9 $\frac{950702}{1,000,000}$: Den Wert 950702 hat Leibniz in N. 36_2 S. 419 Z. 21 berechnet.

18. IMPOSSIBILITAS QUADRATURAE CIRCULI UNIVERSALIS. TRANSMUTATIO FIGURAE ANALYTICAE SIMPLICIS

18_1. IMPOSSIBILITAS QUADRATURAE CIRCULI UNIVERSALIS [April – Juni 1676]

Überlieferung:

L^1 Konzept: LH 35 V 6 Bl. 5. Ca $\frac{1}{3}$ Bl. 2°. 1 $\frac{1}{2}$ S. Auf dem unteren Teil von Bl. 5 v° N. 18_2. — Bl. 5 bildete den unteren Teil eines Bl. 2°, darüber befanden sich LH 4 V 10 Bl. 63 u. LH 35 V 14 Bl. 15 (VI, 3 N. 66 u. VII, 3 N. 65).
Cc 2, Nr. 1245 A

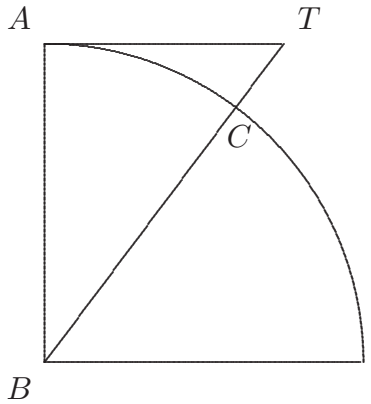
L^2 Reinschrift: LH 35 II 1 Bl. 46. 1 Bl. 4°. 1 $\frac{1}{2}$ S. (Unsere Druckvorlage.)
Cc 2, Nr. 1246

Datierungsgründe: Das Konzept L^1 von N. 18_1 ist nach VI, 3 N. 66 u. VII, 3 N. 65 geschrieben worden, die von den Herausgebern auf April (?) bzw. April – Juni 1676 datiert wurden. In N. 18_1 formuliert Leibniz einen Satz, der die Unmöglichkeit der generellen Kreisrektifikation und damit zusammenhängend der generellen Kreisquadratur mit algebraischen Mitteln behauptet. Er schließt daraus, dass eine Kreisquadratur anderer Art als seine eigene nicht gefunden werden kann („nisi qualis a me exhibita“ und „alia quam qualem dixi“). Auch im Schlussabschnitt der *Praefatio opusculi* (N. 19) tritt ein entsprechender Satz über die Kreisrektifikation auf, von dem Leibniz angibt, dass er ihn im *Opusculum* beweisen will. Die Aussage zur Kreisquadratur gibt er als Korollar dazu an und folgert nun, dass eine vollkommenere („perfectior“) Kreisquadratur als seine arithmetische nicht gefunden werden kann. Eine entsprechende Formulierung („perfectioris generis“) gebraucht er auch in N. 28, wo er weitere Textteile aus N. 19 im zugehörigen Scholium verwendet. Die sukzessiven Präzisierungen bzw. Ergänzungen lassen vermuten, dass der Abschnitt S. 166 Z. 10 – S. 167 Z. 2 in N. 18_1 eine frühere Stufe darstellt als der entsprechende Abschnitt in N. 19 S. 174 Z. 25 – S. 175 Z. 16, der wiederum in N. 28 S. 350 Z. 26 – S. 355 Z. 9 erheblich erweitert wird (vgl. die Bemerkungen zu J. Gregory). Möglicherweise war die Reinschrift L^2 von N. 18_1 für das aus N. 15 erschließbare Manuskript in 4° vorgesehen.

Impossibilitas quadraturae Circ. Universalis

Quadratura duplex est, universalis et particularis: Universalis, quae regulam exhibet cujus ope quaelibet Circuli portio possit mensurari, seu cujus ope ex data tangente (vel sinu) possit inveniri arcus sive angulus. Particularis, quae certam circumferentiae portionem, (:et eas, quarum ad hanc portionem nota est ratio:) exhibet. Unde et si quis totum circulum totamve circumferentiam exhiberet, non vero nisi eas partes, quarum ad circumferentiam nota jam tum est ratio, is quadraturam, qualis desideratur, Universalem non dedisset. Itaque Quadratura perfecta et generalis includit Sectionem anguli universalem, sive Trigonometriam accurate Geometricam; quae longe majoris sunt momenti, quam quadratura Circuli per se spectata.

His intelligentiae causa positis, ajo Quadraturam Universalem, seu relationem generalem inter Tangentem (vel Sinum) et arcum dari non posse, nisi qualis a me exhibita est, per aequationem compositam ex terminis effabilibus infinitis.



[*Fig. 1*]

Inveni enim radio AB posito, 1. seu unitate, tangente AT, t. Arcu AC appellato c, tunc fore $c \sqcap \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11}$ etc.

1 Impossibilitas ... Universalis *erg.* L^2 2 | Quadr. Circ. generalis impossibilis *erg.*| Qvadratura L^1

Hoc ergo demonstrabo Theorema: Impossibile est Relationem generalem inter tangentem (vel sinum) et arcum exhibere, nisi per analysin transcendentem. Unde et sectionem anguli universalem seu in data ratione, et generalem cujuslibet circuli portionis quadraturam alia quam qualem dixi ratione analytice exhibere impossibile esse sequetur.

Analysin autem Transcendentem voco, cum valor incognitae non per aequationes ordinarias, certarum dimensionum, exprimitur, sed per infinitas, aut finitas ineffabiles, de quibus alias.

Jacobus Gregorius neque particularis neque universalis Quadraturae impossibilitatem evicit.

Porro Theoremate isto semel a me demonstrato infinitis laboribus inutilibus imposterum supersedebunt Geometrae. Nam pleraeque omnes methodi plausibiles, quibus hactenus in Quadraturam Circuli inquisitum est, ita comparatae sunt, ut si vel unius sectoris aut segmenti dare possent Quadraturam, omnium darent, una quadam aequatione sive relatione generali. Quas Methodos ad unum omnes inutiles esse jam nunc praedicere possumus. Ut enim qui nimium probat, nihil probat; ita qui plus facturus est, quam fieri possit, nihil agit.

Quare quicunque imposterum in Quadraturam Circuli inquirere volet, eas tantum methodos quaerere debet quae ad certas circuli portiones, vel etiam totum, diriguntur, nam si deprehenderit aeque ad caeteras pertinere, frustra progredietur.

Certas autem partes, vel etiam totum Circulum (: sed non quamlibet ejus portionem :) analytice inveniri posse, nondum despero. Quemadmodum etsi Cycloeidis quamlibet portionem analysi ordinaria generali metiri impossibile esse eodem plane modo ostendi possit, ex generali Circuli Quadratura supposita impossibili; nihilominus tamen duo Segmenta Cycloeidalia absolute quadravimus, quorum unum a celeberrimo Hugenio

13 Methodi | *(1)* spe⟨re⟩m aliqvid promittentes *(2)* ⟨—⟩ *(3)* spem facientes *(4)* plausibiles *erg.* | qvibus L^1 19 volet, *(1)* circumspiciet, an | non *erg.* | methodus qva usurus ef *(2)* eas L^1 21 deprehenderit *(1)* generalem *(a)* effica *(b)* fore, si *(aa)* vera esset *(bb)* utilis esset, *(2)* neqve valere debere *(3)* aeqve L^1 25 circuli qvadraturae impossibilitate supposita L^1

1 demonstrabo: vgl. N. 19 S. 175 Z. 18 – S. 177 Z. 4 u. N. 28 S. 348 Z. 19 – S. 350 Z. 25. 11 evicit: vgl. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, insbesondere prop. XI, S. 25–29.

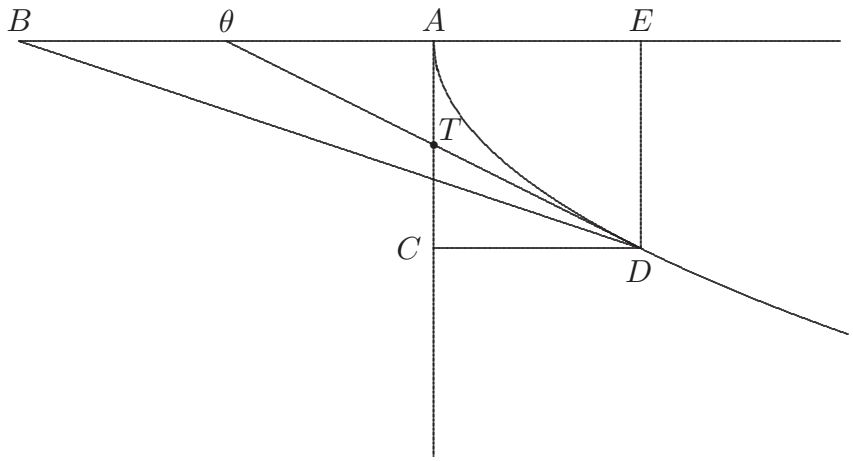
inventum est, alterum mihi fortuna obtulit. Artem autem excogitandi methodos pure particulares, et discernendi a generalibus alterius loci est explicare.

18_2. TRANSMUTATIO FIGURAE ANALYTICAE SIMPLICIS [April – Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 5. Ca $\frac{1}{3}$ Bl. 2°. 6 Z. auf Bl. 5 v°. Auf dem Rest des Blattes L^1 von N. 18_1.
Cc 2, Nr. 1245 B

Datierungsgründe: N. 18_2 wurde nach L^1 von N. 18_1 auf den Träger geschrieben und ist somit auch nach VI, 3 N. 66 u. VII, 3 N. 65 entstanden. Die letzte Aussage entspricht der ersten prop. 9 in N. 20. Wie bei VII, 3 N. 65 gibt es außerdem einen inhaltlichen Zusammenhang mit N. 20 prop. 13. Beide Theoreme sind in N. 15 noch nicht formuliert bzw. nur ansatzweise ergänzt.

[*Erster Ansatz*]



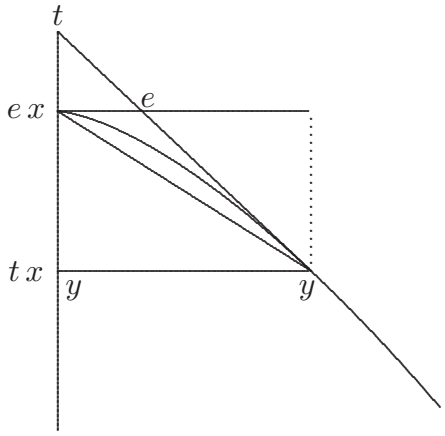
[*Fig. 1*]

1 autem *(1)* discernendi | ab initio *erg.* | Methodum universalem a particulari plerumqve non admodum ⟨di⟩fficilem arbitror *(2)* ⟨— —⟩ *(3)* excogitandi L^1

1 inventum: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 69 u. 71 f. (*HO* XVIII S. 204–211).
1 mihi: vgl. VII, 4 N. 17 S. 344 f.

$x^v.\ \ y^z.\ \ \frac{t}{x} \sqcap \frac{z}{v}.\ \ \frac{AB}{CD} \sqcap \frac{z-v}{v}.\ \ \frac{\theta \sqcap E\theta}{y \sqcap ED} \sqcap \frac{v}{z}$ et $\frac{AT}{ED} \sqcap$ [*bricht ab*]

[*Zweiter Ansatz*]



[*Fig. 2*]

$x^v \sqcap y^z.\ \ \frac{t}{x} \sqcap \frac{z}{v}.\ \frac{e}{y} \sqcap \frac{z-v}{v}$ et $e \sqcap \frac{z-v}{v} y$ et $\int e \sqcap \frac{z-v}{v} \int y$. Differentia inter figu-
5 ram novam et primam aequatur differentiae inter primam et rectangulum circumscriptum adeoque [*bricht ab*]

1 $\frac{t}{x} \sqcap \frac{z}{v}$: Richtig wären $\frac{\theta}{x} = \frac{z}{v}$ bzw. (für $t = AT$) $\frac{t}{y} = \frac{z-v}{z}$. Leibniz bricht die Überlegung ab und setzt neu an; vgl. N. 20 prop. 13. 4 $e \sqcap \frac{z-v}{v} y$: Richtig wäre $e = \frac{z-v}{z} y$. Leibniz rechnet konsequent weiter, die folgende Aussage ist aber korrekt; vgl. die erste prop. 9 in N. 20.

19. PRAEFATIO OPUSCULI DE QUADRATURA CIRCULI ARITHMETICA

[April – Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 1+6. 1 Bog. 2°. 3 $\frac{3}{4}$ S. — Gedr.: *LMG* V, 1858, S. 93–98.
Cc 2, Nr. 1232

Datierungsgründe: N. 19 ist nach L^2 von N. 18_1 entstanden (s. dort). Leibniz erwähnt im vorliegenden Text nur die Quadratur des Kreises, nicht die der anderen Kegelschnitte. Damit passt N. 19 inhaltlich als Vorwort zu N. 20 u. N. 28 bzw. zu der aus N. 15 erschließbaren Fassung in 4°, nicht jedoch zu N. 51. Die kurze Beweisskizze auf S. 175 Z. 18 – S. 176 Z. 7 für den Satz über die Unmöglichkeit einer generellen Kreisquadratur, der hier als Korollar bezeichnet wird, ist von Leibniz vermutlich in Zusammenhang mit der Ausarbeitung eines ausführlichen Beweises für den Satz ausgegliedert und durch eine kürzere Formulierung ersetzt worden; vgl. N. 28 S. 348 Z. 19 – S. 350 Z. 25, wo dieser Satz wie später in N. 51 als Proposition bezeichnet wird. Auf S. 173 Z. 18–24 schätzt Leibniz den Bogen des Winkels von 1′ mit dem Sinus von 1′ ab und erwähnt, dass dasselbe Verfahren mit 1″ durchgeführt werden kann, wenn eine genauere Approximation erforderlich ist. Solche Rechnungen mit 1″ führt er ab N. 24 durch, das vor N. 27, dat. 29. Juni 1676, entstanden ist.

Praefatio opusculi de Quadratura Circuli Arithmetica.

Quoniam Problema de Quadratura Circuli in omnium ore versatur, et ardentibus quaerentium studiis etiam apud homines Geometriae prorsus expertes, celebre redditum est; operae pretium erit naturam quaestionis paucis exponere, ut appareat quid ab omni aevo quaesitum sit, quid ante nos praestitum, quid a nobis adjectum, quidque agendum supersit posteritati.

Cum Pythagoras ejusque discipuli Geometriae rectilineae Elementa absolvissent, quae postea ab Euclide in unum corpus redacta sunt; jamque id effectum esset, ut cuilibet figurae rectilineae planae datae, exhiberi posset Quadratum aequale, quod scilicet omnium figurarum rectilinearum simplicissimum, et quodammodo caeterorum mensura est; cogitari coepit an non posset circulo exhiberi aequalis figura rectilinea, adeoque et aequale Quadratum. Et hoc est illud quod Circuli Quadratura vulgo vocatur nam si Triangulum quoddam aut aliud Polygonum quodcunque Circulo aequale describi posset,

25 corpus: EUKLID, *Elemente*. 26 exhiberi: *a. a. O.*, II, 14.

utique et Quadratum ei aequale esset in potestate. Et quoniam Archimedes ostendit, Triangulum rectangulum cujus altitudo sit radius, basis autem sit circumferentia in rectum extensa, fore Circuli duplum; ideo si quis inveniret rectam quandam Circumferentiae Circuli aequalem, daret nobis Quadraturam.

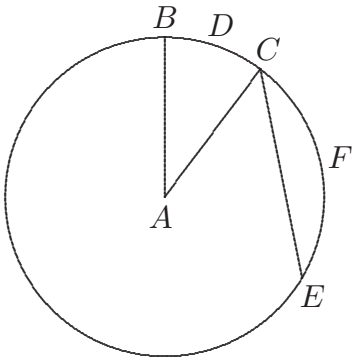
Hic nonnullis, qui explicationem audiunt, mirari subit, cur rem, ut ipsis videtur facillimam, tamdiu quaesierint Geometrae, quid enim facilius quam rectam circumferentiae aequalem invenire, Circulo materiali filum circumligando, idque postea in rectum extendendo, ac mensurando. Eodem jure dicere possent facile quadrari circulum, si cerea massa primum Circularis, postea ad quadratam figuram redigatur, aut si aqua ex cylindro cavo in trabem quadratam excavatam transfundatur, nam ex aquae altitudine, apparebit quomodo Circulus qui est basis cylindri sit ad Quadratum, quod est basis trabis sive prismatis excavati, et si eadem aqua duplo vel triplo altius assurgat in prismate quam in cylindro, erit Quadratum circuli dimidium vel triens; adeoque aliud quadratum, quod hujus duplum triplumve sit, quale per Geometriam nullo negotio invenitur; erit circulo aequale. Verum sciendum est, tale quiddam a Geometris non quaeri, sed viam ab illis investigari, per quam sine ullo Circulo materiali, ejusve transformatione aut ad planum applicatione, certa arte ac regula, instrumentove quod dirigere sit in potestate, qualia sunt, quibus Circulus aut Ellipsis, aliave linea describitur, inveniri ac designari possit recta circumferentiae aequalis; vel etiam latus Quadrati circulo aequalis. Itaque per filum in rectum extensum, aut etiam per rotam in plano provolutam, aut regulam circumferentiae materialis, partibus successivo contactu applicatam non quaeritur quadratura Circuli. Hinc etiam quadratura Circuli per contactum Helicis ab Archimede exhibita non est illa quae quaeritur, neque pro tali eam venditavit Archimedes. Nimirum Helix est curva linea quae describitur a stylo qui per radium circa centrum euntem a centro versus circumferentiam incedit, et planum subjectum immobile apice suo attingit, inque eo vestigium motus sui, ex recto circularique compositi, relinquit; modo intelligatur motum radii circa centrum et styli in radio esse uniformes, aut proportionales. Talis autem linea non est in potestate, neque enim (sine circulo materiali) effici hactenus a nobis potest,

1 potestate. *(1)* Scio nonnullos ubi hanc explicationem audiunt, mirari cur rem *(a)* ipsis *(b)*, ut ipsis videtur facilem tamdiu qvaesierunt Geometrae; nam si qvis filum *(2)* Et *L*

1 ostendit: Archimedes, *Dimensio circuli*, prop. I, zeigt die Gleichheit mit der einfachen Kreisfläche. 22 exhibita: Archimedes, *De lineis spiralibus*, prop. XVIII.

ut aequali aut proportionali velocitate moveantur semper radius circa centrum et stylus in radio. Deinde si descripta jam esset[,] deberet huic helici materialiter ex plano excisae regula quaedam tangens applicari, cujus ope recta circulo aequalis determinaretur.

Porro Problemati de Quadratura Circuli connexum est problema de Sectione Angulorum universali, sive Trigonometria Geometrica, cujus ope scilicet Anguli tractari possint instar linearum rectarum, ut possit angulus inveniri, qui ad alium datum habeat rationem datam numeri ad numerum, vel etiam rectae ad rectam, item, ut ex datis lateribus Trianguli inveniri possit quantitas anguli, seu arcus eum subtendentis ratio ad circumferentiam suam totam; et ut vicissim uno angulo et duobus lateribus, vel duobus angulis et uno latere dato, caetera in Triangulo Geometrice inveniantur.



[*Fig. 1*]

Haec autem omnia praestari sine Tabulis possent, si plena Circuli daretur Quadratura, p l e n a , inquam, id est circuli et omnium ejus partium, Segmentorum scilicet, ut $CEFC$, atque Sectorum ut $ABDC$; ita enim etiam cuilibet circumferentiae portioni sive arcui ut BDC aequalis inveniri posset recta, quemadmodum ostendit Archimedes, ac proinde arcus (et qui illis respondent anguli,) instar linearum rectarum tractari possent, quod longe utilius foret, quam ipsamet Circuli quadratura sola. Hoc enim modo sine ul-

2 radio. *(1)*; nisi jam *(2)*. | nam si hoc possemus jam portionem radii possemus accipere scilicet arcui circuli cuilibet (radio minori) aeqvalem *erg. u. gestr.* | Deinde *L* 12 si *(1)* perfecta *(2)* plena *L* 15 qvemadmodum | etiam *gestr.* | ostendit Archimedes *erg. L*

15 ostendit: vgl. *a. a. O.*, prop. 20 sowie Archimedes, *De sphaera et cylindro* I, prop. VI.

lis Sinuum Tabulis omnia problemata Trigonometrica efficere possemus; Trigonometriae autem quantus sit in omni re Mathematica usus nemo ignorat.

Porro Plena pariter ac minus plena, Circuli Quadratura, vel Empirica est, vel rationalis. Empirica quae filo extenso, aliisque transformationibus ac tentamentis fieret, et hanc jam rejecimus. Rationalis quae arte quadam invenitur, et secundum regulam ex rei natura ortam procedit. Rationalis autem est vel exacta, vel appropinquans. Utraque vel per Calculum vel per ductum Linearum. Per Calculum vel finitum, vel infinitum, et vel per numeros rationales; vel per irrationales. Omnis Quadratura appropinquans appellatur M e c h a n i c a , sive fiat per ductum linearum, quales ingeniosissimae Willebrordi Snellii et inprimis Christiani Hugenii aliaeque nonnullae, sive fiat per calculum, quemadmodum Archimedes, Metius, Ludolphus a Colonia, Jac. Gregorius Scotus, aliique fecere. Et Archimedes quidem vidit ope Polygonorum inscriptorum et circumscriptorum quantumvis ad circuli magnitudinem accedi posse. Si enim Polygona duo similia, qualia delineare docet Euclides, ut Trigonum, Hexagonum, aliave circulo inscribantur ac

1 efficere *(1)* | solis linearum ductibus *erg.* | geometrice *(2)* possemus; *(a)* qvorum *(b)* per solos ductus linearum *(c)* Trigonometriae *L* 6 est *(1)* vel perfecta vel imperfecta *(2)* vel *L* 10 f. calculum, *(1)* qvemadmodum Archimedes invenit posita diametro 7. circumferentiam cadere inter 21 et 22, | *darunter:* $\mathfrak{A}$ | et Metius deprehendit, posita diametro 113. fore circumferentiam intra 354 et 355. et exactius adhuc Ludolphus a Colonia, qvi facilius longe per Jac. Gregorii *(a)* series conv *(b)* Scoti *(aa)* series convergentes *(bb)* seriem *(cc)* seriei convergentis ingeniosum arte inventum; qvam per Archimedeas polygonorum bisectiones continuas ad propositum pervenire potuisset. *(aaa)* Qvemadmodum autem Ludolphus *(bbb)* Porro data jam Circumferentiae mensura in numeris qvantumvis exactis *Nebenbetrachtung nicht gestrichen:* 113 *(2)* qvemadmodum *L*

$$\mathrm{c} \sqcap 355 - \frac{1}{\mathrm{b}}. \quad \mathrm{c} + \frac{1}{\mathrm{b}} \sqcap 355.$$

$$\mathrm{c} \sqcap 355 + \frac{1}{\mathrm{b}}.$$

9 f. ingeniosissimae ... nonnullae: W. Snell, *Cyclometricus*, 1621, insbesondere prop. XI u. XXXI f., S. 16–19 u. 46–58; Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, prop. X–XII u. XX, S. 15–21 u. 40–44 (*HO* XII S. 139–149 u. 173–181); J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, prop. I–XXII, S. 11–36. 11 Archimedes ... aliique: Archimedes, *Dimensio circuli*; die von A. Metius z. B. in *Geometria practica*, 1625, S. 178 f., u. *Manuale arithmeticae et geometriae practicae*, 1633, S. 102 f., überlieferte Näherung stammt von seinem Vater A. Anthonisz; Ludolph van Ceulen, *Vanden Circkel*, 1596; J. Gregory, *a. a. O.*, prop. XXIX, S. 43 f.; J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191, S. 178–193 (*WO* I S. 467–476). 14 docet: Euklid, *Elemente*, X. 24 f. Zu den Abschätzungen vgl. I. Barrow, *Lectiones geometricae*, 1672, S. 103.

circumscribantur, poterunt angulis quos comprehendunt bisectis (bisectio enim anguli per *Elementa* fieri potest) alia duo duplum laterum vel angulorum numerum habentia inscribi ac circumscribi, idque in infinitum continuari, circulo semper inter ultimum inscriptum et circumscriptum cadente. Nempe si a trigono incipias, sequetur Hexagonum, Dodecagonum, 24^{gonum}, 48^{gonum}, 96^{gonum}, inscriptum pariter et circumscriptum. Et hoc modo procedi potest, quousque voles, et quoniam cujuslibet polygoni geometrice per has bisectiones inventi area semper haberi potest in numeris satis exactis, ideo semper duae habebuntur areae intra quas circulus cadet quae propius semper accedent; et ita fieri potest ut error sit minor quovis dato id est si quis a me postulet numerum qui rationem circumferentiae ad Diametrum tam prope exprimat, ut non differat a vero centesima millesima, aliave unitatis parte, id continuatis bisectionibus efficere possum. Hanc methodum Archimedes coepit, Metius longius, sed longissime omnium incredibili Labore produxit Ludolphus a Colonia, qui si scivisset compendia hodie nata, utique magna laboris parte fuisset levatus. Ex proportionibus autem inventis ad usum in minimis sufficit Archimedea, quod scilicet circumferentia sit ad diametrum ut 22 ad 7, in mediis Metiana, quod sit ut 355 ad 113, in magnis satis est adhiberi partem Ludolphinae, quod sit ut ..... ad ..... Inventa autem ratione diametri ad Circumferentiam potest facile omnis alius arcus quilibet mensurari ope Tabulae sinuum. Nam si quis ex tabulis excerpserit sinum dimidii minuti ac duplicaverit, habebit chordam minuti, seu ipsius arcus qui sit 21600ma pars Circumferentiae, quae chorda cum mediocris exactitudo desideratur, potest arcui suo aequalis poni, adeoque ad arcus exempli causa septem graduum inveniendam longitudinem, quoniam is 420 minuta continet, suffecerit chordae unius minuti longitudinem ex Tabulis inventam per 420 multiplicari. Si quis exactius adhuc procedere velit, Sinu Minuti secundi eodem modo uti potest.

Et haec quidem Circuli ejusque partium Quadratura, etsi Rationalis sit, Mechanica tamen appellatur. Exacta autem est, quae quaesitam Circuli aut arcus magnitudinem exacte exhibet, eaque aut L i n e a r i s , aut N u m e r i c a est, scilicet vel ductu linearum,

6 potest, *(1)* usqve ad Polygona 12308 laterum; et ita porro, later *(2)* qvam *(3)* qvousqve *L*
13 compendia *(1)* a Jac. Gregorio Scoto circa series convergentes ingeniose inventa *(2)* hodie *L*
14 inventis *(1)* Exacta Circuli Qvadratura etiam vel Linearis vel Calculatoria est. Calculatoria vel Analytica, vel Arithmetica. Est autem Analytica simul et Linearis. itaqve dici potest tres posse exactas intelligi Qvadratu *(2)* ad *L*

2 potest: *a. a. O.*, I, 9.

vel expressione valoris. Valor exprimi potest exacte, vel per quantitatem, vel per progressionem quantitatum cujus natura et continunandi modus cognoscitur. Per quantitatem, ut si quis numerum aliquem sive rationalem, sive irrationalem, sive etiam Algebraicum, aequationi cuidam inclusum daret, quo valor arcus circuli exprimeretur. Per progressionem, si quis ostendat progressionem quandam, cujus continuandae in infinitum regula datur, totam simul sumtam arcus vel circuli valorem exacte exprimere. Prior expressio a me vocatur Analytica, posterior vero, cum progressio procedit in numeris rationalibus jure Quadraturae Arithmeticae titulo censeri posse videtur, ut cum dico[:] Si quadratum diametri sit 1, Circulum aequari toti progressioni fractionum sub unitate imparium alternis affirmatarum et negatarum, nempe $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. in infinitum, ut in hoc opusculo demonstrabitur, ubi negari non potest exactum quendam Circuli valorem, expressionemque magnitudinis ejus aliquam omnino veram esse repertam. Ipsa enim series horum numerorum tota, utique non est nihil, potest enim augeri ac minui, possunt multa de ea theoremata evinci. Et quomodo obsecro possibile est eam esse nihil, si valorem circuli exprimit, nisi hunc quoque nihil esse putemus. Quod si ergo est aliquid, utique aliquem Circuli valorem exactum deprehendimus. Et si quis aliquando reperiret progressionem characterum, qua semel cognita Ludolphi expressio sine novo calculo continuari posset in infinitum (: qualem progressionem utique regula quadam certa constare necesse est :) quod foret pulcherrimum; is haberet quadraturam Circuli Arithmeticam in integris, quemadmodum nos dedimus in fractis. Sed hanc regulam et difficillimam fore arbitror, et valde compositam, et minus pulchrum theorema exhibituram, ac nostra, in qua mira quaedam naturae simplicitas elucet, ut illi ipsi numeri, qui sunt differentiae omnium ordine quadratorum, circuli ad quadratum a diametro rationem exprimant: ut adeo vix ipsa analytica circuli expressio una quantitate facienda, si quando reperietur, pulchrior futura videatur. Praeterquam quod eadem regula non circulus tantum sed et quaelibet ejus portio, nec circumferentia tantum, sed et quilibet arcus inveniatur, quod expressione analytica aequabili fieri impossibile est. Regula nostra generalis, adeoque Quadratura Arithmetica plena huc redit, ut Tangente, quae radio non major sit posita *b*. radio Unitate, arcus ipse scil. quadrante non major, sit

5 in infinitum *erg. L* 11 ut ... demonstrabitur, *erg. L* 12 f. repertam, | tametsi non sit Linearis, nec eius ope linea qvaedam recta *(1)* aeqvalis *(2)* vere aeqvalis cirumferentiae, *(a)* inveniri *(b)* designari qveat. *gestr.* | Ipsa *L*

$\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. Unde Trigonometrica problemata sine tabulis efficienda oriuntur. De quo postea.

Supersunt adhuc Quadraturae exactae duae, altera Linearis, sive Geometrica, altera Analytica. Equidem nec omne Analyticum Geometricum est, possunt enim exprimi magnitudines quaedam, quae per cognitas artes non possunt ductis lineis exhiberi; contra lineae designari possunt instrumentis, quarum expressio nondum sit in potestate. Ostendam enim aliquando esse Lineas Geometricas, quae non minus facile ac Cartesianae motibus regularum certa quadam ratione incedentium describantur et aeque geometricae sint ac parabolae et hyperbolae, et ad certa quaedam problemata solvenda unice necessariae sint, calculo tamen ad aequationes quasdam certasque dimensiones revocari nequeant. Perfecta autem Quadratura illa erit quae simul sit Analytica et linearis, sive quae lineis aequabilibus, ad certarum dimensionum aequationes revocabilibus, construatur. Hanc impossibilem esse asseruit ingeniosissimus Gregorius in libro de *Vera Circuli Quadratura*, sed demonstrationem tunc quidem, ni fallor, non absolvit. Ego nondum video quid impediat circumferentiam ipsam aut aliquam determinatam ejus portionem mensurari, et cujusdam arcus rationem ad suum sinum, certae dimensionis aequatione exprimi.

[*Erster Ansatz, durch Umrahmung isoliert*]

Sed relationem arcus ad sinum in universum aequatione certae dimensionis explicari impossibile est. Quod facile sic demonstratur. Esto aequatio illa inventa, gradus cujuscunque certi, verbi gratia, cubica, quadrato-quadratica, surdesolida seu gradus quinti, gradus sexti, et ita porro, ita scilicet ut maxima aliqua sit aequationis inventae dimensio, exponentem habens numerum finitum. Hoc posito linea curva ejusdem gradus delineari poterit, ita ut abscissa exprimente sinus, ordinata exprimat arcus, vel contra. Hujus ergo lineae ope poterit arcus, vel angulus in data ratione secari, sive arcus, qui ad datum rationem habeat datam, inveniri sinus; ergo problema sectionis anguli universalis certi erit gradus, solidum scilicet, aut sursolidum, aut alterius gradus altioris, quem scilicet natura vel aequatio hujus lineae

12 construatur. *(1)* Sed qvoniam hanc plenam esse impossibile est, ideo Qvadratura perfecta plena, qvalis *(2)* Hanc in *(3)* Hanc *L*

13 asseruit: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, prop. 11, S. 25–28.

dictae ostendet. Sed hoc absurdum est; constat enim tot esse varios gradus problematum, quot sunt numeri (saltem impares) sectionum; nam bisectio anguli est problema planum, trisectio problema solidum sive Conicum, quinquesectio est problema surdesolidum, et ita porro in infinitum, altius fit problema prout major est numerus partium aequalium, in quas dividendus est angulus; quod apud Analyticos in confesso est, et facile probari posset universaliter, si locus pateretur. Impossibile est ergo relationem arcus ad sinum, in universum certa aequatione determinati gradus exprimi. Q. E. D.

Hinc sequitur Corollarium:

[*Zweiter Ansatz*]

Sed relationem arcus ad sinum in universum aequatione certae dimensionis explicari impossibile est quemadmodum in ipso opusculo demonstrabo, unde et Corollarium hoc ducam:

„Quadraturam plenam, analyticam, aequatione expressam, cujus terminorum dimen-
„siones sint numeri rationales, perfectiorem, quam dedimus, cum arcum quadrante
„non majorem diximus esse, $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. posita tangente ejus b et
„radio 1, reperiri non posse.

Qualiscunque enim dabitur, utique progredietur in infinitum, nam alioqui ut ostensum est vel non erit plena, sive non quemlibet arcum exhibebit, vel erit certae ad summum dimensionis quod absurdum esse demonstravimus. Quodsi jam progredietur in infinitum, hac utique, quam dedimus, perfectior non est. Ejus enim imperfectio in eo

---

15 *Nebenbetrachtung:* $\int y - \int z$

$$y \sqcap b^{4\omega+1} \,.\, z \sqcap b^{4\omega+3}$$

$$\text{Arc} \sqcap \int \sqrt{\frac{b^{2\omega+1}}{2\omega+1} - \frac{b^{2\omega+3}}{2\omega+3}}$$

23 Arc $\sqcap$ *(1)* $\int \sqrt{\frac{\mathrm{b}^{4\omega+1}}{4\omega+1} - \frac{\mathrm{b}^{4\omega+3}}{4\omega+3}}$ *(2)* $\int \sqrt{\frac{\mathrm{b}^{2\omega+1}}{2\omega+1} - \frac{\mathrm{b}^{2\omega+3}}{2\omega+3}}$ *L*

---

5 probari: Der Beweis wurde erst im 19. Jh. geführt. 23 Arc: Gemeint ist vielleicht der Ansatz $\text{Arc} = \frac{b^{2\omega+1}}{2\omega+1} - \frac{b^{2\omega+3}}{2\omega+3} = \int b^{2\omega} - \int b^{2\omega+2}$.

consistit, quod in infinitum progrediendum est. Commodiorem nostra ac simpliciorem esse forte possibile est, sed id parum moramur, praesertim cum ne verisimile quidem fiat, simpliciorem atque naturaliorem et quae mentem afficiat magis, salva generalitate, reperiri posse expressionem.

20. QUADRATURAE CIRCULI ARITHMETICAE PARS PRIMA
[April – Juni 1676]

Überlieferung: *L* Überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 144–159. 8 Bog. 2°. 29 S. Haupttext auf Bl. 145–158. Fig. 1–5 sowie die beiden Fig. zu Stufe *(1)* der Lesart zu S. 182 Z. 3 bis S. 184 Z. 1 auf der Figurentafel Bl. 159 v°. Auf dem Rest des Bogens Bl. 144+159 N. 21. Auf Bl. 151 r° überarbeitete Fassung von prop. 1, gestrichen. Geringe Textverluste durch Papierschäden. — Gedr.: 1. (Teildruck der Abweichungen von N. 51 einschließlich einiger Lesarten) Scholtz, *Grundlegung*, 1934, S. 41–65, 67–69 (tlw. = Z. 26 – S. 179 Z. 14, S. 181 Z. 18 – S. 201 Z. 4, S. 202 Z. 14 – S. 207 Z. 15, S. 209 Z. 3 – S. 213 Z. 27, S. 248 Z. 14 – S. 253 Z. 9). 2. Knobloch, *Progrès*, 1989, S.167–169 (tlw. = Scholium zu prop. 9, S. 212 Z. 9 bis S. 213 Z. 27).
Cc 2, Nr. 1233 C tlw.

Datierungsgründe: Das Papier der Handschrift von N. 20 ist mit einem Textzeugen (N. 23) für den 8. Juni 1676 belegt. Das auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschriebene N. 24 ist vor N. 27 vom 29. Juni 1676 entstanden. Wie die Verwendung der Sätze von Ricci bzw. Sluse zeigt, ist N. 20 nach VII, 5 N. 68 u. 69 entstanden. Einen weiteren Hinweis bietet das Scholium zur zweiten prop. 9 in N. 20: Die darin enthaltenen Ausführungen zum „spatium absolute interminatum“ setzen wohl Leibniz' Überlegungen in *Linea interminata* vom April 1676 (VI, 3 N. 65) sowie *Extensio interminata* (VI, 3 N. 66) voraus. Letzteres war ursprünglich auf dasselbe Blatt geschrieben worden wie Leibniz' Exzerpt des Satzes von Sluse (VII, 3 N. 65). Im Ende April/Anfang Mai 1676 entstandenen Stück VII, 5 N. 74 wird ein Beweis für einen Spezialfall der Quadratur des Zykloidensegments ausgearbeitet, der auf der Quadratur der zugehörigen Retorta beruht. In N. 20 formuliert Leibniz einen eigenen Satz über die Quadratur des allgemeinen Zykloidensegments aus der zugehörigen Retorta (prop. 10) und leitet dann daraus die Quadratur des speziellen Zykloidensegments (prop. 11) ab. Der Teil bis zur zweiten prop. 9 nach der ergänzten, nicht nummerierten prop. dürfte vor N. 22 entstanden sein, d. h. spätestens bis 4. Juni 1676.

Quadraturae Circuli Arithmeticae
Propositio Prima

„Si per trianguli tres angulos totidem transeant rectae parallelae indefinitae, trian-
„gulum erit dimidium rectanguli sub intervallo duarum parallelarum et sub portione
„tertiae, inter angulum per quem transit, et latus angulo oppositum, si opus est,
„productum, intercepta, comprehensi.

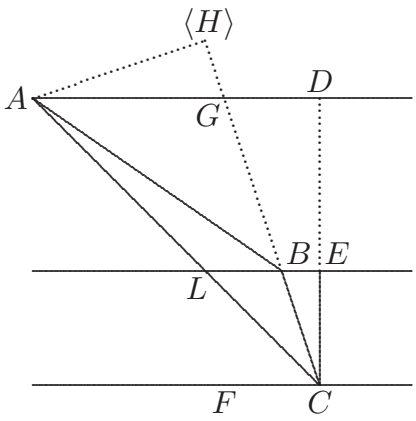


fig. 1

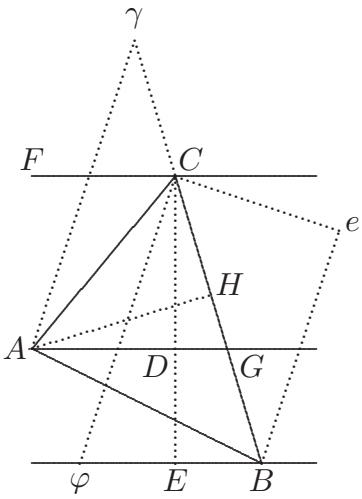


fig. 2

Sit triangulum ABC. figura 1. et 2. per cujus tres angulos transeant rectae parallelae, quantum satis est productae, AD, BE, CF. Duarum BE, CF intervallum est CE. Tertia parallela AD cujus angulo A oppositum trianguli latus CB, productum, si opus est, occurrat ipsi AD in G. Ajo triangulum ABC rectanguli sub AG et CE dimidium esse.

Ad ipsam CB productam quantum satis est, ex angulo opposito A. perpendicularis ducatur AH. Duo triangula rectangula AHG, CEB, similia sunt, praeter rectum enim, unum adhuc angulum, (: qui in triangulo rectangulo necessario acutus est :) aequalem habent, ipsum HGA, ipsi CBE, quia duo anguli acuti ab eadem recta CBH vel CHB ad duas parallelas AG, BE effecti utique aequales sunt. Ergo erit CE ad AH ut CB ad AG, id est rectangulum CE in AG aequabitur rectangulo AH in CB. At rectangulum AH in CB duplum est trianguli ABC factum scilicet ex basi ejus in altitudinem. Ergo et rectangulum CE in AG trianguli ABC duplum; sive triangulum ABC rectanguli sub AG et CE dimidium erit.

---

1 *Neben fig. 2:* $\left.\begin{array}{l} AHB \\ CeB \\ CE[B] \end{array}\right\}$ *angle droit*[,] *eB et Cφ. γA paralleles.*

7 AH. *(1)* Angulus BGD vel HGA aeqvalis angulo CBE. Sunt ergo *(2)* duo *L* 16 | EB et *erg.* | Cφ. γH *L ändert Hrsg.*

[*Überarbeitete Fassung von prop. 1, gestrichen*]

„Si per trianguli tres angulos totidem transeant rectae parallelae interminatae, tri-
„angulum erit dimidium rectanguli sub intervallo duarum parallelarum et portione
„tertiae intercepta inter puncta quibus angulo trianguli et opposito lateri, si opus
„est producto, occurrit.

Sit triangulum ABC fig. 1. et 2. per cujus tres angulos transeant rectae parallelae interminatae (: quantum satis est productae, :) AD, BE, CF. Duarum ex his, (: pro arbitrio assumtarum :) BE, CF intervallum (: seu distantia minima :) est CE. tertia ipsis parallela AD quae occurrit triangulo in angulo A, latus huic angulo oppositum est CB, quod productum, si opus est occurrit ipsi AD (: etiam productae quantum opus :) in puncto G. Occurrit, inquam, quod sic probo, si AD ipsi BC, producta productae, non occurrit erunt parallelae; ipsi autem AD parallelae sunt EB. FC, ergo et hae ipsi BC parallelae erunt, ergo eam non secabunt in punctis B vel C. contra hypothesin. O c c u r r u n t ergo s i b i $A\,D$ e t $B\,C$ i n p u n c t o G. Ajo triangulum ABC rectanguli sub AG, et CE dimidium esse. Ex puncto A ad rectam BC productam si opus est ducatur

8 *Über* minima *und am Rand jeweils:* ∗

14 p u n c t o G. *(1)* Ajo jam triangulum ABC rectanguli sub AG portione rectae AD si opus est productae, inter puncta A, qvibus angulo trianguli, et G, qvibus lateri ad hunc opposito occurrit rectanguli sub AG et CE dimidium esse. Ad ipsam CB productam qvantum satis est, ducatur | ∗∗ *interlin. u. a. Rand erg.* | perpendicularis AH. Triangula AHG, CEB, rectangula sunt, ex constructione (: per ∗ et ∗∗ :), ergo anguli in ipsis, praeter rectum, ut HGA, EBC acuti. Porro hi duo anguli efficiuntur ab eadem recta, (: latere scilicet BC, producto :) ad duas parallelas, AG, EB; duo autem anguli acuti ab eadem recta ad duas parallelas facti, aeqvales sunt. Ergo anguli HGA, EBC aeqvales sunt. Ergo triangula rectangula AHG, CEB similia sunt, eritqve CE ad AH ut CB ad AG, id est rectangulum CE in AG aeqvale erit rectangulo AH in CB. At rectangulum AH in CB duplum est Trianguli ABC, factum scilicet ex basi CB in altitudinem AH. Ergo et CE in AG huius trianguli duplum *(a)* erit. Qvod ostendendum sumseramus *(b)*, sive triangulum ABC rectanguli sub AG et CE dimidium erit *(2)* Ajo *L*

1–181,17 Leibniz hat die prop. 1 auf Bl. 151 r° überarbeitet und diese Fassung in N. 51 zunächst weitgehend übernommen, dann jedoch durch eine stark verkürzte Version ersetzt; s. Lesart zu S. 522 Z. 2.

perpendicularis AG, manifestum est triangulum ABC rectanguli sub AH altitudine, et BC basi, dimidium esse, quare et rectanguli sub AG et CE dimidium erit, si ostendamus rectangulo sub AH et BC, aequari rectangulum sub AG et CE. Id vero ita constabit: tres parallelae AD, BE, CF ad ipsam BC angulum faciunt vel rectum, vel obliquum, si rectum, erit angulus CBE, item AGH rectus, et coincident puncta B et E, H et G, ergo coincident etiam recta AG cum recta AH, ac recta CE cum recta CB, ergo et rectangulum sub AG et CE rectangulo sub AH et CB. Sin angulus quem parallelae faciunt ad ipsam BC, sit obliquus habebimus duo triangula rectangula AHG, et CEB, ergo anguli in ipsis praeter rectum, ut AGH, CBE, acuti sunt; porro hi duo anguli efficiuntur ab eadem recta (: latere scilicet BC producto si opus :), ad duas parallelas AG, EB. Duo autem anguli acuti ab eadem recta ad duas parallelas facti, aequales sunt. Ergo anguli HGA, EBC aequales sunt. Ergo triangula rectangula AHG, CEB sunt similia, eritque CE ad AH, ut CB ad AG, id est rectangulum CE in AG, rectangulo AH in CB aequale erit. Hoc ergo cum semper eveniat, et rectanguli AH in CB dimidium sit triangulum ABC, ut diximus, etiam rectanguli CE in AG dimidium erit. Quod ostendere propositum erat.

Scholium.

Cum infinitis modis in eodem triangulo et parallelae duci, et intervalla eligi possint, patet omnia rectangula hujusmodi etiam fore aequalia inter se, cum uni eidemque triangulo duplo aequentur, ut Rectangula CD in LB, CE in AG, Ce in $A\gamma$ si quae sunt in duabus figuris 1. 2. in unum, eodem utrobique sumto triangulo ABC, conjuncta intelligantur.

Porro Lemma quod demonstravimus, facile utique et in proclivi positum, sed quod usus tamen habet late patentes, quoniam enim rectanguli et trianguli naturas in unum conjungit, utique foecundius esse debet, quam si non nisi alterutram contineret. Ejus enim auxilio figurae curvilineae etiam in triangula utiliter resolvuntur cum Cavalerius

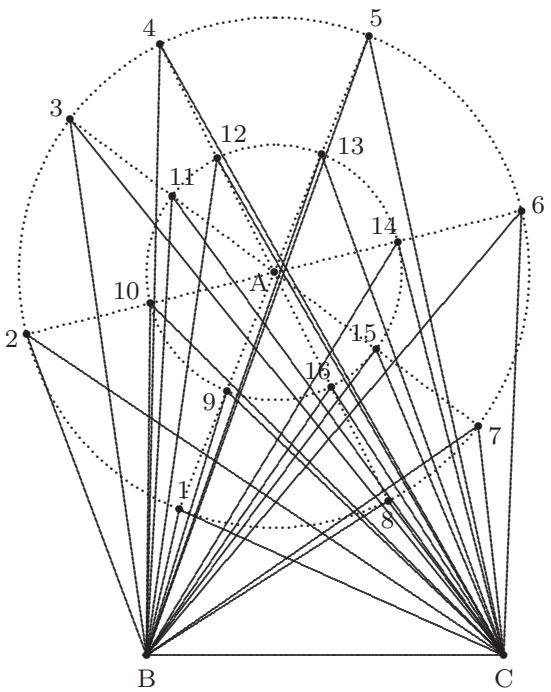
21–23 ut ... intelligantur *erg. L.*

27 Cavalerius: B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635.

aliique doctissimi viri, eas in parallelogramma tantum partiri soleant; generalem certe in triangula resolutionem, quod sciam non adhibuerint. Sed haec clarius ex prop. ... patebunt.

3–184,1 patebunt. | *(1)* invenire summam sive aream omnium simul Triangulorum super eadem basi positorum verticesqve habentium in punctis qvibus circuli concentrici qvotcunqve aliqvot rectas interminatas qvotcunqve in eodem centro convenientes secant.

fig. 3

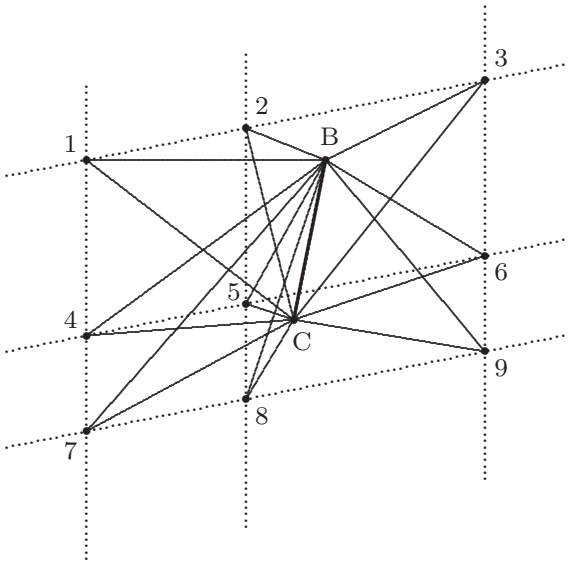


Ut invenire summam triangulorum, 1BC, 2BC 3BC, 4BC etc usqve ad 20BC. qvod brevissima regula fieri potest, qvae inventu difficilis non est
idem est si vertices sint in intersectionibus parallelarum qvotcunqve occurrentium aliis parallelis qvot-

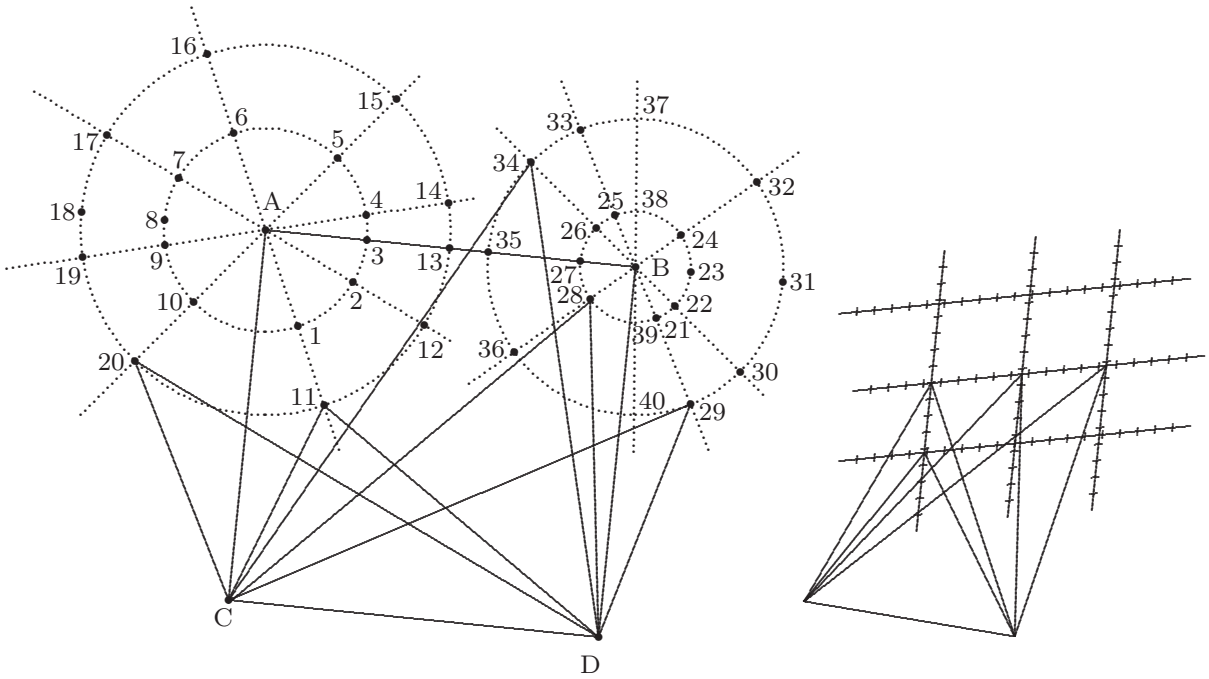
2 prop. ....: prop. 7 S. 197 Z. 13–20. 4–184,31 invenire ... erit: vgl. VII, 1 N. 34 S. 210.

cun⟨qve⟩

fig. 4.



| *Neben fig. 4:* 2. 5. 8. ne doit pas estre dans le milieu entre 1. 3. ou 4. 6. | *(2)*



in fig. Triangula 1CD, 2CD. 3CD etc usqve ad 20CD; triangulo ACD, vicies sumto aeqvabuntur *(3)* invenire summam triangulorum super data basi communi, verticibus in rectarum qvotcunqve intermi-

Propositio Secunda

„Series differentiarum, inter quantitates ordine perturbato dispositas, major est se-
„rie differentiarum, inter quantitates easdem ordine naturali aut minus perturbato
„collocatas.

Ordinem naturalem voco, cum proceditur a majori ad minus, vel a minori ad majus, perturbatum cum modo ascenditur modo descenditur.

Sint quantitates ordine naturali dispositae:

$$\begin{array}{lccc} & A & A+B & A+B+C \\ \text{differentiae} & & B & C \end{array}$$

summa differentiarum seu tota differentiarum series, $B+C$. Iidem termini ordine perturbato dispositi:

$$\begin{array}{lccc} & A+B & A & A+B+C \\ \text{differentiae} & & B & B+C \end{array}$$

summa seu series harum differentiarum, $2B+C$. major utique quam $B+C$, series prior, idemque in serie l⟨on⟩giore saepius perturbata saepius fiet. Ergo generaliter summa differentiarum in ordine perturbato major quam in naturali, aut rarius perturbato, quod asserebatur.

natarum convergentium; et circulorum concentricorum ex earum concursu descriptorum intersectionem cadentibus qvod fiet si numerus punctorum multiplicat triangulum cuius eadem qvae ⟨caeteris⟩ basis, vertex in centro sit; prod⟨u⟩ctum erit summa. quae summa aeqvabitur facto ex multiplicatione numeri punctorum, *(4)* Unum hoc loco adjiciam, idem Lemma ad alia qvaedam | praeclara *gestr.* | theoremata Geometrica condenda esse utile; aut etiam ad solvenda problemata sane *(a)* pulchra *(b)* elegantia *(c)* non vulgaria. qvale hoc est: centro A describantur circuli concentrici qvotcunqve, secantes rectas interminatas qvotcunqve per centrum A transeuntes in punctis numero qvotcunqve ut 20; idemqve fiat circa centrum B, modo circuli circa B, non secent circulos circa A, jam punctis intersectionum 1. 2. 3. 4. 5. etc. *(aa)* 18. *(bb)* 20. | item 21, 22 etc 40 *erg.* | velut verticibus, recta CD, ipsi AB parallela velut basi formentur totidem triangula, 1CD. 2CD. 3CD, etc. usqve ad *(aaa)* 36CD *(bbb)* 40CD | qvae vitandae linearum confusionis causa non omnia in figura designavi *erg.* | Qvaeritur horum triangulorum omnium summa, ajo haec *(aaaa)* 36 *(bbbb)* 40 triangula aeqvare *(aaaaa)* triangulo ABC *(bbbbb)* parallelogrammo ABCD *(aaaaaa)* decies octies *(bbbbbb)* tricies sexies sumto seu per numerum | 20 *erg.* | qvi est triangulorum alterutrius centri multiplicato. Cuius demonstrationem invenire, exercitium potius ingenii qvam tormentum erit *erg. u. gestr.* | Propositio *L* 3 naturali *(1)* collocatas *(2)* aut *L* 7 Sint *(1)* termini *(2)* quantitates *L* 16 f. quod *(1)* erat propositum *(2)* asserebatur *L*

3 aut minus perturbato: Dieser Teil der Behauptung gilt i. Allg. nicht.

Propositio Tertia

„In serie quotcunque quantitatum differentia extremarum non potest esse major „summa differentiarum intermediarum.

Sint quantitates A B C D E A E
differentiae f g h l m

nempe differentia inter A et B sit f. inter B et C sit g. et ita in caeteris. Denique differentia inter A et E extremas sit m. Ajo m non posse esse majorem quam $f+g+h+l$.

Artic. I. Nam termini A. B. C. D. E. vel ordine naturali collocantur, vel perturbato.

8–186,1 peturbato; *(1)* si naturali, tunc | per prop. ... *erg.* | constat m esse idem qvod f + g + h + l. est enim in ordine naturali

	A	B	C	D	E	idem
qvod	A	A + f	A + f + g	A + f + g + h	A + f + h + g	ascendendo scilicet a minori et majus;

vel idem,

qvod	A	A − f	A − f − g	A − f − g − h	A − f −g − h − l descendendo a majori ad minus.

Utroqve casu differentia inter A et E erit f+g+h+l. nam priore cum E sit major qvam A tunc differentia erit E − A, id est A, +f+g+h+l, −A, vel f+g+h+l posteriore cum A sit major qvam E, erit differentia, A − E, est autem E posteriore casu A − f − g − h − l, et −E erit −A + f + g + h + l. ergo A − E erit A, $\underbrace{-A+f+g+h+l}_{-E}$ id est f + g + h + l. Utroqve ergo casu, *(2)* in ordine naturali, per prop. ... differentia inter A et E, seu m, idem valebit qvod f + g + h + l. summa differentiarum intermediarum non ergo major. At

| *Dazu am Rand:*

⟨Propos⟩itio ...

In serie qvantitatum ordin⟨e⟩ naturali collocatarum differentia extremarum est summa seriei differentiarum

(a) qvantitates ordine naturali collocatae A. B. C. D. E continuo ab infima crescunt aut a summa decrescunt, ergo ita poterunt exprimi A B C D E

(*b*)	⟨qv⟩antita⟨tes	A⟩	(*aa*)	A + f	A + f + g	A + f + g + h	A + f + g + h + l
			(*bb*)	A − f	A − f − g	A − f − g − h	A − f − g − h − l
	seu	A		B	C	D	E
	differentiae		f	g	h	l	

patet *(aaa)* E − A *(bbb)* A − E esse f + g + h + l.

Corollarium:

Si series decrescat in infinitum, terminus maximus aeqvatur summae differentiarum

Nam terminus minimus E est 0 ergo A − E est A. si naturali tunc constat m esse idem qvod f + g + h + l.

Si naturali tunc constat m esse aequale summae $f+g+h+l$. Nam si alterutra extremarum, ut A posita sit minima, altera ut E maxima, erit

series	A	B	C	D	E
eadem, isti,	A	$A+f$	$A+f+g$	$A+f+g+h$	$A+f+g+h+l$

et differentia inter A et E nempe m erit $f+g+h+l$. Idem esset si E esset minor quam A. Ergo in ordine naturali, m, differentia inter A et E, terminum maximum et minimum.

Artic. II. At si ordo quantitatum $A. B. C. D. E.$ sit perturbatus, tunc major est series differentiarum $f+g+h+l$ quam si esset naturalis, per prop. 2. major ergo quam differentia termini maximi et minimi, quia, ut ostendimus artic. 1. ea differentia aequatur seriei differentiarum ordinis naturalis.

Artic. III. Quoniam autem in casu situs perturbati summa differentiarum intermediarum $f+g+h+l$ major est quam differentia terminorum duorum, qui inter hos $A. B. C. D. E.$ maximi et minimi sunt, per artic. 2. erit et major quam differentia terminorum duorum ⟨a⟩liorum (quippe minus differentium quam maximus et minimus) ergo generaliter quam quorumcunque hujus seriei terminorum, ergo et major quam differentia inter A et E, seu major quam m. Ergo m minor erit quam $f+g+h+l$. Cum ergo in casu ordinis naturalis m sit huic summae aequalis [per] artic. 1, in casu ordinis perturbati minor, ut hic ostendimus neutro casu major erit. Quod ostendendum sumseramus.

Scholium

Poteram propositione 2 et 3 carere, neque enim ad propositiones sequentes opus habebam nisi casu trium quantitatum $A. B. C.$ Malui tamen generaliter potius enuntiare

Nam si	A	B	C	D	E
idem qvod	A	A + f	A + f + g	A + f + g + h	A + f + g + h + l
differentiae	f	g	h	l	

erit m, idem qvod E − A id est f + g + h + l

Sin vero	A	B	C	D	E
idem qvod	A	A − f	A − f − g	A − f − g − h	A − f − g − h − l
differentiae	f	g	g	l	

erit m idem qvod A − E, id est rursus f + g + h + l.

gestr. |

(3) Si *L* 15 f. ⟨a⟩liorum ... generaliter qvam *erg. L*

et demonstrare. Praesertim cum hae propositiones usque adeo universales sint, ut nullam omnino quantitatum varietatem morentur.

Propositio Quarta

„Differentia duarum quantitatum non potest esse major summa differentiarum ter-
„tiae a singulis.

Nempe sint duae quantitates A. E. quarum differentia $f_{[,]}$ sit alia C, et differentia inter A et C sit b. inter E et C sit $d_{[,]}$ ajo f non posse excedere $b + d$. Reducantur in unam seriem

quantitates	A		C		E		A		E.
differentiae		b		d				f	

Ergo res reducta est ad casum propositionis praecedentis; quippe quae omnibus sine discrimine seriebus convenit quomodocunque perturbatis, brevibus ut haec quae tres tantum terminos habet, aut productis, qualis est illa quam in exemplo propositionis praecedentis adduximus quae quinque terminos habet. Adeoque, per prop. praeced. f non potest esse major quam $b + d$. Quod ostendendum erat.

1 demonstrare. *(1)* Mihi enim magni momenti videntur propositiones, qvae usqve adeo generales sunt *(2)* praesertim ... universales | sunt *ändert Hrsg.* |, ut *L* 2 f. morentur. *(1)* Caeterum non injucundum erit unico saltem exemplo in numeris experiri, sint

Qvantitates	4.	3.	2.	6.	9.	1000009
Differentiae	1.	1	4	3	1000000	

| *Daneben am Rand:* 100000$\overline{\underline{9}}$ id est 1000000 − 9 sive 999991 |
(2) Certum est qvantuscunqve assumatur terminus ultimus, et qvantulicunqve assumantur primi *(a)* semper *(b)* nunqvam tamen differentiam inter primum et ultimum majorem fore qvam summas intermediarum, ut *(3)*

Propositio Qvarta

Differentia duarum qvantitatum non potest esse major summa differentiarum tertiae a singulis

Nempe differentia inter A et *(a)* C sit ⟨g⟩, sit tertia qvantitas ⟨D⟩ Differentia inter A et ⟨D⟩ sit ⟨f⟩, inter C et D, sit ⟨ e ⟩. *(b)* E sit f, sit tertia qvantitas ⟨C⟩. Differentia inter A et ⟨C⟩ sit b, inter E et C, sit d *(4)* Propositio *L* 12–14 brevibus | ut ... habet, *erg.* | aut productis, | qvalis ... habet *erg.* | *erg. L*

Propositio Quinta

„Differentia duarum quantitatum minor est summa duarum aliarum quantitatum, „quarum una unius, altera alterius priorum differentiam a tertia excedit.

Schema ita stabit:

Quantitates	A		C		E
Differentiae verae		b		d	
minores quam:		g		h	
Ergo ipsarum	A				E
differentia vera			f		
minor quam			$g+h$.		

Nimirum ajo f differentiam quantitatum duarum A. E. minorem esse, quam summam duarum aliarum quantitatum, g. h, seu minorem quam $g+h$, si g excedat b differentiam ipsius A a tertia C, et h excedat d differentiam ipsius E, ab eadem tertia C. Nam g est major quam b, et h major quam d, ex hypothesi, ergo $g+h$ est major quam $b+d$. At f non est major quam $b+d$ per prop. 4. Ergo f est minor quam $g+h$.

Scholion

Has propositiones ⟨quart⟩am et quintam, etsi valde claras attente consideranti, adjiciendas duxi tamen tum quod servient ad facilem admodum per sola polygona inscripta sine circumscriptis demonstrationem apagogicam, qua propositione 7. utar, tum quod operae pretium videatur ipsius per se differentiae proprietates considerare, quatenus ab excessu vel defectu animo abstrahitur; cum scilicet non exprimitur, quaenam ex differentibus quantitatibus altera major minorve sit.

3 f. excedit. *(1)* Iisdem qvae in propositione praeced. positis, f est minor qvam b + d. *(a)* ergo et minor qvam summa duarum qvantitatum, qvarum una sit major qvam b, altera ma *(b)* per prop. praeced. Ergo et minor qvam id qvod est majus qvam b + d. jam vero *(aa)* compositum ex majore qvam b + maj. qvam d. utiqve est majus *(bb)* summa duarum qvantitatum qvarum una major qvam b, altera major qvam d utiqve est major qvam b + d. Ergo f haec ipsa summa minus erit, qvod propositio asserit. Nempe f differentiam duarum qvantitatum A. E. minorem esse, qvam summam e qvantitatibus qvarum una excedit ipsam b, altera ipsam d. b, inqvam et d, differentias tertiae C a singulis A. E. *(2)* Schema *L* 13 f. C. *(1)* Est enim f minor qvam b + d per prop. 4. ergo et minor q *(2)* Nam f non est major quam b + d per prop. 4. ergo f minor est eo qvod est maius qvam b + d, jam *(3)* Nam *L* 17 f. consideranti, | et prope per se notas *gestr.* | , adjiciendas *L*

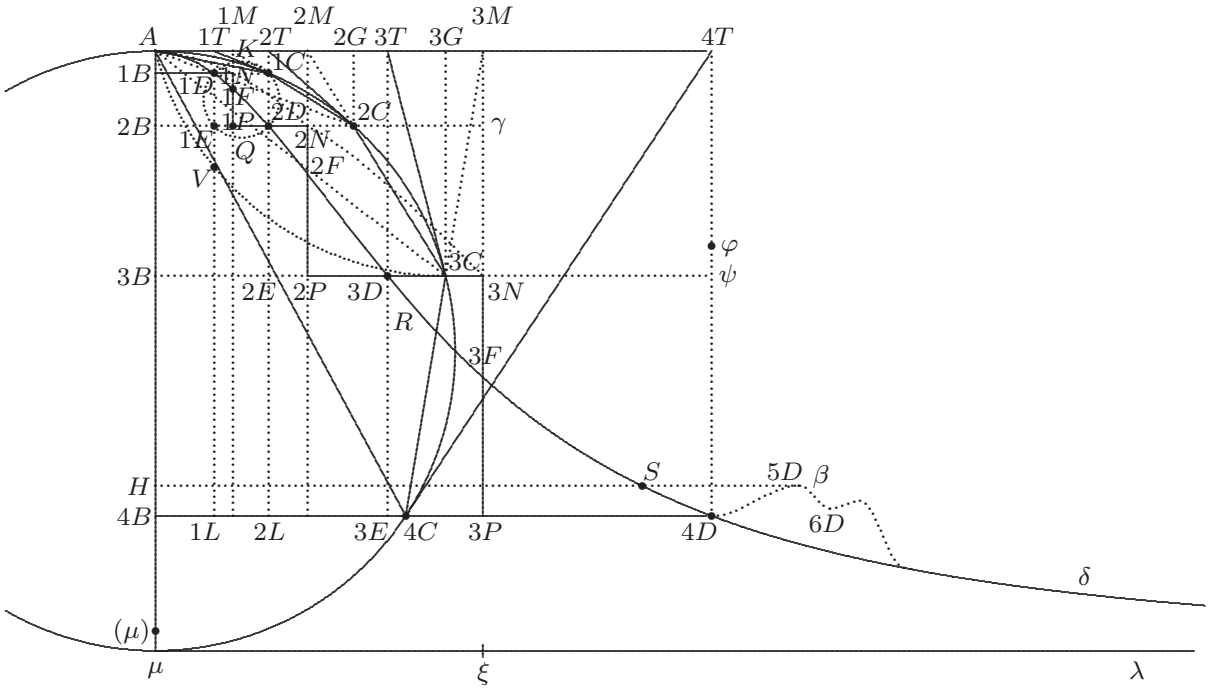
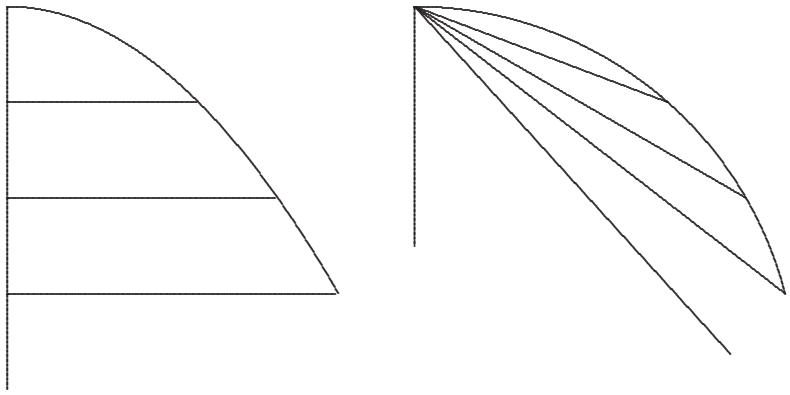


fig. 3

Propositio Sexta

[Hujus propositionis lectio omitti potest, si quis methodo indivisibilium contentus, in demonstranda prop. 7. summum rigorem non desideret.]

2–191,3 *Am Rand:*



---

1 fig. 3: Der Punkt (μ) wird nicht im vorliegenden Stück, sondern in N. 51 im geänderten Beweis zur dortigen prop. XI (hier die zweite prop. 9) benutzt; s. S. 211 Z. 25–30 und N. 51 S. 547 Z. 9–18.
3 f. Die eckigen Klammern stammen von Leibniz selbst.

„Si a quolibet curvae cujusdam propositae fig. [3.] $1C\,2C$ et caetera
„4 C puncto C ad unum anguli cujusdam recti, TAB, in eodem
„cum ipsa plano positi latus, velut ad axem $A1B2B$ etc. $4B$ ducantur ordinatae
„normales CB ad alterum latus $A1T2T$ etc: $4T$, tangentes CT, et
„ex punctis occursus tangentium T agantur perpendiculares TD ad or-
„dinatas respondentes, et curva nova $1D\,2D$ etc. $4D$ per intersectiones
„harum perpendicularium et ordinatarum transeat: Rursus si quaelibet in curva prio-
„re designata puncta proxima, ut $1C$ et $2C$, etc., $3C$ et $4C$ aliaque quotcunque, rec-
„tis inscriptis sive chordis $1C\,2C$ etc, $3C\,4C$: jungantur,
„quae productae, CM eidem, cui tangentes, Anguli illius recti, lateri, AT,
„occurrant in punctis M quae cadunt intra puncta T, ut $1M$ inter $1T$ et $2T$, etc. $3M$
„inter puncta $3T$ et $4T$ etc. et ex his occursuum punctis, M similiter perpendi-
„culares $1M\,1N\,1P$ etc. $3M3N3P$ ad duorum punctorum $1C$ et $2C$, etc. vel
„$3C$ et $4C$, etc. per quae transierant chordae inscriptae, ordinatas, nempe ad $1C1N$
„$1B$, $2C1P2B$ etc. vel ad $3C3N3B$, $4C3P4B$ demittantur, quae ab ipsis, inde ab axe,
„portiones quasdam, $1B1N$, etc. $3B3N$ resecent. His ita praescriptis ajo in
„curva puncta C inter $1C$ et $4C$ adeoque et puncta D inter $1D$ et $4D$ tam
„sibi vicina, tantoque numero assumta intelligi posse,
„ut spatium rectilineum gradiforme $1N1B4B3P3N2P2N1P1N$,
„ex rectangulis $1N1B2B1P$ etc. $3\langle N\rangle 3B4B3P$ sub ordinatarum resectis portioni-
„bus $1B1N$ etc. $3B3N$ et intervallis $1B2B$ etc. $3B4B$, comprehensis; compositum
„ab ipso spatio Quadrilineo, $1D1B4B4D3D$ etc. $1D$ axe $1B4B$; ordi-
„natis extremis $1B1D$, $4B4D$ et curva nova $1D2D$ etc. $4D$ comprehenso differat
„quantitate minore quavis data. Et eadem demonstra-
„tio locum habet in quovis alio spatio mixtilineo et
„gradiformi, continua rectarum ad quendam axem applicatione formatis. Ad-
„eoque methodus indivisibilium, quae per summas li-
„nearum invenit areas spatiorum pro demonstrata ha-

14 *Unter* ordinatas: NB

1 fig. ... *erg. L* 11 f. qvae ... etc. *erg. L* 17 inter 1C ... 4D *erg. L*

„b e r i p o t e s t . Requiritur autem ut c u r v a e $1C2C$ etc. $4C$ et $1D2D$ etc. $4D$ „aut saltem earum hae, quas dixi, portiones sint ad easdem partes cavae et punctis „reversionum careant.

Definitio

P u n c t a r e v e r s i o n u m voco, in quibus coincidunt ordinata et tangens seu ex quibus ordinata ad axem ducta, curvam tangit; talia sunt, in curva $1D2D$ etc. $4D5D6D$, puncta $4D$. $5D$. $6D$. quia in illis curva cum antea descenderet ab A versus $4B$ nunc rursus ascendit versus A vel contra. Quae differunt a p u n c t i s f l e x u u m c o n t r a r i o r u m ; quale est R, in quo tantum curva ex concava fit convexa et contra quae aliquando non obstant; puncta autem reversionum ideo nocent, quia ita fit ut diversae ordinatae ejusdem curvae, ut HS, $H5D$ inter se ex parte coincidant, adeoque per summam ordinatarum certarum rectarum aliarum summa spatii iniri non possit; huic malo remedium est, ut tota curva in tot dividatur portiones, quot habet puncta reversionum, hoc pacto singulae portiones, ut $1D2D$ etc. $4D$, $4D5D$, $5D6D$, nulla habebunt reversionum puncta inter

1 p o t e s t *(1)* Ponantur ita assumi puncta C ut portiones curvae 1C2C3C inter duo qvaelibet puncta vicina interceptae sint singulae aut totae ascendentes, aut totae descendentes, non vero partim ascendentes partim descendentes: qvod obtineri poterit, si in punctorum C. assumtorum numero sint omnia puncta reversionum, si qva sunt. Hoc posito manifestum est curva *(2)* Ponantur ita assumi puncta C, et per conseqvens et puncta D, ut portiones curvae 1D2D3D, inter duo vicina puncta interceptae, ut portio 1D2D, vel 2D3D, sint singulae aut totae descendentes, aut totae ascendentes, non vero tales, ut una eademqve portio partim descendat, partim vero rursus ascendat. Ascendere eam voco, cum versus rectam AT procedit, descendere cum ad rectam 3B3C qvemadmodum facit curva 3D4D5D qvae ascendit a 3D usqve ad 4D descendit vero rursus a 4D usqve ad 5D. cum contra curva 1DF2D descendat tantum ab 1D per F ad 2D. Hoc autem ut qvaelibet portio curvae, ut 1D2D, 2D3D, etc; descendat tantum, obtinebitur, si puncta 1D. 2D. 3D. 4D. 5D adeoqve ante omnia 1C. 2C. 3C, etc ita assumantur, ut in numero punctorum assumtorum D. sint omnia p u n c t a r e v e r s i o n u m curvae 1D2D3D, si qva habet. Vel etiam assumatur ea tantum curvae portio, 1D2D3D. qvae careat punctis reversionum; qvod obtinebitur si curva dividatur in portiones per ipsa puncta reversionum, portiones enim inter duo puncta reversionum vic | *Dazu am Rand:* extendiren die figur oben, was zur prop. . . . 6. gehoret auff die andre seite sezen *gestr.* | *(3)* Reqviritur *L* 2 f. dixi, *(1)* partes, c a r e a n t p u n c t i s r e v e r s i o n u m inter extrema puncta interjectis *(2)* portiones . . . punctis *(a)* flexuum *(b)* reversionum careant; | qvod fiet si ipsa puncta flexuum sint inter puncta divisionum. Puncta autem flexuum voco non tantum qvibus ex concava fit convexa, sed et puncta reversionum, qvibus curva antea descendens mox incipit rursus ascendere *gestr.* | *L* 4–192,3 Definitio . . . aliarum *gestr. u. durch Anmerkung* Haec restituenda. *wieder gültig gemacht L* 5 voco, *(1)* in qvibus curva ascendit *(2)* in *L* 5 f. seu . . . sunt, *erg. L*

extrema sua interjecta, et in singulis locum habebit nostra propositio. Ex his autem illud quoque patet curvam eandem habere posse puncta reversionum respectu ordinatarum ad certum ⟨axem⟩, ⟨alia vero⟩ respectu aliarum.

Demonstratio propositionis sextae

Artic. I. Punctum $1M$ positum est inter puncta $1T$. $2T$. ex constructione. Ergo et recta $1M1N1P$ cadet inter rectas $1T1D$, $2T2D$, seu recta $1N1P$ perveniens de parallela $1B1N$ ad parallelam $2B2D$, cadet inter duo puncta in his diversis parallelis posita $1D$. $2D$, ita ut a puncto $1D$ ad punctum $2D$ nulla possit duci linea, recta vel curva, quin vel rectam $1N1P$ secet alicubi in F, vel quin aut supra aut infra duas parallelas $1B1N$, $2B2D$ evagetur, adeoque modo ascendat modo descendat, ut curva $1DQ2D$ descendens ab $1D$ ad Q, et rursus ascendens a Q ad $2D$; vel curva $1DK2D$ ascendens ab $1D$ ad K, et descendens a K ad $2D$, quae adeo habebit puncta flexuum Q vel K. Sed talia puncta flexuum non habet curva $1D2D$, ex hypothesi, ergo portio curvae $1D2D$ rectam $1N1P$ secabit in $1F$. Eodem modo alia portio $2D3D$ rectam $2N2P$ secabit in $2F$. etc.

Artic. II. Producta jam intelligatur $1T1D$ dum ordinatae sequenti $2B1E2C$ occurrat in $1E$. eodem modo $2T2D2E$ ordinatae sequenti $3B2E3C$ occurret in $2E$. His positis ajo primum ipso rectangulo $1D1E2D$ quod vocabo complementale minorem esse differentiam inter Quadrilineum partiale $1D1B2B2D1D$ et unum rectangulum ei respondens $1N1B2B1P$ quod quia cum caeteris similibus, spatium gradiforme componit, vocabo Elementare. Quod ita probo: auferatur ab utroque differentium, quadrilineo partiali, et rectang.

1–3 Ex ... aliarum *erg. L* 4f. sextae *(1)* Qvoniam curva 1D2D etc 4D caret punctis reversionum, ideo a 1D ad 2D vel a 2D ad 3D transire non potest, qvin rectam 1N1P positam inter 1D et 2D vel inter 2D et 3D alicubi secet, ut in 1F. alioqvi necessario eam circumibit adeoqve modo descendet modo ascendet, ut facit curva 1DQ2D descendens ab 1D ad Q et ascendens a Q ad 2D. vel curva 1DK2D ascendens ab 1D ad K, et descendens a K ad 2D. contra hypothesin. *(a)* Rectam autem NP, ideo necessario secat, qvia ea posita est intra puncta 1D. 2D. qvoniam et punctum M est inter puncta 1T. 2T. ex constructione. *(b)* Recta autem 1N1F. necessario posita est intra puncta 1D. 2D. sive recta 1M1N1P inter rectas 1T1DE, et 2T2D qvoniam et punctum 1M cadit inter puncta 1T. 2T. ex constructione. Idemqve de caeteris 2N2P. etc. verum esse patet. Jam His positis ajo primum ipso rectangulo 1D2E2D *(2)* Artic. I. *L* 18f. qvod vocabo *(1)* Differentiale *(2)* complementale *erg. L* 19 partiale *erg. L* 20f. qvod ... Elementare *erg. L* 22–193,1 differentium ... ⟨Elementari⟩ *erg. L*

⟨Elementari⟩ quod utrique commune est, scilicet (: quoniam per artic. 1. aliquod intelligi potest punctum $1F$:) Quinquelineum $1D1B2B1P1F1D$ quatuor rectis $1D1B$, $1B2B$, $2B1P$, $1P1F$, et curva $1F1D$ comprehensum, tunc residuorum, trilinei $2D1P1F2D$ ex Quadrilineo partiali, et Trilinei $1D1N1F1D$ ex rectangulo Elementari; eadem utique differentia erit quae ipsorum totorum differentium, Quadrilinei partialis et rectanguli elementaris. Generaliter enim eadem est differentia residuorum, quae totorum ex quibus sublata est quantitas communis.

Artic. III. Suffecerit ergo ostendi differentiam horum duorum trilineorum, minorem esse rectangulo complementali $1D1E2D$. quod patet quia utrumque simul distincte, trilineum scilicet, $1D1N1F1D$ et $2D1P1F2D$ adeoque et summa eorum intra rectangulum hoc complementale cadit, majus est ergo rectangulum complementale quam eorum summa, ergo et majus quam eorum differentia. Quare et majus quam id quod per artic. 2. cum ea coincidit differentia intra Quadrilineum partiale et Rectangulum ei respondens elementare supradictum, quod primum probare susceperam.

Artic. IV. Eodem modo ut in artic. 3. probabitur Quadrilinei partialis sequentis $2D2B3B3D2D$ et rectanguli ei respondentis elementaris $2N2B3B$ differentiam minorem esse rectangulo sequenti complementali $2D2E3D$: Et ita si alia quotcunque sequantur vel interjiciantur. Itaque generaliter summa omnium differentiarum partialium, vel quod idem est, differentia totorum, id est differentia summae Quadrilineorum partialium omnium seu Quadrilinei totalis $1D1B4B4D3D$ etc. $1D$, a summa omnium ejusmodi rectangulorum elementarium, seu a spatio rectilineo gradiformi $1N1B4B3P3N2P2N1P1N$ minor erit quam summa omnium

1 f. (: qvoniam ... 1F :) *erg. L* 4 partiali *erg. L* 4 f. Elementari *erg. L* 6 partialis *erg. L* 6 elementaris *erg. L* 9 Artic. III *erg. L* 10 rectangulo | *(1)* differentiali *(2)* complementali *erg.* | 1D1E2D. *L* 12 hoc | *(1)* differentiale *(2)* complementale *erg.* | cadit *L* 12 f. rectangulum | *(1)* differentiale *(2)* complementale *erg.* | qvam *L* 14 id ... coincidit *erg. L* 15 partiale *erg. L* 15 ei ... elementare *erg. L* 17 Artic. *(1)* III *(2)* IV *L* 17 ut in artic. *(1)* 2 *(2)* 3. *erg. L* 17 partialis seqventis *erg. L* 18 ei ... elementaris *erg. L* 19 seqventi | *(1)* differentiali *(2)* complementali *erg.* | 2D2E3D *L* 20 f. summa ... id est *erg. L* 23 rectangulorum | elementarium *erg.* |, | (: sub ordinatis 1B1D, 2B2D, etc. et eorum intervallis 1B2B, 2B3B etc. comprehensorum, :) *gestr.* | seu *L*

rectangulorum complementalium $1D1E2D$ etc. usque ad $3D3E4D$ etc.

Artic. V. Horum rectangulorum, quae complementalia vocavi, basium $4D3E$, $3D2E$ vel $3E2L$ etc. usque ad $2D1E$ vel $2L1L$, summa aequatur ipsi $4D1L$, seu differentiae inter $1B1D$ vel $4B1L$, et $4B4D$ primam scilicet et novissimam ordinatarum ad Curvam $1D2D3D[4D]$, quod eodem modo fieret, si quotcunque alia puncta ordinataeque interjicerentur. Itaque si jam ponamus horum rectangulorum complementalium altitudines seu intervalla ordinatarum, $1D1E$ (vel $1B2B$) et $2D2E$ (vel $2B3B$), usque ad $3D3E$ (vel $3B4B$ vel $\psi 4B$) aequari, utique summa omnium rectangulorum complementalium, aequalis erit rectangulo $\psi 4D1L$ ex summa basium $1L4D$ in altitudinem communem $\psi 4D$; vel si inaequales sint altitudines utique summa rectangulorum complementalium minor erit rectangulo sub summa basium in maximam altitudinum; ponatur ergo altitudinum harum maxima vel certe caeteris aequalis esse ultima $3B4B$, utique summa horum rectangulorum complementalium minor erit vel certe aequalis summae basium $4D1L$ ductae in altitudinem maximam $3B4B$ vel $\psi 4D$, seu rectangulo $\psi 4D1L$.

Artic. VI. Quoniam Differentia Quadrilinei totalis et Spatii gradiformis minor est summa rectangulorum complementalium per artic. 4. et summa rectangulorum complementalium aequalis est vel minor rectangulo $\psi 4D1L$. per artic. 5. Ergo Differentia Quadrilinei totalis et spatii gradiformis, minor est rectangulo $\psi 4D1L$.

Artic. VII. Porro hoc intervallum novissimarum ordinatarum $3B3D$, $4B4D$ nempe altitudo $3B4B$ sive $\psi 4D$ tametsi caeteris majus aut certe non minus sit assumtum intervallis, tamen assignata quantitate minus assumi potest: nam ipso sumto utcunque parvo, caetera sumi possunt adhuc minora. Quoniam intervallum earum pro arbitrio assumi potest, et nulla est linea tam parva quin assumi possit adhuc minor. Posito ergo rectam $3B4B$ vel $\psi 4D$ assignata linea minorem sumi posse, quoniam in nostra est potestate puncta $3D4D$, aliaque sumere utcunque sibi propinqua, et numero quantolibet; sequetur

1 rectangulorum *(1)* differentialium *(2)* complementalium *L* 3 Artic *(1)* IV *(2)* V *L* 4 ipsi 3DL, seu *L ändert Hrsg.* 7–14 complementalium *erg. L viermal* 15–21 ψ 4 D 1 L |*(1)* neutro casu erit major *(2)* Adeoqve |per artic. 3. *gestr.*| Differentia Qvadrilinei totalis et spatii Gradiformis |qvae per artic. 3. summae rectangulorum complementalium minor est *erg.*| minor erit rectangulo ψ 4 D 1 L *(3)* Artic. V. *(4)* Artic *(a)* V. *(b)* VI qvoniam ... artic. *(aa)* 3 *(bb)* 4. ... artic *(aaa)* 4 *(bbb)* 5. ... ψ 4 D 1 L Artic. VII *erg.*| Porro *L*

et rectangulum $\psi 4 D 1 L$, altitudinem habens quae data recta sumi possit minor, etiam data aliqua superficie reddi posse minus. Sit enim data superficies; rectangulum βHA, si placet; assumatur ei aequale, vel eo minus rectangulum $\varphi 4D1L$ super basi $4D1L$. Jam hac recta $\varphi 4D$ minor sumatur $\psi 4D$, erit rectangulum $\psi 4D1L$ minus rectangulo $\varphi 4D1L$. adeoque et spatio dato seu rectangulo βHA.

Artic. VIII. His jam ostensis demonstratio propositionis ita absolvetur: Differentia Quadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est rectangulo $\psi 4D1L$ per artic. 6. Et puncta in curva tam exiguo intervallo tantoque numero assumi possunt, ut rectangulum $\psi 4D1L$ sit dato spatio minus, per artic. 7. Ergo eadem opera etiam differentia hujus Quadrilinei et spatii gradiformis data quantitate minor reddi potest. Q. E. D.

Si in alio quam nostro casu curva aliqua $1N2N3N$ per ipsa spatii gradiformis puncta, $1N$, $2N$, $3N$ transiisset, ut in communi methodo indivisibilium ubi figurae curvilineae tantum in parallelogramma resolvuntur, fieri solet; longe facilior fuisset demonstratio. Differentia enim spatii gradiformis, et mixtilinei $1N1B3B3N2N1N$ constaret exiguis trilineis $1N1P2N1N$, $2N2P3N2N$, utique minoribus quam rectangula ipsis circumscripta $1N1P2N$, $2N2P3N$ quae hic etiam vocabo complementalia, ergo et differentia dicta minor erit summa horum rectangulorum complementalium, summa autem horum rectangulorum complementalium, nunquam major erit rectangulo ex summa basium, $1P1N$, $2P2N$, (: quae nunquam major recta $3D3N$:) ducta in altitudinem unius si omnium altitudo aequalis est (ut in methodo indivisibilium communi assumi solet) vel si inaequalis, in maximam. Ergo si maxima ponatur novissima, vel si omnes ponantur aequales dicta differentia nunquam erit major rectangulo $2B3B3N$, cujus altitudo cum possit fieri quantumlibet parva, etiam haec differentia inter spatium gradiforme et mixtilineum dato aliquo spatio minor reddi potest.

2 minus, *(1)* majus autem est rectangulum ψ4D1L, qvam summa rectangulorum 1D1E2D, 2D2E3D, qvantuscunqve sit eorum numerus vel eis aeqvale modo ex praescripto intervalla 1B2B, et caetera minora ipso ψ4D sive 3B4B, vel aeqvalia ei assumta sint. Et summa horum rectangulorum major est differentia Qvadrilinei totalis et spatii rectilinei gradiformis ut ostendimus. Ergo et rectangulum ψ3DL hac differentia majus est. Cum ergo puncta D. (adeoqve et C.) tam vicina tantoqve numero assumi possint, ut fiat ψ3DL rectangulum, dato spatio minus, etiam differentia mixtilinei et spatii gradiformis dato spatio minor reddi potest. Qvod erat Demonstrandum. *(2)* sit *L* 6–11 Artic *(1)* VII. *(2)* VIII ... artic. *(a)* 5 *(b)* 6. ... artic. *(aaa)* 6 *(bbb)* 7. ... Q. E. D. *erg. L* 13 f. ubi ... resolvuntur, *erg. L* 17 qvae ... complementalia *erg. L* 18 f. complementalium *erg. L zweimal*

Jam summa rectangulorum elementarium, $1N1B2B1P$. $2N2B3B2P$ etc. spatium gradiforme $1N1B3B2P2N1P1N$ constituentium aequatur summae horum rectangulorum, hic summae ordinatarum BN ad curvam $1N2N3N$, ductae in altitudinem omnibus communem seu ordinatarum intervallum semper aequale, ergo et spatium gradiforme metiri possumus summa applicatarum ducta in intervallum duarum proximarum semper aequale. Spatium autem Gradiforme eousque produci potest, ut differentia ejus a Mixtilineo fiat minor quavis data, ut etiam hic ostendi. Ergo si quid de summa Linearum, sive area spatii gradiformis, ita demonstrari poterit, ut locum habeat utcunque producatur spatium gradiforme, seu ut tum maxime locum habeat cum spatii gradiformis applicatarum intervalla quantum satis est exigua sunt; id etiam de Mixtilineo verum erit, sive error si quis committi potest, erit minor quovis errore assignabili. Quare methodo indivisibilium, quae per spatia Gradiformia seu summas ordinatarum, procedit imposterum ut rigorose demonstrata, uti licebit.

Scholium.

Hac propositione supersedissem lubens, cum nihil sit magis alienum ab ingenio meo quam scrupulosae quorundam minutiae, quae saepe ostentationis plus habet quam fructus: nam et tempus quibusdam velut caeremoniis consumunt, et plus laboris quam ingenii habent, et inventorum originem caeca nocte involvunt: quae mihi plerumque ipsis inventis videtur praestantior. Quoniam tamen non nego interesse Geometriae, ut ipsae methodi ac principia inventorum, tum vero theoremata quaedam praestantiora, severe demonstrata habeantur; receptis opinionibus aliquid dandum esse putavi.

De caetero optarem scribi aliquando librum qui Euclidis continuati loco sit, et quem possimus imposterum tuto allegare. Ut enim Euclides Elementa ac Principia eorum dedit

---

23–197,12 *Dazu am Rand, in Höhe des Beginns des Absatzes:* Hoc in praefationem. *und weiter unten:* NB. Haec in praefatione meliora.

7 ut ... ostendi, *erg. L* 17 minutiae, *(1)* qvi perpetuam demonstrandi formam, ad veterum, ut ajunt, morem compositam, a Geometra |ubiqve *gestr.*| exiguunt; *(2)* qvae *L*

---

25 f. Hoc ... meliora: Leibniz greift dieses Thema in den erhaltenen Entwürfen für die Einleitung nicht auf.

artificierum quibus tunc utebantur Geometrae; ita novorum inveniendi instrumentorum, quae inde ab Archimede ad nostra usque tempora prodiere, vim ac potestatem in unum collectam, pleneque demonstratam Euclidi subjici, res scientiarum profectui necessaria, nec autori ingloria erit: nam et ipse nomen suum cum Euclideo extendet in posteritatem; et nos labore multiplici levabit, jam saepe apud alios demonstrata, et apud Geometras elegantiores extra controversiam posita denuo demonstrandi. Quod tamen facere saepe aut certe alios exscribere cogimur, quorum libri non sunt in omnium manu.

Jam si qualem descripsi, Euclidis continuatio habeatur, paulo liberius scribere poterunt Geometrae, certitudine salva, et ratiocinationes per calculum aut indivisibilia procedentes pro demonstrationibus agnoscent. Quemadmodum jam Galilaeum, et Cavalerium et Guldinum, et Cartesium, et Wallisium, et Slusium, sed et aliquando Hugenium fecisse video, quorum certe exempla pro apologia esse poterunt imposterum scripturis.

Propositio Septima.

„Si a quolibet curvae cujusdam puncto ad unum anguli recti in eodem plano positi „latus ducantur ordinatae normales, ad alterum tangentes, et ex punctis occursus „tangentium agantur perpendiculares ad earum ordinatas, si opus est, productas; „et curva alia per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat, „erit spatium inter axem ad quem ductae sunt ordinatae, duas ordinatas extremas „et curvam secundam comprehensum, spatii inter curvam primam, et rectas duas „ejus extrema cum anguli recti propositi centro jungentes, comprehensi, duplum.

Portiones autem lateris cui occurrunt tangentes, interceptas inter angulum et punctum occursus voco Resectas et figuram ad curvam secundam, figuram resectarum.

Sit fig. [3.] curva proposita $1C2C3C$, a cujus punctis C ad anguli recti TAB latus AT ducantur tangentes CT, et ad alterum AB ordinatae normales CB. Ex T oc-

12 f. scripturis | Definitio: Resectas voco A1T, A2T portiones rectae A1T2T ex puncto A interminate productae, inde ab initio A usqve ad tangentium cuiusdam curvae, 1C1T, 2C2T, etc. occursum sumtas Figura resectarum est 1D1B2B2D1D, *(1)* qvae ex harum A1T conflatur translatione in 1B1D, 2B2D, et ad AB axem qvendam curvae per A (: ipsam AT in A normaliter secantem :) applicatione, in ordinatis curvae ad ax *(2)* conflatur, si ex iisdem curvae punctis unde tangentes ductae sunt *erg. u. gestr.* | Propositio *L* 19 comprehensum, | qvod figuram Resectarum voco *erg. u. gestr.* | spatii *L* 20–24 duplum | Portiones ... resectarum *erg.* | *(1)* Ponatur non esse duplum, et differentia inter unum duplum, et alterum simplum sit Z *(2)* Sit *L*

24 fig. [3.]: s. S. 189 Z. 1.

cursibus tangentium, perpendiculares TD ad ordinatas CB demittantur, et per puncta intersectionum D transeat curva $1D2D3D$. Ipsas $A1T$, $A2T$, sive ipsas $1B1D$, $2B2D$ vocabo resectas. Ajo Spatium Quadrilineum $1D1B3B3D2D1D$, parte axis, $1B3B$, ordinatis extremis $1B1D$, $3B3D$, et curva nova $1D2D3D$ comprehensum sive figuram Resectarum, esse sectoris sive Spatii Trilinei $1CA3C2C1C$, duabus rectis ex anguli centro, A, ad curvae prioris extrema $1C$, $3C$ ductis, nempe $A1C$, $A3C$, et ipsa curva priore, $1C2C3C$, comprehensi, duplum.

Artic. I. Ponatur non esse duplum, et differentia inter Trilineum duplum, et Quadrilineum simplum sit Z. Inscribantur ipsi curvae $1C2C3C$ polygona numero finita quotcunque libuerit, quantumque satis erit, et ultimum ex ejusmodi inscriptis polygonis sit figura rectilinea $A1C2C3CA$, quod rectis ex centro A ad curvam ductis $A1C$, $A3C$ et rectis curvae inscriptis sive chordis $1C2C$, $2C3C$, comprehensum est. Hae inscriptae producantur, ut antea tangentes, donec ipsi AT in punctis $1M2M$ occurrant rectae productae, $2C1C1M$ vel $3C2C2M$. Ex quibus punctis M demissae perpendiculares $1M1N1P$, vel $2M2N2P$ secent $1B1N1C$ et $2B1P2C$; vel $2B2N2C$ et $3B2P3C$ in punctis $1N$ et $1P$ vel $2N$ et $2P$.

Artic. II. Ponamus nunc inscriptionem Polygonorum eousque productam, donec Polygoni inscripti, $A1C2C3CA$ differentia a Trilineo $1CA3C2C1C$; itemque Spatii rectilinei Gradiformis $1B1N1P2N2P3B1B$. differentia a Quadrilineo $1D1B3B3D$ $2D1D$, una quaeque singulatim, sit minor quam quarta pars ipsius Z. Quod fieri posse de Polygonis constat ex demonstrationibus Archimedeis, de Spatio vero Gradiformi et Quadrilineo, si quis rigorem desideret, inveniet demonstratum prop. praecedenti.

Artic. III. Patet ex prop. 1. Trianguli $A1C2C$ duplum esse rectangulum $1N1B2B$, et Trianguli $A2C3C$ duplum esse rectangulum $2N2B3B$, et ita de caeteris, si qua sint. Ergo et summa rectangulorum hujusmodi quotcunque seu spatium Gradiforme, duplum erit summae omnium ejusmodi Triangulorum seu Polygoni inscripti.

2 f. ipsas A1T ... resectas *erg. L* 22–24 Qvod ... praecedenti *erg. L* 25 1N1B2B2N *L ändert Hrsg.* 26 2N2B3B3N *L ändert Hrsg.*

22 Archimedeis: ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro* I, prop. VI.

Artic. IV. Jam differentia inter quadrilineum, quod vocabo Q. et spatium gradiforme, id est ut probavi artic. 3, duplum polygonum inscriptum, quod vocabo P. minor est quam quarta pars ipsius Z per artic. 2, et differentia inter duplum polygonum inscriptum, P, et duplum Trilineum cui inscriptum est, quod vocabo T. minor est quam duae quartae ipsius Z (: quia inter ipsa simpla, ex artic. 2, differentia minor est quam una quarta :). Ergo per propositionem 5. differentia inter Quadrilineum, Q. et duplum trilineum, T. minor est quam una quarta ipsius Z plus duabus, seu minor est quam tres quartae ipsius Z.

Nam si ita stent

Quantitates	Q	P	T
Differentiae minores quam	$\frac{1}{4}Z$	$\frac{2}{4}Z$	

erit differentia inter Q. et T. minor quam $\frac{1}{4}Z + \frac{2}{4}Z$. per dictam propositionem 5.

Artic. V. Quoniam ergo differentia inter Quadrilineum et duplum Trilineum minor est quam $\frac{3}{4}Z$ per artic. 4 erit multo minor quam Z. ergo minor seipsa, (posita enim est esse Z artic. 1). Quod est absurdum. Nulla ergo differentia assumi potest, cum Z indefinita intelligi possit de qualibet adeoque trilineum duplum et Quadrilineum simplum aequalia sunt, Q. E. D.

Scholium

Duo hic fortasse notari e re erit, unum circa demonstrationem, alterum circa propositionem ipsam. Demonstratio illud habet singulare, quod rem non per inscripta ac circumscripta, sed per sola inscripta, absolvit quod nescio an hactenus salvo rigore fieri posse creditum sit; exemplum certe videre non memini. Sed et peculiaribus ad eam rem opus fuit propositionibus, ac praeparationibus ut facile constabit examinanti. Equidem fateor nullam hactenus mihi notam esse viam, qua vel unica quadratura perfecte demonstrari possit sine deductione ad absurdum, imo rationes habeo cur verear ut id fieri possit per naturam rerum: ex omnibus tamen ad absurdum deductionibus nullam esse

8 f. Z . *(1)* ergo multo minor qvam Z, ergo minor seipsa, posita est enim esse Z. Qvod est absurdum; nulla ergo differentia assumi potest, cum Z, indefinita, intelligi possit de qvalibet, adeoqve Trilineum duplum et Qvadrilineum simplum, aeqvantur. Q. E. D. *(2)* nam *L*

credo simplicem magis et naturalem et directae demonstrationi propiorem, quam quae non solum simpliciter ostendit inter duas quantitates nullam esse differentiam, adeoque eas esse aequales; (: cum alioquin, alteram altera neque majorem neque minorem esse, ratiocinatione duplici, probari soleat :) sed et quae uno tantum termino medio inscripto scilicet vel circumscripto, non vero utroque simul utitur, adeoque efficit ut clariores de his rebus comprehensiones habeamus.

Quod ad ipsam attinet propositionem, arbitror nullam facile generaliorem extare in geometria, usque adeo universalis est, ut omnibus curvis etiam sine regula, casu aut pro arbitrio sine certa lege ductis conveniat, et data qualibet figura alias exhibeat infinitas, quarum singularum dimensio pendeat ex priore vel contra. Sed et inter foecundissima Geometriae theoremata haberi potest, nam hinc statim demonstrantur Quadraturae omnium Paraboloeidum aut Hyperboloeidum in infinitum, sive figurarum, in quibus ordinatae vel earum potentiae sunt in multiplicata aut submultiplicata, directa aut reciproca ratione abscissarum, aut potentiarum ab abscissis. Et ut alias taceam Quadraturas infinitas, absolutas vel hypotheticas, Circulum certe ejus ope transformavimus in figuram rationalem, et hinc Quadraturam totius Circuli pariter ac portionis cujuslibet arithmeticam, et veram perfectamque arcus ex data tangente expressionem analyticam generalem habemus. Quibus demonstrandis hic tractatus occupatur.

Porro cum clarissimi Geometrae, qui Conica universaliter tractare coepere, Desargues et Pascalius, Ordinatarum ad Curvas nomine, comprehendant non tantum rectas Parallelas, quales sunt $1C1B$, $2C2B$, $3C3B$, ut vulgo fieri solet, sed etiam rectas $A1C$. $A2C$. $A3C$. quae omnes ad unum punctum commune A, convergunt (: quod vel ideo recte fit quoniam ipsaemet parallelae sine errore pro convergentibus sumi possunt, ita tantum ut punctum concursus earum seu centrum commune, infinite absit, quemadmodum alter parabolae focus, aut vertex :). Hinc jam ope theorematis hujus nostri feliciter evenit, ut harum quoque novarum ordinatarum nempe convergentium, usus possit esse ad quadraturas, utque figurae non tantum per ordinatas parallelas in parallelogramma $1C1B2B$. $2C2B3B$. etc. ut a Cavalerio aliisque post ipsum fieri solitum est, sed et per convergentes

4 soleat :) *(1)* nam polygona simul inscripta et circumscripta hactenus ab omnibus adhibita sint; *(2)* sed *L* 27 f. 1C1B2B. . . . est *erg. L*

19 f. Desargues: G. Desargues, *Brouillon project*, 1639. 20 Pascalius: B. Pascal, *Essay pour les coniques*, 1640. 28 a Cavalerio aliisque: vgl. S. 181 Z. 27 – S. 182 Z. 1.

in triangula $A1C2C$. $A2C3C$. infinitis modis resolvantur prout varie assumitur punctum A. Unde ingens novorum inventorum campus aperitur quorum hic elementa damus ex quibus certum est, non pauca, neque his inferiora duci posse.

Definitiones.

Quid R e s e c t a s et figuram resectarum vocem explicui in ipsa propositione.

S e g m e n t u m voco spatium duabus lineis una curva altera recta comprehensum, ut spatium ACA comprehensum duabus lineis quarum una est recta AC, altera est curva etiam AC. utraque punctis A. C. terminata. Eodem modo spatium $A2C1CA$ est segmentum comprehensum recta $A2C$, et curva $A1C2C$. Si curva haec esset arcus circuli, foret spatium $A2C1CA$ segmentum Circulare, quod nomen cum huic spatio dudum tribui soleat, ejus exemplo caeteras id genus portiones a figuris per rectas curvam duobus in punctis secantes, abscissas, segmenta appellandas putavi.

S e c t o r est spatium trilineum ut $1CA2C1C$ duabus rectis $A1C$, $A2C$ et una curva $1C2C$ comprehensum. Si esset $1C2C$ arcus circuli et punctum A centrum circuli, adeoque rectae $A1C$, et $A2C$, aequales, tunc utique etiam recepto more spatium $1CA2C1C$ appellaretur Sector, cujus exemplo caetera etiam id genus spatia, ubicunque sit punctum A, aut quaecunque sit curva putavi appellari posse sectores.

Hinc statim patet, si una ex lineis, ut $A1C$, evanesceret, et si puncta A, et $1C$ coinciderent ex sectore fieri segmentum, adeoque quae de sectoribus generaliter demonstrantur, sine consideratione magnitudinis rectarum comprehendentium posse etiam applicari ad segmenta; ut sequenti propositione exquisitius ostendetur.

Hinc figura resectarum duas habet species, figuram sectorum si extet recta $A1C_{[,]}$ figuram segmentorum si evanescat. F i g u r a s e c t o r u m est, qualem propositione 6. et 7. descripsi [et] figura explicui, quam ideo hoc nomine appellari commode posse patet,

5 *(1)* Rectas qvae a tangentibus ex Anguli recti latere A1T2T inde a vertice resecantur; vocabo imposterum R e s e c t a s . ut A1T. A2T. et figuram 1D1B2B2D1D earum ad axem A1B2B in punctis 1B, 2B ordinata applicatione factam, cum scilicet ipsae A1T, A2T transferuntur in 1B1D, 2B2D, etc. voco figuram resectarum. *(2)* Qvid ... propositione *erg. L* 22 f. Hinc ... evanescat *erg. L*

2 ingens ... aperitur: vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 170: ,,infinitae speculationis campus aperitur“.

quoniam ejus portiones ordinatis comprehensae sunt sectoribus quas Z o n a s aliqui vocant figurae cujusdam propositae, (: ex qua scilicet figura sectorum, modo in propositione 6. et 7. descripto generatur :) aequales vel proportionales. Nam portiones $1D1B2B2D1D$, $2D2B3B3D2D$, et similes, sunt aequales [duplis] sectoribus respondentibus $1CA2C1C$. $2CA3C2C$.

Si curva generans sit arcus Circuli, et A ejus centrum, figura sectorum, eo casu speciali nomine vocabitur F i g u r a A n g u l o r u m , quia eo casu sectores figurae generantis, adeoque et portiones figurae generatae, sunt angulis, ea quam explicabo ratione, proportionales; quod infra peculiari propositione complecti operae pretium erit.

Si curva $3C2C1CA$ continuata perveniat in punctum A, adeoque et curva $3D2D$ $1DA$, hujus curvae figura appellabitur F i g u r a S e g m e n t o r u m , quoniam ejus portiones inde a vertice A, ut $A1B1DA$, $A2B2D1DA$, sunt [duplis] segmentis, $A1CA$, $A2C\langle 1\rangle CA$ etc. aequales, ut mox clarius patebit.

O r d i n a t a r u m nomine intelligi solent rectae parallelae ut $1B1C$. $2B2C$. etc. a quolibet curvae $1C2C3C$. puncto, $1C$. $2C$. etc. ad rectam quandam indefinitam, $A1B2B$. etc. quae D i r e c t r i x a quibusdam appellatur, ductae; alii simpliciter vocant parallelas, alii ordinatim applicatas; aliquando ordinatarum nomine stricte sumto intelliguntur tantum ordinatae normales ad Directricem, et directrix vocatur a x i s quoniam tunc figura circa directricem velut axem gyrata, solidum generante, ordinata quaelibet circulum generat basi solidi parallelum.

Aliquando voce laxe sumta, ut a Pascalio factum est in impressa quaedam de Conici scheda, quae specimen majoris operis, inediti quidem, sed si quod aliud illius generis

9 *Am Rand:* Hoc citandum cum figura.

1 f. qvas ... vocant *erg. L* 3 aeqvales vel *erg. L*

1 aliqui: vgl. Oldenburg an Leibniz, 12. (22.) April 1675, III, 1 N. 49_2 S. 233. 9 peculiari propositione: prop. 12 S. 217 Z. 3–6. 21 a Pascalio: B. Pascal, *Essay pour les coniques*, 1640, def. I (*PO* I S. [252]); vgl. Erl. zu N. 14 S. 144 Z. 3 f. 22 majoris operis: Es handelt sich um die später verloren gegangene Abhandlung Pascals über die Kegelschnitte, deren Manuskript Leibniz von Januar bis Ende August 1676 ausgeliehen hatte; vgl. seinen Brief an É. Perier, 30. August 1676, III, 1 N. 90 sowie *PO* II S. 215–243 u. VII, 1 N. 26.

Geometricum, edi digni, fuit; per Ordinatas ut dixi intelliguntur et rectae convergentes sive ab eadem curva, ad unum punctum velut centrum concurrentes, quod suos habet usus sane praeclaros; quoniam plurima theoremata omnibus generalissimo hoc sensu communia haberi possunt. Nos in hoc quidem argumento ordinatarum nomine parallelas, et potissimum normales intelligemus. Quod semper ex subjecta materia satis apparebit.

Porro quando ordinatae parallelae ad quandam directricem ducuntur, tunc solet assumi in directrice p u n c t u m aliquod f i x u m , ut A, et portiones directricis inter punctum fixum, A, et occursum ordinatarum, $1B$ vel $2B$, etc. comprehensae, solent vocari A b s c i s s a e , aliqui vocant portiones Axis. Harum autem abscissarum usus esse solet, ad explicandam curvae naturam per relationem abscissarum et ordinatarum inter se ut si dicamus ipsas $1B1C$, $2B2C$, esse inter se in subduplicata ratione abscissarum $A1B$, $A2B$, vel quod eodem redit, si una tantum aliqua abscissa atque ordinata assumta dicamus semper fore rectangulum sub $A1B$ abscissa, et certa quadam recta constante, aequale quadrato ordinatae $1B1C$; tunc curva $A1C2C$ erit Parabola. Eodem modo si essent ordinatae $1B1C$, $2B2C$ inter se in triplicata ratione abscissarum $A1B$, $A2B$, vel quod idem est, una tantum abscissa et ordinata assumtis, si cubus ab $A1B$ abscissa, aequaretur solido ex quadrato cujusdam rectae constantis in ordinatam $1B1C$, foret Curva, Parabola Cubica.

D i r e c t r i c e s c o n j u g a t a s vel cum angulus rectus est, A x e s c o n j u g a t o s voco, cum abscissae ex una sunt aequales ordinatis ad alteram, et contra, quod fit, si modo eae sese intersecent in puncto fixo seu initio abscissarum, et una sit parallela ordinatis ad alteram. Ut si sit curva $1D2D$. et directrix sit $A1B2B$, et ordinatae ex curva ad hanc directricem angulo quocunque inter se parallelae sint $1B1D$, $2B2D$ at abscissae ex directrice sint $A1B$, $A2B$, denique per initium abscissarum A, transeat AT, ipsis $1B1D$, $2B2D$ parallela, ea erit directrix conjugata; nam in ipsa $A1T$ aequalis ipsi $1B1D$ ordinatae ad directricem priorem, $1B1D$ poterit sumi pro abscissa, et $1T1D$, aequalis $A1B$ abscissae ex directrice priore, erit ad conjugatam directricem ordinata. Haec consideratio magnos habet usus in omni Geometria, sed inprimis in materia de Quadraturis.

14 1B1D *L ändert Hrsg.* 19 f. vel ... c o n j u g a t o s *erg. L*

T r i l i n e u m o r t h o g o n i u m vel aliquando simpliciter Trilineum, cum quibusdam, voco, spatium axe, ordinata aliqua normali, et curva comprehensum, ut $A2B2C1CA$. comprehensum axis portione seu abscissa $A2B$, ordinata $2B2C$ et curva $A1C2C$. Itaque necesse est ut perveniat curva usque ad axem, axis portionem $A2B$, vocare solent a l t i t u d i n e m , ordinatam trilineum terminantem, $2B2C$, b a s i n . R e c t a n g u l u m autem c i r c u m s c r i p t u m , quod communem habet altitudinem cum Figura, basin vero aequalem maximae ordinatae; quodsi maxima ordinata est ultima, tunc Rectangulum Circumscriptum eandem habet basin et altitudinem cum trilineo orthogonio, et a R. P. Honoratio Fabrio vocatur i s o p a r a l l e l u m quod etiam ad trilinea non-orthogonia, et parallelogramma ipsis circumscripta extendi posset; et manifestum est semper hoc isoparallelum ex quatuor rectis, duabus scilicet ordinatis, et duabus abscissis, utriusque scilicet Directricium conjugatarum, constitui, quoniam semper abscissa unius directricis ordinatae ad alteram relatae, aequalis et parallela est. Ita Trilinei orthogonii $A2B2C1CA$, Rectangulum isoparallelum est $A2B2C2GA$. C o m p l e m e n t u m T r i l i n e i O r t h o g o n i i , seu T r i l i n e u m c o m p l e m e n t a l e vocant, quod Trilineo orthogonio adscriptum Isoparallelum complet; ut si trilineo Orthogonio $A2B2C1CA$ adscribatur Trilineum complementale $A2G2C1CA$. constituetur rectangulum circumscriptum, Isoparallelum $A2B2C2G$. Unde sequitur ea sibi mutuo complementa esse, et esse ad directrices conjugatas, et eandem curvam habere communem; et ubi unum est concavum, ibi alterum esse convexum; et altitudinem unius aequari basi alterius et contra, aliaque id genus quae cuivis manifesta sunt. Intersectio directricium conjugatarum, seu Trilineorum se mutuo complentium initium commune, vel si uno tantum loquamur, punctum in quo ordinata unius ex Trilineis fit infinite parva sive evanescit, et curva ad axem pervenit, solet appellari v e r t e x t r i l i n e i , qui semper etiam est punctum fixum seu initium abscissarum, sed non solet appellari v e r t e x c u r v a e , nisi quando alterutra directricium in eo curvam tangit.

Per S u m m a m r e c t a r u m a d q u e n d a m A x e m a p p l i c a t a r u m , intelligimus figurae perpetua applicatione factae aream, ut si dicam summam omnium AT ad axem AB, intelligo figuram ex omnibus AT, in respondentibus AB, axi ordine

9 a *(1)* nonnullis *(2)* R. P. *L*

1 f. cum quibusdam: vgl. Bl. Pascal, *Traité des trilignes rectangles*, 1658 (*PO* IX S. 3–45).
9 vocatur: H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 315.

applicatis factam, ut $A1T$ translata in $1B1D$ et applicata ad $A1B$, et ita de caeteris. Explicandus autem est angulus applicationis, qui solet intelligi rectus. Sed nec necesse est ut applicatae ipsum axem attingant, ut summa differentiarum inter AT et BC, quae aequantur ipsis DC, dabit aream figurae $1D1C2C3C3D2D1D$. Hae autem loquendi formulae permissae erunt, supposita indivisibilium methodo, seu dimensione arearum per summas linearum, demonstrata, per ea quae diximus prop. 6. Prorsus quemadmodum permissum erit figuras quales descripsimus prop. 6. et 7. quoties curva $2D1DA$ in angulum A. pervenit appellare figuras segmentorum, ubi demonstratum erit segmentis curvarum generantium esse proportionales; quod nunc faciemus.

Propositio Octava

„Iisdem quae in propositione praecedenti positis, si curvae $3C2C1CA$, $3D2D1DA$ in „ipsum angulum rectum A pertingant et trilineum orthogonium ad curvam genera„tam, constituatur $A3B3D2D1DA$ cujus vertex sit angulus ipse, A, axes conjugati, „latera anguli AB, AT, altitudo $A3B$, sit portio axis AB ad quem applicantur „ordinatae curvae generantis BC, basis vero $3B3D$, alicujus ex ordinatis generantis, „ut $3B3C$ productae si opus est, portio; tunc erit trilineum hoc orthogonium aequale „duplo segmento $A3C2C1CA$, quod curva generante, $3C2C1CA$ et recta $A3C$ ab „angulo recto supradicto A, ad $3C$ intersectionem basis $3B3D3C$ et curvae generan„tis, perveniente continetur.

„Brevius: Iisdem positis quae in propositione praecedenti, eadem locum habe„bunt, licet initium utriusque curvae in angulum rectum incidat et puncta $1B$, $1C$, „$1D$ inter se et cum puncto A coincidere intelligantur, adeoque figurae, „quam voco Segmentorum, portio seu trilineum orthogonium „$A3B3D2DA$ aequale erit duplo segmento figurae generan„tis, $A3C2CA$.

Hoc uno verbo confici potest ex eo quod quae demonstravimus prop. 7. generalia sunt, adeoque locum habent, utcunque parvae sint rectae $A1C$, $A1B$, $1B1D$, $1B1C$ ac

---

12 f. Non omnia scribenda majusculis.

11 *(1)* Iisdem qvae in propositione septima positis *(2)* Si duae *(3)* Si curva in axium conjugatorum intersectionem perveniat *(4)* Iisdem *L* 11 si *(1)* curva in ipsum angulum rectum A pertingat qvae ex ea generabitur modo descripto in eum etiam perveniet, *(2)* curvae *L* 12 f. generatam, *(1)* aeqvale erit duplo *(2)* constituatur *L*

proinde et si sint nullae, sive etsi puncta coincidant, ubi sector $1CA3C2C1C$ degenerabit in segmentum $A3C2CA$, et quadrilineum sive zona, hujus sectoris dupla $1D1B3B3D$ $2D1D$ degenerabit in trilineum orthogonium $A3B3D2DA$. Ergo hoc trilineum hujus segmenti duplum erit. Si quis tamen majorem rigorem desideret, huic non ideo minus satisfaciemus. Neget esse duplum, et inter unum duplum, alterum simplum sit differentia Z.

Assumatur recta $A1B$, tam parva, ut rectangulum $A1B1C2T$ sit minus quam quarta pars ipsius Z, ergo et quae intra ipsum sunt, segmentum exiguum $A1CA$, et trilineum exiguum, $A1B1DA$, erunt minora quam quarta pars ipsius Z. Jam Segmentum exiguum est differentia Segmenti magni, $A3C2CA$, et sectoris $1CA3C2C1C$; item trilineum exiguum est differentia Trilinei magni $A3B3D2DA$, et Quadrilinei $1D1B3B3D2D$. Ergo erit

$$\left.\begin{array}{l}\text{Determinatio prima[:] differentia inter Segm. Magn. et}\\ \text{Sectorem seu ipsum Segm. Exig. est minor quam } \dfrac{Z}{4},\\ \text{Determinatio secunda[:] differentia inter Trilin. Magn. et}\\ \text{Quadrilin. seu ipsum Trilin. Exig. minor quam } \dfrac{Z}{4},\end{array}\right\}\ \text{per proxime dicta.}$$

1 si *(1)* coincidant. Qvo facto *(2)* sint *(a)* infinite parvae *(b)* nullae *L* 4 tamen *(1)* infinite parvi no *(2)* lineam infinite parvam ferre non possit, *(3)* majorem *L* 7 qvam *(1)* $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{b}}$ ergo et qvae intra ipsum sunt, *(a)* ut segmentum A1CA, et trilineum orthogonium A1B1DA erunt minora qvam $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{b}}$. Ergo *(b)* erunt minora qvam $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{b}}$ *(aa)* differentia inter segmentum *(bb)* nempe segmentum exiguum A1CA, *(aaa)* differentia inter segmentum assumtum A3C2CA, qvod vocabimus s. et sectorem 1CA3C2C1CA, qvem vocabimus, ∽ *(bbb)* qvod vocabimus *(aaaa)* e qvodqve es *(bbbb)* ∽, differentia inter segmentum assumtum A3C2CA, qvod vocabimus s. et sectorem 1CA3C2C1CA, qvem vocabimus, e; itemqve trilineum exiguum, A1B1DA, qvod vocabimus θ, qvodqve est differentia inter Trilineum assumtum *(2)* qvarta *L* 9 qvam *(1)* $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{b}}$ *(2)* qvarta *L* 9 f. exiguum *(1)* differentia est inter magnum *(2)* qvod vocabo S E , differentia est inter segmentum magnum A3C2CA, qvod vocabo S M , et sectorem 1CA3C2C1CA, qvem vocabo S C , ⟨etiam⟩ trilineum exiguum | qvod vocabo T E *erg.* | differentia est inter Trilineum magnum A3B3D2DA, qvod vocabo T M et qvadrilineum 1D1B3B3D2D, qvod vocabo Q. *(3)* est *L* 12 f. erit *(1)* SM − SC seu SE minor qvam $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{b}}$, et 2SM − 2SC seu 2SE, minor qvam $\frac{2\mathrm{Z}}{\mathrm{b}}$ et TM − Q seu TE minor qvam $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{b}}$, seu TM − 2SM *(2)* Determinatio *L*

Jam ex determinatione prima sequitur

Determ. 3. Differentia inter 2^{plum} sectorem et 2 Segm. Magn. min. quam $\frac{2Z}{4}$. Et quoniam per prop. 7. Quadrilineum aequale duplo sectori, hinc ex determ. 2. sequetur quarta:

Determ. 4. differentia inter Trilin. Magn. et 2 Sect. min. quam $\frac{Z}{4}$. Ex determinatione 3. et 4. orietur schema sequens:

Quantitates:	Trilin. Magn.	2 Sect.	2 Segm. Magn.
Differentiae:	min. quam $\frac{Z}{4}$	min. quam $\frac{2Z}{4}$	

Ergo per prop. 5: Trilinei magni et dupli segmenti differentia minor est, quam $\frac{Z}{4} + \frac{2Z}{4}$, seu quam $\frac{3}{4}Z$. Ergo multo minor quam Z. Ergo minor seipsa, posita est enim esse Z, quod est absurdum, nulla ergo supponi potest differentia Z. Adeoque Trilineum magnum nempe $A3B3D2DA$ aequale erit duplo segmento $A3C2CA$. Quod erat demonstrandum.

Scholium

Haec ideo minutim exposui, ut viri docti agnoscant quam nullo negotio severe demonstrari queant, quae illis suspecta videntur, quo possint imposterum Geometrae his minutiis tuto supersedere, cum similis ratiocinatio inciderit.

Propositio Nona

„Si Trilineum figurae segmentorum cadat intra Trilineum figurae generatricis, dif-
„ferentia eorum, seu figura duabus curvis in vertice concurrentibus et differentia or-

2–4 *Daneben:* Transponantur tertia in locum quartae, et contra.

2 qvam *(1)* $\frac{2Z}{b}$ *(2)* $\frac{2Z}{4}$ *L* 17 *(1)* Differentia fig *(2)* Excessus figurae generatricis super figuram segmentorum, sive qvod idem est summa excessuum ordinatarum figurae generatricis super ordinatas figurae segmentorum, aeqvatur complemento Trilinei figurae generatricis In eadem semper figura, ajo spatium 3C3D2DA2C3C duabus curvis A2D3D et A2C3C, unaqve *(3)* Si ordinatae figurae generatricis sint majores ordinatis figurae seg *(4)* Si Trilineum *(a)* figurae *(b)* | orthogonium *gestr.* | figurae *L*
17 intra *(1)* generatricem *(2)* Trilineum | orthogonium *gestr.* | figurae *L*

„dinatarum comprehensa, aequalis est Complemento Trilinei figurae generatricis, „seu aequalis est differentiae ejus a rectangulo circumscripto.

In eadem semper figura, quoniam trilineum $A3B3D2DA$, cadit intra trilineum $A3B3C2CA$, ajo differentiam eorum, seu figuram $A2D3D3C2CA$, comprehensam duabus curvis $A2D3D$, $A2C3C$, et recta $3D3C$, differentia ordinatarum $3B3C$, et $3B3D$ aequari ipsi $A3G3C2CA$, complemento trilinei $A3B3C2CA$, seu differentiae ejus a rectangulo isoparallelo vel circumscripto $A3B3C3G$.

Super segmenti $A3C2CA$ chorda sive subtensa $A3C$, aliud in alteram partem constituatur segmentum, $A3CVA$, priori per omnia simile, similiter positum, et aequale. Ostensum est prop. 8. spatio ex his duobus segmentis composito $AV3C2CA$ aequari trilineum figurae segmentorum $A3B3D2DA$. Ergo si ab eadem figura generatrice, $A3B3C2CA$, auferantur aequalia, hinc duplum segmentum, $AV3C2CA$, ut restet Trilineum $A3B3CVA$, illinc figura segmentorum, $A3B3D2DA$, ut restet figura bi-curvilinea $A2D3D3C2CA$, sequetur haec duo residua, figuram scilicet bicurvilineam, et Trilineum $A3B3CVA$, id est huic Trilineo per omnia simile et aequale Trilineum complementale $A3G3C2CA$ aequari. Quod ostendere propositum erat.

Prop. ...

„Trilineum $DCBOD$ (fig. ...) seu Trianguli DCB, tangente CD, axe occursuum „seu conjugato BC, et chorda DB comprehensi excessus super segmentum $BDOB$ „dimidium est trilinei $BFGB$. quod figurae segmentorum $BEGB$ complemento est.

Nam triangulum DCB dimidium est rectanguli $BEGF$ (quia eadem basis BC vel BF et altitudo BE) quare si a rectangulo $BEGF$ auferatur figura segmentorum $BEGB$ ut restet $BFGB$, et a dimidio rectangulo seu a triangulo DCB, auferatur dimidia figura

17–209,2 Mutandae puto literae.

17–209,2 prop. ... BFGB | qvod restaret si a toto rectangulo BEGF tota figura segmentorum BEGB fuisset subtracta. *gestr.* | *erg. L*

17 Prop. ...: vgl. N. 51 prop. X S. 545 Z. 3 – S. 546 Z. 6. 18 fig. ...: s. N. 51 fig. 9 S. 545 Z. 4. N. 21 Fig. 1 S. 258 Z. 17 könnte einen Ansatz zur hier fehlenden Figur darstellen.

segmentorum seu (per prop. ...) ipsum segmentum $DBOD$ restabit trilineum $DCBOD$ dimidium ipsius $BFGB$.

Propositio Nona.

„A figura curvilinea data utcunque exigua portionem abscindere cujus duplo exhi-
„beatur aequalis figura longitudinis infinitae, infinitis modis.

Quantulacunque sit figura curvilinea, utique infinitis modis aliquod curvae ejus $2C3C4C\mu$ punctum eligi potest, ut μ ad quod duci potest tangens, $\mu\lambda$, et ad hanc tangentem perpendicularis intra figuram; $2B\mu$ ita ut abscindi possit a figura trilineum orthogonium $2C2B\mu4C3C2C$, ajo hujus duplo aequalem posse exhiberi figuram infinitam, et ostendi modum exhibendi. Per aliquod rectae $4B\mu$, productae si ita libuerit, punctum A, ducatur perpendicularis, AT, parallela scilicet tangenti $\mu\lambda$. et ex curvae $2C\mu$, $3C$, $4C$ punctis ducantur tangentes quae ipsi AT, occurrant in punctis $3T$, $4T$, et similibus, et ex punctis occursuum demissis perpendicularibus ut $3T3D$, $4T4D$ ad $3B3D$, $4B4D$ ordinatas tangenti $\mu\lambda$ parallelas, si opus est productas, idque perpetuo factum intelligatur, ut in prop. 7. a puncto $2C$ usque ad punctum μ. habebimus spatium infinitum $2D2B\mu\lambda\beta4D[3D2D]$, duabus lineis rectis finitis $2D2B$, et $2B\mu$, duabusque lineis infinitis una curva, in infinitum procedente, $2D3D4D\delta$, altera recta, ipsi asymptoto, $\mu\lambda$, comprehensum.

Artic. 1. Porro primum Curvam $2D3D4D\beta$ infinitam esse patet quia quanto propius aberit punctum ut $4C$ a puncto μ, hoc longior erit recta $A4T$, et si qua detur linea recta finita, poterit semper punctum ut $4C$, tale tamque propinquum

5 f. modis *(1)* Qvantulacunqve sit figura curvilinea, utiqve in ea duci potest recta, secans curvam in duobus punctis, idqve infinitis, modis. Eligatur earum una, qvae cum curvam secet in duobus punctis, abscindet ab ea segmentum, recta secante, et curvae portione absecta, comprehensum. Hoc segmentum in eadem semper figura repraesentetur per spatium Aμ3CA recta secante Aμ, et curva A3Cμ comprehensum; a rectae Aμ puncto A, ad easdem cum segmento partes ad angulos rectos educatur, AT, ad *(2)* Qvantulacunqve *L* 18 f. comprehensum. *(1)* Curvam autem *(2)* Rectam autem $\mu\lambda$, ipsi curvae asymptoton esse, sive nuspiam occurrere, patet, qvia *(3)* Artic. *L*

1 prop. ...: prop. 8 S. 205 Z. 10–25. 3 Nona: Leibniz hat in der Zählung der Propositionen die 9 versehentlich doppelt benutzt, so dass ab jetzt einschließlich der eingeschobenen Proposition die Nummerierung um 2 zu niedrig ist. 7 $2C3C4C\mu$: Leibniz bezieht sich ab hier wieder auf Fig. 3 S. 189 Z. 1. 16 $2D2B\mu\lambda\beta4D[3D2D]$: Leibniz verwechselt hier und im Folgenden punktuell β mit δ.

puncto μ, mente designari, ut ipsa $A4T$ vel ei aequalis $4B4D$, sit data linea recta finita major.

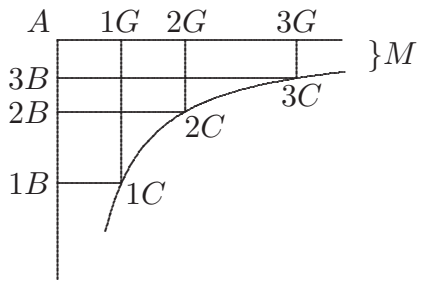
Artic. 2. Adeoque c u r v a $4D\delta$, procedet in infinitum versus λ, s e m p e r q u e m a g i s m a g i s q u e d e s c e n d e t a d r e c t a m $\mu\lambda$, prout punctum in curva $4C\mu$ ipsi μ propius assumitur.

Artic. 3. Nunquam tamen ad rectam $\mu\lambda$ perveniet, nam si ad eam perveniret in puncto aliquo ut λ, ipsa $\mu\lambda$, foret ordinata ad curvam, adeoque aequalis ipsi $A...T$ imaginariae, inter A, et punctum $...T$ imaginarium quo tangens ex μ ducta ipsi $A...T$ occurrit interceptae, quod punctum impossibile est, quia cum $\mu\lambda$ sit ipsi AT parallela, ex constructione, nuspiam occurret, adeoque n e c r e c t a $\mu\lambda$ tangens in μ u s p i a m o c c u r r e t c u r v a e $2D3D4D\beta$. Quoniam ergo curva in infinitum per artic. 1. accedit rectae $\mu\lambda$ per artic. 2. nec tamen eam attingit per artic. 3. i p s a $\mu\lambda$ c u r v a e $2D3D4D\beta$ erit a s y m p t o t o s.

Superest ut ostendam spatium longitudine infinitum $2D2B\mu\lambda$ etc. $\beta 4D3D2D$ aequari duplo Trilineo orthogonio $2C2B\mu 3C2C$. Porro ut hoc exacte ostenderem, nulla

---

14–212,7 *Daneben am Rand:* Est paralogismus satis subtilis idque apparebit si in formam redigatur. Occasio autem detegendi praebita a spatiis hyperbolicis seu reciprocis infinitis.



Demonstro esse $1C1B2B2C1C$ ad $1C1G2G2C1C$ ut numerus ad numerum. Eademque regula praecedens continue versus AG semper tantundem uni dabit, quantum dat alteri conjugatae quod cum semper fiet durante motu, et ultimum motus momentum nihil addat adimatque ergo semper ita erunt; et totum asymptotum $1C1GM3C2C1C$ ad

---

14 f. aequari ... $2C2B\mu 3C2C$: Die unendliche Fläche $2D2B\mu\lambda\delta 4D3D2D$ ist gleich dem Doppelten des Trilineums $2CA\mu 3C2C$, wie Leibniz im Folgenden zeigt. Leibniz wiederholt den Fehler im Beweis zu prop. XI in N. 51.

mihi occurrit ratio commodior, quam quae absolvitur per motum aliquem possibilem suppositum. Cogitemus ergo esse in puncto A defixam lineam quandam materialem, vel si placet alligatum funem, qui initio protensus sit usque ab A in $2C$, ibique occurrat regulae rigidae $2B2C\gamma$, quae secundum axem AB, descendere sive fluere potest, in $3B3C3N$, servato semper parallelismo. Ponamus funem manu regi, semperque extendi et prolongari posse, manu per curvam $2C3C4C$ descendente, funemque tensum et prolongatum secum ducente atque regulam mobilem $2B2C\gamma$ sibi obstantem depellente, ita ut manu veniente in $3C$, cum fune protenso $A3C$, regula mobilis $2B2C\gamma$ defluxerit in $3B3C3N$, et fune veniente in situm $A4C$, regula veniat in $4B4C3P$, et ita porro donec funis pariter et regula deveniant usque ad μ. His ita constructis ita ratiocinor: durante motu, portio figurae infra rectam $2B2D$ et inter curvam $2D3D4D$ et axem $2B3B4B$ etc. comprehensa, quam regula mobilis supra se relinquit, semper dupla est, sectoris, quem funis a sectore toto $2CA2B\mu4C3C2C$ abscindit. Nempe cum funis pervenit in $A3C$, et regula in $3B3C$, tunc figura $2D3B3D2D$ quam regula supra se reliquit est dupla portionis a sectore totali abscissae, seu sectoris $2CA3C2C$, per prop. 7. idemque perpetuo fiet donec motus cesset, quod non ante fit, quam cum funis et regula pervenere in μ. neque punctum ullum inter $2B$ et μ assignari potest, quo haec aequalitas desinat; cum ergo usque ad momentum quo cessat motus duplae semper rationis spatia eo quo dixi modo supra se r e l i n q u a n t regula et funis, ipso cessationis momento duplae quoque rationis spatia supra se r e l i q u i s s e deprehendentur, alioqui contra id quod diximus aliquando ante

---

totum $1C1BAM3C2C1C$ ut numerus ad numerum ergo semper finita, et in Hyperbola aequalia. Q. E. absurdum nam in Hyperbola differunt utique rectangulo $A1B1C1G$; ergo error in tali ratiocinatione. Itaque asymptotorum non procedit contemplatio in rigorosis, nec inventio summae, sed tantum in sumendo spatium quod absit infinite parva distantia.

Darüber: Sed hoc non aliter fieri potest (: ne quis hic erret :) nisi ponatur recta $\mu\lambda$ non esse ipsi AT omnino parallela, sed ad eam nonnihil inclinata, nec proinde curvae $D\delta$ asymptotos, sed ei occurrens, alicubi ut in λ, licet λ absit infinito abhinc intervallo. Id est recta $\mu\lambda$ erit quidem i n f i n i t a sive quavis designabili major, sed non i n t e r m i n a t a . Hoc posito utique ex prop. 7. spatium $2D2B\mu\lambda\delta2D$ ex. gr. infinitum ipsius finiti $1C1B\mu4C1C$ duplum erit. Quod asserebatur.

10 ratiocinor: *(1)* pars spatii asymptoti longitudine infiniti inter 1D1B, *(2)* durante L

cessationem motus, id facere cessassent, (cum ultimum motus momentum solum nullam varietatem afferat nec spatium ullum adjiciat adimatve). Deprehenditur autem regula $2B\gamma$ cum pervenit in $\mu\xi$, supra se reliquisse spatium longitudine infinitum $2D2B\mu\lambda$ etc. $\beta 4D3D2D$, et funis, sectorem totum $2CA\mu 4C3C2C$, spatium ergo hoc longitudine infinitum hujus sectoris duplum erit. Porro cum punctum A imo et punctum μ, aliud semper atque aliud sumi possit, ut alia taceam, idem infinitis modis praestari posse patet.

Scholium

Admiranda est contemplatio de spatiis longitudine infinitis, magnitudine tamen finitis. Veteribus, quod sciam nihil tale innotuit, et satis ipsis mirum videbatur, esse quasdam rectas asymptotos, quae magis magisque ad curvam accederent, nunquam tamen ad eam pervenirent. Primus ut puto Torricellius solidum Hyperbolicum acutum infinitum dimensus est, et ad Cubum quendam reduxit: in plano P. Gregorius a S. Vincentio spatium infinitum inter duas Hyperbolas certa quadam ratione comprehensum quadravit, et Vir suo merito celeberrimus, Christianus Hugenius spatium Cissoidale infinitum ad circulum revocavit. Et Geometra eximius Joh. Wallisius ostendit quomodo innumerae sint Hyper-

---

9 f. An autem hujusmodi quantitates ferat natura rerum, Metaphysici est disquirere; Geometrae sufficit, quid ex ipsis suppositis sequatur demonstrare. Multa hic dicere possem, exemplis elegantibus atque exquisitis illustrata, si locus iste, aut otium meum pateretur.

1 f. cessassent, | (cum ... adimatve) *erg.* | *(1)* qvod impossibile esse ostendimus. At vero ipso cessationis momento, *(2)* Deprehenditur *L* 12 Primus *(1)* qvod sciam *(2)* ut *L*

10–12 Veteribus ... pervenirent: Leibniz bezieht sich vermutlich auf Apollonius, Geminus, Pappus, Eutokios und Proklos; vgl. F. Barozzi, *Admirandum illud geometricum problema*, 1586, S. 3 f. und VII, 3 N. 6 S. 97. 12 f. dimensus: E. Torricelli, *De solido acuto hyperbolico problema alterum*, in: *Opera geometrica*, 1644, Tl 2, S. 93–135 (*TO* I S. 173–221). 14 quadravit: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXXIX, S. 603. 16 revocavit: Huygens verfasste seine Zissoidenquadratur im April 1658 (*HO* II S. 170–173). Er informierte Wallis über die Quadratur in seinem Brief vom 6. September 1658 (*a. a. O.*, S. 210–214, insbesondere S. 212) und sandte ihm seinen Beweis vor dem nächsten erhaltenen Schreiben vom 31. Januar 1659 (*a. a. O.*, S. 329–331). Wallis erwähnt Huygens' erste Mitteilung in *Mechanica*, 1670–1671, pars II, S. 532 (*WO* I S. 905) und gibt den Wortlaut des Beweises im Nachtrag zur *Mechanica*, pars III, S. 754–756 (*WO* I S. 906–908) wieder. 16 ostendit: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, Scholium zu prop. 101 bis Scholium zu prop. 107, S. 74–84 (*WO* I S. 407–412).

boloeides, quarum area licet longitudine infinita, possit inveniri, et quomodo eae possint ab aliis quae id non patiuntur, probabili ratione, discerni. Nobis theorema propositione septima explicatum viam dedit, cujuslibet curvae datae segmento cuidam vel sectori, utcunque parvo duplicato, infinitis modis figuras longitudine infinitas aequales, exhibendi. Quod aliis etiam rationibus fieri posse, non ignoramus.

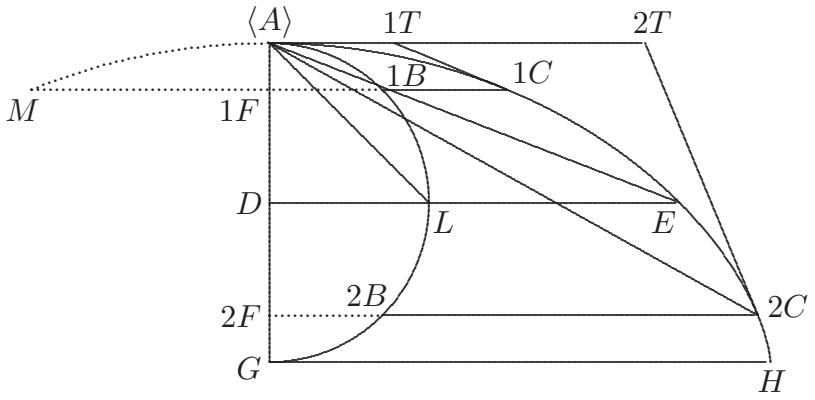
Verum hic notandum est, si quis idem de spatio absolute interminato quod inter curvam et asymptoton interjacet, demonstratum esse putat, eum mea sententia falli. Alterius longe naturae est quantitas infinita, et quantitas interminata, quemadmodum diversi omnino generis sunt indivisibile et infinite parvum. Quae tum a Geometris, tum a metaphysicis saepe confusa paralogismorum et errorum causae fuere. Interminatum voco cujus nullum est punctum ultimum: infinitum autem voco, quod majus est qualibet intelligibili a nobis sive numeris explicabili quantitate, tametsi aliud eo majus sit, quod cum priori applicatum longius procurrat, ipsum cui applicatum est, etiam terminatum erit.

Quoniam vero observavi demonstrationes plerumque in hoc negotio afferri non satis cogentes; contenti enim solemus esse ratiocinatione, quae ab omnibus partibus finitis, ad infinitum ipsum prosilit, cum tamen veritates usque adeo paradoxae paulo exquisitius comprobari mereantur; ideo circumspexi quanam eas ratione satis munirem. Quod non arbitror fieri posse rectius, quam motu continuo assumto, is enim interruptionem atque cessationem, ad ultimum usque momentum, patitur, nullam. Ultimum autem motus momentum nihil mutat, adjicit adimitve.

Pater Pardies e S. J. scriptis elegantibus apud eruditos notus et vita longiore dignus tantum his meditationibus tribuebat, ut crederet efficax satis argumentum praebere ad evincendam animae immaterialitatem, nec abnuerim subesse aliquid solidi, cum omnes mentis actiones idem evincant et tanto magis, quanto sunt admirabiliores. Sed qui circa mentem aliquid demonstrare in se suscipiet, modo a paralog⟨ismo⟩ caveat, sentiet non esse cujusvis in Metaphysicis ⟨—⟩ Geometriam.

6–14 Verum ... erit. *erg. L* 18 satis *(1)* munire possem contra scepticismum. nam et frustra tentavi rationibus apagogicis uti *(2)* munirem *L* 25–27 Sed ... Geometriam *erg. L*

23 crederet: I. G. Pardies, *Elemens de geometrie*, 1671, préface, Bl. a7 v°.



fi⟨g. 4.⟩

R e t o r t a m C y c l o i d i s voco bicurvilineum $A1B2B2C1CA$ arcu cycloidis, ut $A1C2C$, arcu circuli generatoris in primo situ collocati, ut $A1B2B$, et ordinatae cycloeidis ad axem AF, portione $2B2C$, comprehensum.

5 P r o p o s i t i o D e c i m a.

Quaelibet Retorta Cycloidis Segmenti eodem cycloidis arcu, et recta a vertice subtensa comprehensi, duplum est.

In eadem figura ajo retortam quamcunque $A1B2B2C1CA$, esse duplam segmenti respondentis $A2C1CA$, curvae Cycloidis portione $A1C2C$, et subtensa a vertice, $A2C$,
10 comprehensi. Ex puncto C ad rectam AT per verticem A, transeuntem plano GH parallelam ducatur tangens CT. idque in quolibet curvae puncto factum intelligatur; constat ex iis quae apud doctissimos de cycloide scriptores habentur AT esse ipsi BC semper

1 *Daneben:* ⟨— — —⟩
⟨—⟩ *egal* ⟨—⟩
⟨— — —⟩
$1B1C$ *egale à arc* $A[1]B$
$2B2C$ *egale à arc* $A2B$

8–215,7 *Nebenbetrachtung:* $\widehat{A2B}\,\widehat{2CA}$ ⊓ ② : $\widehat{A2CA}$ Ergo auferatur ab alioqve: $\widehat{A1B}\,\widehat{2CA}$. fiet: $\widehat{A2B}$ *gestr. L*

12 ex iis: z. B. J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 70 f. (*WO* I S. 533 f.) und Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, prop. 15, S. 39–42 (*HO* XVIII S. 152–159).

aequalem. Jam summa omnium $A1T$, $A2T$, etc. ad axem $A1F2F$ applicatarum, aequatur duplo segmento $A2C1CA$, per prop. 8. Nihil autem refert, an axem ipsum attingant applicatae, an vero aliter utcunque in ordinatis $1F1C$ $2F2C$ etc. sumantur, ut si $A1T$ transferatur in $1B1C$, et $A2T$ in $2B2C$, semper enim eadem manet summa linearum sive area figurae, quemadmodum toties ostensum est ab aliis, et severe demonstrari potest, ex illis quae prop. 6. diximus; spatium ergo ex omnibus AT in respondentes BC translatis seu retorta $A1B2B2C1CA$, aequatur duplo segmento $A2C1CA$.

Scholium

Segmentum cycloidis dimidium est portionis respondentis figurae sinuum versorum seu summae arcuum circuli ad axem. Ea enim figura sinuum versorum conflatur ex summa arcuum ad diametrum, quae aequalis perpetuo retortae cycloidali circulari, quippe quae etiam ex rectis $1B1C$, $2B2C$ quae arcubus $A1B$, $A1B2B$ aequalibus conflatur. Quemadmodum apud R. P. Honoratum Fabri tractatu eleganti *de Linea sinuum et Cycloide*, videri potest. Aliae quae hinc duci possent, omitto; excepta tantum propositione quadam memorabili, quae jam sequetur.

Propositio Undecima

„Si recta per centrum circuli generatoris ducta, plano provolutionis parallela Cycloidi „occurrat, recta alia punctum occursus cum vertice cycloidis jungens segmentum ab„scindet a Cycloide, quod erit absolute quadrabile, sine supposita circuli quadratura, „et quidem aequale semiquadrato radii Circuli generatoris.

Per D centrum circuli generatoris ALG, in eadem figura, ducta recta DE, plano

---

9–15 Ideoque quae Circulo est figura sinuum versorum est cycloidi figura segmentorum.

6 prop. *(1)* 7 *(2)* 6. *L* 8 *(1)* Corollar. 1. *(2)* Scholium *L* 10 seu ... axem *erg. L* 11 circulari *(1)* . De qvo videri potest R. P. Honoratus Fabri, eleganti opusculo de linea sinuum et Cycloide. Corollar. 2. *(2)* , qvippe *L*

---

13 tractatu: H. Fabri, *Opusculum geometricum*, 2. Aufl., prop. XXIII, coroll. VII, in: ders., *Synopsis geometrica*, 1669, S. 383. 14 propositione: vgl. VII, 4 N. 17 S. 344–346.

provolutionis GH parallela Cycloidi occurrat in E, jungatur AE, vertex A puncto occursus E, ajo segmentum $AE1CA$, absolute quadrari posse, et aequari semiquadrato radii, seu triangulo ADL. Hoc ita breviter probatur: hoc segmentum duplicatum, aequatur retortae $A1BLE1CA$, per prop. 10. (: quanquam id in hoc quidem casu aliter quoque independenter a prop. 10. probari possit :). At haec retorta aequatur quadrato radii, quemadmodum partim apud eos qui de cycloide scripsere, doctissimos viros, diserte ostensum est, ut R. P. Fabrium, et si bene memini Clarissimum Wallisium partim, ex eorum ut Dettonvillaei aut Laloverae traditis nullo negotio sequitur, pendetque ex nota hemisphaerii superficie, ab Archimede exhibita, ut illis manifestum est, qui in hoc argumento sunt versati; ut rem apud eruditos notam hic probare velle inutile videatur. Quoniam ergo segmentum duplum aequatur retortae, et retorta quadrato radii etiam duplum segmentum huic quadrato aequabitur; et segmentum ipsum semiquadrato seu triangulo ADL. Quod erat demonstrandum.

Scholium

Primus omnium spatium aliquod solis rectis et curva Cycloidis comprehensum, absolute dimensus est Hugenius. Portionem recta basi parallela e cycloide abscissam cujus dimidium est $A1F1CA$. altitudo autem $A1F$. media pars radii AD, quod invenit aequari, dimidio hexagono regulari inscripto in Circulo generatore quemadmodum id memorat Pascalius in Historia insignium de Cycloide inventorum, quam exigua scheda complexus est. Ab eo tempore nemo quod sciam aliam portionem solis rectis et curva cycloidis contentam absolute quadravit, mihi vero idem quod tot alia praebuit, theorema, prop. 7. et 8. expressum, hunc quoque transitum dedit generalem a segmentis ad retortas adeoque absolutam segmenti cujusdam Cycloidalis transversi quadraturam

4 f. (: qvanqvam ... possit :) *erg. L* 11–13 qvoniam ... demonstrandum *erg. L*

---

4 f. (: qvanqvam ... possit :): s. N. 30. 7 Fabrium: *a. a. O.*, prop. XXIV, § 3, S. 385. 8 sequitur: Das Resultat folgt unmittelbar aus J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, §23, S. 7 u. ders., *Mechanica*, 1670 bis 71, pars II, cap. V, prop. XX, §B, S. 374 (*WO* I S. 502 u. 805); vgl. Bl. Pascal, *Traitté general de la roulette*, 1658, S. 2 f. (*PO* IX S. 118–120) und A. de Lalouvère, *Veterum geometria promota*, 1660, prop. XII, S. 10 f., wo der Satz sogar explizit formuliert ist. 9 exhibita: Archimedes, *De sphaera et cylindro* I, prop. XXXIII. 16 dimensus: s. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 69 (*HO* XVIII S. 204 f.). 19 memorat: vgl. Bl. Pascal, *Histoire de la roulette* u. *Historia trochoidis*, 1658, S. 5 (*PO* VIII S. 202 bzw. 217).

utique simplicissimam quod d i m i d i o q u a d r a t o a radio aequari ostensum est. Quae hoc loco memoratu non indigna videbantur.

P r o p o s i t i o D u o d e c i m a

Figuram angulorum exhibere, sive curvam designare, (ex earum numero quae analyticae vocantur,) ad quam figura constituatur, cujus portiones parallelis comprehensae sint ut anguli, modo portiones ex axe abscissae sive altitudines sint ut sinus.

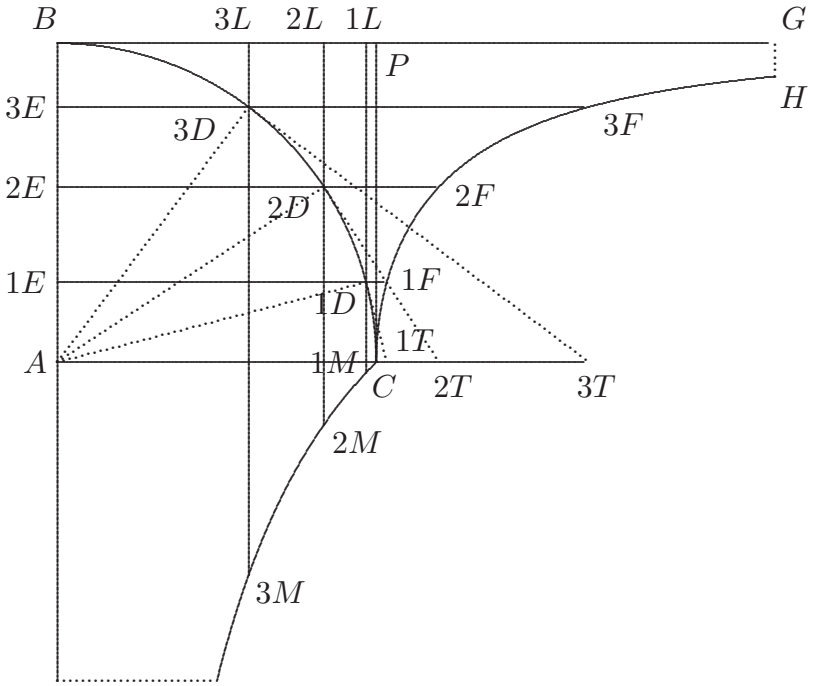


fig. 5.

7 *Daneben:* *EF egale à AT*
egale à LM.

4 f. analyticae *(1)* vocantur, sive ut alii malunt Geometricae, *(2)* vocantur *L* 5 portiones *(1)* ordinatis abscissae sint ut anguli *(2)* trilineae orthogoniae *(3)* parallelis *L*

In sinubus complementorum arcuum circuli ad diametrum demissis ac productis sumantur, inde a diametro, rectae, quae sint sinubus complementi et radio tertiae proportionales, curvaque per earum extrema transeat, factum erit quod quaeritur. In fig. [5.] sit quadrans Circuli $ABDCA$, arcus CD, arcus complementi BD, ex punctis D in arcu quadrantis BDC sumtis demittantur in diametrum AB, ipsae DE, sinus arcuum BD, seu sinus complementi, arcuum CD, jungantur radii AD; et in sinubus complementi ED productis sumantur rectae EF, ipsis ED, AD tertiae proportionales et curva $1F2F3F$ transeat per puncta F, ajo portiones quadrilineas parallelas $CAEFC$ esse proportionales angulis DAC, quorum scilicet sinus sunt rectae EA: id est portio quadrilinea $CA1E1F$, erit ad aliam $CA2E2F$, ut angulus $1DAC$, (cujus scilicet sinus $1EA$,) est ad angulum $2ADC$ (: cujus sinus est $2EA$:).

Demonstratio

Ex punctis D ducantur tangentes circuli DT, basi quadrantis AC productae occurrentes in punctis T. Ajo primum ipsas AT fore ipsis EF respondentibus aequales, nam ob triangula DEA, ADT similia erit ED ad DA, ut DA ad AT, id est ipsae AT erunt sinubus ED et radio DA, tertiae proportionales, quales esse diximus et EF. Ergo perinde est ac si dixissemus curvam $C1F2F3F$ generandam perpetua translatione ipsarum AT in EF. Hoc autem posito manifestum est ex prop. 7. quadrilineum $CA1E1FC$, esse duplum sectoris $1DAC1D$, et similiter quadrilineum $CA2E2FC$ esse duplum sectoris $2DAC2D$; sunt autem sectores, vel dupli sectores $1DAC1D$, $2DAC2D$, ut arcus $1DC$, $2DC$, id est ut anguli $1DAC$, $2DAC$, ergo quadrilinea (sectorum dupla) $CAEFC$, etiam erunt ut anguli DAC.

Corollarium

Hinc ducitur spatium figurae angulorum longitudine infinitum $CABG$ etc. HFC, esse, ad portionem finitam $CAEFC$, ut angulus rectus BAC, ad obliquum DAC.

4 arcus CD ... BD *erg. L* 5 f. sinus ... CD, *erg. L* 6 sinus | complementi *erg.* | ED *L*
25 DAC | qvod *(1)* per se *(2)* ex propositione ipsa manifestum ad imitationem tamen prop. 9. severe demonstrari posset *gestr.; dazu am Rand, nicht gestr.:* ℜ | *L*

Scholium

Duo sunt in Geometria difficilia tractatu, ratio et angulus; et sectio anguli pariter ac rationis sive logarithmi. Anguli enim trisectio problema solidum est, prorsus ac trisectio rationis. Et sectio anguli vel rationis in quinque partes, sursolidum est, et ultra locum conicum excurrit. Sectionem autem rationis sive logarithmi idem esse constat, quod inventionem mediarum proportionalium, est enim trisectio rationis idem quod inventio duarum mediarum, et sectio rationis in quinque partes aequales, est inventio mediarum quatuor. At sectio anguli aut rationis, in data ratione lineae ad lineam, problema est transcendens, ad nullam enim aequationem reduci potest, quales Vieta concinnare docuit, nec per curvas construi potest, quales in Geometriam Cartesius introduxit. At non ideo est supra vires humanas. Nimirum natura huic etiam quaestionum generi peculiaria solvendi media constituit, simplicissima, nec minus Geometrica, quam quae a Cartesio feruntur. Sunt enim constructiones quaedam, quae non nisi per calculum discerni possint a Cartesianis, quibus tamen, magna illa, et a Cartesio habita pro derelictis problemata perficiuntur. Ubi vero, ne quis erret, nec quadratricem, nec logarithmicam admitto, cum enim earum puncta omnia non inveniantur, nec proinde curvae continuo tractu geometrice describantur, nullius ad Geometricas constructiones

5–8 ℜ Admonenda quaedam.

9 f. Vieta *(1)* et Cartesius concinnare docuere *(2)* concinnare *L* 11 humanas, *(1)* nimirum natura sua propria media, cuilibet qvanqvam Cartesius eosdem Geometriae suae et ingenio humano limites, ut magni homines solent, paulo audacius praescripserit. *(2)* Nimirum *L* 13 qvaedam, *(1)* usqve adeo simplices, ut *(2)* Geometricae *(3)* qvae *L* 15 perficiuntur. | Qvod si ergo inventionem duarum mediarum proportionalium Geometricam habemus, uti certe habemus; ego sectionem anguli aut rationis in data ratione, rectae ad rectam, audacter spondeo. *gestr.* | Ubi *L*

3 trisectio ... est: Dies wurde erst im 19. Jh. bewiesen. 10 docuit: Fr. Viète, *Ad angularium sectionum analyticen theoremata*, 1615 (*VO* S. 287–304). 11 introduxit: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106.

usus esse possunt, quoniam nemo asserere potest, punctum quod quaeritur felici semper eventu, in ea quae jam invenit aliquis numero finita puncta casurum, ac non potius in unum ex infinitis aliis intermediis, nondum inventis incidere. Porro figurae angulorum respondet figura rationum, ea autem Hyperbola est, nam ex admirabili P. Gregorii a S. Vincentio invento constat res; nulla algebra divinabilis, nec mea sententia, pro dignitate aestimata, si abscissae ex asymptoto sint ut numeri, quod portiones quaedam hyperbolae erunt ut logarithmi. Hic vero operae pretium erit annotare et perelegantem figurae rationum Vincentianae id est Hyperbolae et figurae angulorum nostrae symbolismum. Nimirum si in figura, ipsae AT applicentur ad axem BA seu transferantur in EF faciunt figuram angulorum ut ostendi, si vero applicentur ad axem conjugatum BL, seu si transferantur in LM, facient figuram rationum, et terminabuntur in curvam Hyperbolicam $C1M2M3M$. cujus centrum B. vertex C. asymptoti BL, BA, latus rectum et transversum aequalia. Nimirum quemadmodum sumto radio BA, sinubus $A1E$, $A2E$, quadrilinea figurae angulorum $CA1E1FC$, $CA2E2FC$ sunt ut anguli ($1DAC$, $2DAC$) ita sumta unitate BA, seu eodem radio, numeris $B1L$, $B2L$, quadrilinea Hyperbolica, $1M1L2L2M1M$, et $2M2L3L3M2M$ erunt ut rationum indices sive Logarithmi. Quorum omnium usus ingentes aliquando clarius apparebunt. Porro Figura rationum est gradus secundi, seu Conici, cum sit Hyperbola, figura angulorum altius utique ascendit, cum Hyperbola non sit; et nulla ex Conicis praeter Hyperbolam asymptotos habeat.

3 incidere. | tametsi ad mechanicas operationes inservire possint. Mihi autem hoc ipsum serviet ad absolvendam hanc anguli sectionem Geometricam universalem, haec ipsa serviet figura angulorum, ut suo tempore explicabo. | Fateor interim hanc figuram angulorum, non ex nostris tantum principiis, sed variis aliis modis exhiberi ac demonstrari posse, qvi nec aliis ignoti fuere *erg.* | *gestr.* | Porro *L* 5 f. nec ... aestimata *erg. L* 8 rationum | *(1)* a Gregorio *(2)* Vincentianae id est Hyperbolae *erg.* | et *L* 8 nostrae *erg. L* 8 f. symbolismum, | qvem *(1)* invenit *(2)* observavit Tschirnhusius, nobilis e Lusatia juvenis, mihi amicus, et in his studiis egregie versatus. Redeundum est ad figuram *gestr.* |. Nimirum *L* 18 angulorum *(1)* tertii seu sursolidi *(a)* aeqva *(b)* posita enim *(2)* altius *L*

5 invento: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXV–CXXX, S. 594 bis 597. 25 observavit: s. Tschirnhaus an Pieter van Gent, 6. November 1675 (Amsterdam *Universiteitsbibliotheek* MS IIA38, S. 12 f.) und VII, 3 N. 52 S. 701 Fig. 2.

Definitiones.

Curvam Analyticam voco, cujus quaelibet puncta determinari possunt per magnitudines quarundam rectarum calculo exacto inventas. Geometricam cujus

---

2 *Am Rand:* Curva Analytica simplex est, in qua ordinatae vel earum potentiae sunt in ratione simplici vel multiplicata, directa vel reciproca, abscissarum, vel potentiarum ab abscissis respondentibus. Si ratio sit directa, vocantur Parabolae aut Paraboloeides, si reciproca, Hyperboloeides.

Latus rectum vel parameter in curva Analytica simplice est, recta constans secundum quam possunt abscissae vel ordinatim, applicatae; id est cujus dignitas in dignitatem inferiorem alterutrius ducta, servata homogeneorum lege, aequat potentiam alterius superiorem, ut in Parabola. Si ordinatae vel abscissae sint v. et y. sitque quadratum ab v. aequale cuidam rectangulo, sub y. et recta constante p. erit p. latus rectum; et patet fore duas diversas y, ut $\overline{1y}$, $\overline{2y}$ inter se, ut respondentium ipsis v. nempe $\overline{1v}$, vel $\overline{2v}$, quadrata. Nam rectangulum sub p et $\overline{1y}$, est ad rectangulum sub p et $\overline{2y}$, ut quadrat. ab $\overline{1v}$ est ad quadrat. a $\overline{2v}$. ut aequalia ipsis rectang. p in $\overline{1y}$ ad rectang. p in $\overline{2y}$, seu ut $\overline{1y}$ ad $\overline{2y}$. Ergo ipsae y. sunt in ratione ipsarum v duplicata. Eodem modo in parabola cubica, ubi ipsae y sint ut cubi ipsarum v, p^2 quadratum lateris recti ductum in potentiam deficientem, alterutrius, nempe ipsius.

2 *(1)* Curvam Analyticam voco, cuius punctarum *(a)* a datis qvibusdam punctis distantia *(b)* omnium distantia a data quadam recta calculo potest inveniri. | Curvam autem *erg.* | Geometricam autem appello qvae motu | continuo *gestr.* | rectarum potest describi. *(aa)* intelligitur *(bb)* ita Parabola Cubica geometrica pariter et analytica est *(cc)* qvi, supposita instrumentorum exactitudine sit in potestate. *(aaa)* Calculum autem appello *(bbb)* Calculo autem inveniri posse qvantitas dicetur, cum *(aaaa)* ad aeqvationem qvandam revocari potest, in qva ipsa *(bbbb)* aeqvatio inveniri potest, cuius ipsa sit incognita. Nam omnia problema qvae ad aeqvationes reducta sunt, ad simplicissimum reducta sunt statum. Scio Cartesium curvas vocare Geometricas, qvas ego Analyticas; Sed analytice haberi est ni fallor calculo haberi, geometrice autem haberi est motu ex aliqvo construi posse, qvi scilicet sit in potestate; tametsi calculo cuidam exacto subjici non possit, modo constructio sit exacta. *(2)* Curvam *L* 8 *(1)* Latus rectum | vel Parameter *erg.* | in curva Analytica simplice est secundum qvem possunt abscissae vel ordinatim applicatae, id est cuius *(a)* dignitas (id est vel ipsa qvantitas vel aliqva eius potentia) *(b)* in aeqvatione curvae naturam per relationem inter abscissarum, et ordinatarum potentias explicante aeqvationem comples servata homogeneorum lege, *(2)* Latus *L*

---

26 vocare: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 20 f.

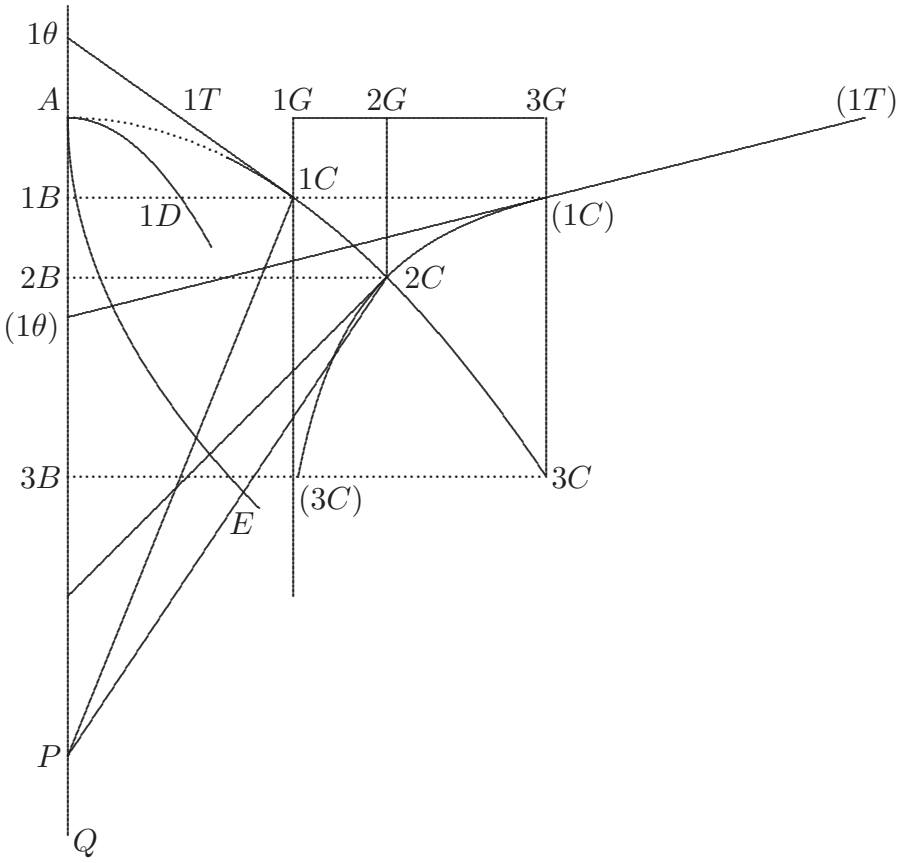
omnia puncta possunt designari, sive quae potest describi, motu continuo quarundam rectarum, super rectis; qui supposita instrumentorum exactitudine sit in potestate. Magnitudinem autem c a l c u l o e x a c t o inventam dicemus, cum aequatio certi gradus haberi potest, cujus ipsa est incognita. Motum autem illum demum admittemus, qui ab uno dependeat, (: alioqui enim non erit in potestate nostra efficere ut diversi motus certum inter se legem servent :) quique fiat motu rectarum super rectis, adeoque nullam necessario requirat elaborationem curvae materialis, quo excluduntur Trochoides, aliaeque id genus curvae, ex quibus tamen posteriores quoniam exacte describi possunt, s e m i - G e o m e t r i c a s appellare soleo; quemadmodum illas s e m i - a n a l y t i c a s , quae calculo aliquo exacto, sed transcendente determinantur, quibus et nomen a n a l y t i c a r u m t r a n s c e n d e n t i u m accommodari possit; quid autem apud me sit calculus transcendens, hoc loco explicare prolixius foret.

Scio Cartesium Geometricarum nomine eas tantum censere, quas ego appello Analyticas, sed hoc ex quadam falsa persuasione factum est. Credidit enim non nisi Analyticas suas Geometrice, id est motu ab uno dependente, ac sine curvarum materialium in rectum extensione, aut ad rectas applicatione, posse describi: vel potius credidit quotiescunque talis descriptio fingi potest, curvam esse analyticam sive aequatione explicabilem. Quod verum non esse comperi; tametsi id mirum videri posset.

Sit curva quaedam $1C2C3C$. Axis $A1B2B3B$, ex curvae punctis C, ordinatae normales ducantur BC, ad abscissas AB; jam si r e l a t i o inter abscissam AB, et ordinatam ei respondentem, per totam curvam perpetuo eadem est, aequatione quadam analytica explicabilis, c u r v a vocabitur A n a l y t i c a . Ut si AB vocetur y. et BC ei respondens v. sitque parameter quidam sive recta constans AP quae vocetur p; et dicatur ea esse natura curvae, ut sit rectangulum $PA1B$ aequale quadrato $1B1C$, eodemque modo rectangulum $PA2B$ aequale quadrato $2B2C$, et generaliter rectangulum PAB aequale quadrato BC quod contingit, si curva sit parabola, tunc literas supradictis lineis cum

4 incognita, *(1)* ita enim problema ad simplicissimam reductum est expressionem, rationalem eiusqve natura *(2)* Motum *L* 18 comperi; *(1)* non exiguo *(2)* ingenti Geometriae profectu; ita enim ad problemata a Cartesio pro derelictis habita, *(a)* mirabilis aperta est via *(b)* et algebram transcendentia, mirabilis aperta est via. De qvibus alibi erit dicendi locus *(3)* tametsi *L*

13 censere: *a. a. O.* 26–223,2 cum Vieta: Fr. Viète, *In artem analyticam isagoge*, 1591 (*VO* S. 1–12).



[*Fig. 6*]

Vieta substituendo, erit Cartesianae methodo aequatio naturam curvae explicans: py aequal. v^2, seu rectangulum ex p in y, aequale quadrato ab v. Si Parabola esse Cubica, foret, rectangulum solidum ex quadrato p, in AB aequale cubo a BC, unde aequatio: p^2y aeq. v^3. Si Parabola esset Quadrato-quadratica, foret Cubus a p, ductus in y, aequalis quadrato-quadrato ab v. seu p^3y aeq. v^4. Sed quoniam ita ascenditur ad dimensiones

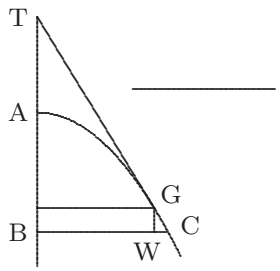
1 *Daneben:* AT triplo AB.
Darunter: AP aeq. p.
AB seu DC aeq. y.
BC seu AD aeq. v.

2 Cartesianae methodo: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 20–23.

imaginarias, ideo ne quis putet etiam curvas ejusmodi esse imaginarias, admonendum est, nihil aliud designari, quam si quadratum ut 9 numeri, ut ternarii qui (assumta aliqua unitate sive mensura, ut pede) exprimit longitudinem ipsius p, (: si p sit tripedalis :) multiplicetur per numerum v. g. 144 qui ipsius y magnitudinem repraesentat, (: si ponatur aliqua ex abscissis, ut $A1B$ esse 144 pedum, :) fore numerum provenientem 1296 aequalem quadrato-quadrato numeri pedum ipsius v, ordinatae respondentis $1B1C$, adeoque fore v, radicem quadrato-quadraticam a 1296, quae est 12: quae etiam in irrationalibus habent locum. Eodem modo si curva $A1C2C3C$ esset arcus circuli, cujus diameter AP, sit p, foret ex natura circuli rectangulum PBA aequale quadrato BC, (: quemadmodum in parabola PAB aequale quadrato BC :) et aequatio foret $py - y^2$ aequ. v^2. Est enim BA, y. et PB, $p - y$. et rectangulum PBA est $py - y^2$. Haec illorum causa adjicienda duxi, qui curvarum expressioni per aequationes non sunt assueti, ut videant compendii tantum causa adhiberi, ne magna verborum mole mentes onerentur, de caetero autem a Locis Veterum nihil differre.

Si Aequatio explicans relationem ordinatarum curvae analyticae ad abscissas ex axe aliquo duorum tantum terminorum est, vocatur a me C u r v a A n a l y t i c a s i m p l e x . Quemadmodum iisdem quae supra positis, si curva sit parabola Quadratica sive communis, aequatio est py aeq. v^2. Si Cubica sit parabola, aequatio est p^2y aeq. v^3. imo est quoddam parabolae Cubicum gradum non excedentis genus a parabola cubica, passim memorata diversum, cujus aequatio est py^2 aeq. v^3 quam Clarissimus Wallisius vocat semicubicalem, in qua rectangulum solidum sub p parametro et quadrato ab y abscissa, aequatur Cubo ab v ordinata. Haec curva prima est omnium analyticarum, quae, absolutam dimensionem subiit, de quo invento inter Anglos Batavosque hodieque

18 f. *Am Rand:*



$\mathrm{py}^2 \sqcap \mathrm{v}^3 \quad 2\mathrm{pyt} \sqcap 3\mathrm{v}^3$ et $\mathrm{t} \sqcap \dfrac{3\,\mathrm{v}^3 \sqcap \mathrm{py}^2}{2\mathrm{py}}$ ergo $\mathrm{t} \sqcap$

$\mathrm{p}\,\dfrac{3}{2}\mathrm{y} \quad \dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{v}} \sqcap \dfrac{\beta}{\gamma}$ et $\gamma \sqcap \dfrac{\beta\mathrm{v}}{\mathrm{t} \sqcap \frac{3}{2}\mathrm{y}}$ et $\gamma \sqcap \dfrac{\beta\sqrt[3]{\mathrm{py}^2}}{\frac{3}{2}\mathrm{y}}$ et $\gamma \sqcap$

$\dfrac{2}{3}\beta\sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{y}}}$ et $\mathrm{GC} \sqcap \beta\sqrt{\dfrac{4}{9}\sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{p}^2}{\mathrm{y}^2}} + 1}$ *gestr. L*

2 quadratum: Als Beispiel für $p^3y = v^4$ mit $p = 3$ und $v^4 = 1296$ müsste Leibniz $v = 6$, $y = 48$ und $p^3 = 27$ verwenden. 21 vocat: J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 92, 95 (*WO* I S. 551, 553).

certatur: illinc Brounkero et Wallisio pro Neilio, hinc Hugenio pro populari suo Heuratio, stantibus. Ubi vero negari non potest Heuratium rem totam simul omnibus numeris absolutam dedisse, at Neilii inventum a Wallisio fuisse absolutum, ante tamen quam uterque de Heuratio audiisset. Nam Neilius invenerat curvam cujus elementa procederent summabili quadam ratione fore mensurabilem; at curvam ejusmodi esse parabolam semicubicam, (rem non adeo facilem inventu) a Wallisio accepit.

Curvae analyticae simplices omnes hoc habent, ut sint ordinatae in ratione abscissarum, aut potentiarum ab abscissis multiplicata aut submultiplicata, eaque directa aut reciproca; ut si curva $1C2C3C$ sit parabola cubica, abscissa $A1B$, sit $\overline{1y}$. $A2B$ sit $\overline{2y}$. parameter constans p. et ordinata $1B1C$ sit $\overline{1v}$. $2B2C$ sit $\overline{2v}$. Erit $\overline{1y}p^2$ aeq. $\overline{1v}^3$, et $\overline{2y}p^2$ aeq. $\overline{2v}^3$ et $\overline{1y}$ aeq. $\frac{\overline{1v}^3}{p^2}$ et $\overline{2y}$ aeq. $\frac{\overline{2v}^3}{p^2}$. Ergo $1y$ ad $2y$, erit ut $\overline{1v}^3$ ad $\overline{2v}^3$, ergo ut cubus ab $\overline{1v}$ ad cubum ab $\overline{2v}$, erunt ergo abscissae AB seu y ut suarum ordinatarum, BC seu v, Cubi sive in triplicata ratione ordinatarum, ergo contra ordinatae in subtriplicata ratione abscissarum. Si tamen in eadem parabola Cubica ordinatae sumantur in axem conjugatum $A1G2G3G$, tunc inversa appellatione abscissae AG erunt v. (aequales ordinatis BC ad axem priorem $A1B2B3B$) ordinatae GC erunt y. (aequales abscissis AB ex axe priori) et ita ordinatae GC seu y. erunt in triplicata ratione seu ut cubi abscissarum AG seu v. quae inverso similiter in aliis curvis simplicibus fieri potest. Eodem modo in Parabola semicubicali, cujus aequatio py^2 aeq. v^3. posita semper p aeq. AP. y aeq. AB vel GC. et v aeq. BC vel AG. erunt quadrata ab y abscissis (vel ordinatis) ut cubi ab v ordinatis (vel abscissis) sive cubi ab v erunt in duplicata ratione ipsarum y. vel quadrata ab y in triplicata ratione ipsarum v. Ipsae autem v. erunt in subtriplicata ratione quadratorum ab y. quia v aequales $\sqrt[3]{py^2}$. radicibus scilicet Cubicis a py^2. et ipsae y vicissim erunt in subduplicata ratione Cuborum ab ipsis v, seu y aeq. $\sqrt[2]{\frac{v^3}{p}}$ aequales scilicet radicibus

3 Neilii | imperfectum per se *gestr.* | inventum *L*

1 Brounkero et Wallisio: s. die in *Philosophical Transactions* VIII, Nr. 98 vom 17./27. November 1673, S. 6146–6150 abgedruckten Briefe von J. Wallis, W. Brouncker und Chr. Wren. 1 Hugenio: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 71 f. (*HO* XVIII S. 209–211). 3 dedisse: H. v. Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520. 4 invenerat: s. J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 91 f. (*WO* I S. 551 f.). 6 accepit: vgl. *a. a. O.*, S. 94 f. (*WO* I S. 553).

quadraticis ex $\frac{v^3}{p}$. Constans enim quantitas p. seu parameter, aut ut veteres vocabant, recta secundum quam possunt ordinatae, nihil in ratione mutat.

Hactenus ratione tantum directa usi sumus, afferenda sunt exempla reciprocae quoque, ut natura curvarum Analyticarum simplicium penitus intelligatur. Sit in eadem figura curva $(1C)2C(3C)$ Hyperbola Conica cujus centrum A, asymptoti AB. AG. constat rectangulum $AB(C)$ vel $AG(C)$ aequari cuidam quadrato constanti, quod sit p^2. quadratum a constanti recta p. Ergo erit yv aeq. p^2. et y aeq. $\frac{p^2}{v}$ et v aeq. $\frac{p^2}{y}$. et $\overline{1y}$ aeq. $\frac{p^2}{\overline{1v}}$ et $\overline{2y}$ aeq. $\frac{p^2}{\overline{2v}}$. Ergo $\overline{1y}$ ad $\overline{2y}$ erit ut $\frac{p^2}{\overline{1v}}$ ad $\frac{p^2}{\overline{2v}}$, id est reciproce, ut $\overline{2v}$ ad $\overline{1v}$. Sive erunt ordinatae in reciproca ratione abscissarum.

Si curva esset Hyperbola vel Hyperboloeides Cubica, foret rectangulum solidum sub abscissa in quadratum ordinatae vel contra aequale cubo a recta constanti; et vy^2 aeq. p^3. et forent ipsae v in ratione reciproca duplicata ipsarum y. et ipsae y in ratione reciproca subduplicata ipsarum v. Hinc cum parabola Conica sit quodammodo prima directarum, (quanquam id proprie loquendo ipsi potius triangulo competat, ut ex tabula patebit) et Hyperbola conica sit prima reciprocarum, hinc illas viri docti P a r a b o l a s , vel p a r a b o l o e i d e s , has H y p e r b o l a s aut H y p e r b o l o e i d e s vocare solent. Sec nec male R. P. Berthet e S. J. in omni studiorum genere, tum vero in Geometria eximius Hyperboloeidem Cubicam paulo ante explicatam, Antiparabolam vocabat, cum ejus proprietates quasdam consideraret, et quadraturam invenisset de suo. Quoniam in ea quadrata ordinatarum sunt in ratione abscissarum reciproce, ut in Parabola Conica directe.

---

4 f. *Über* eadem, *über* figura *und am Rand jeweils:* $\mathfrak{A}$

13–21 Hinc ... directe. *erg. L*

---

1 vocabant: Apollonius, *Conica*, I, prop. XI; vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 208. 18 vocabat: s. VII, 5 N. 64 S. 441 f. u. III, 1 N. 76.

His ita explicatis omnium Curvarum Analyticarum simplicium Catalogum subjiciemus:

Tabula aequationum pro Curvis Analyticis Simplicibus,
quarum ordinatae v vel earum potestates
sunt in abscissarum, y

		Aequationes Paraboloeidum			
	ratione directa	simplici	duplicata	triplicata	quadruplicata
ordinatae		v aeq. y	pv aeq. y^2	p^2v aeq. y^3	p^3v aeq. y^4
ordinatarum	quadrata,	v^2 aeq. py	v^2 aeq. y^2	pv^2 aeq. y^3	p^2v^2 aeq. y^4
	cubi	v^3 aeq. p^2y	v^3 aeq. py^2	v^3 aeq. y^3	pv^3 aeq. y^4
	quadrato-quadrata	v^4 aeq. p^3y	v^4 aeq. p^2y^2	v^4 aeq. py^3	v^4 aeq. y^4
	etc.				
			Aequationes Hyperboloeidum		
	ratione reciproca				
ordinatae		vy aeq. p^2	vy^2 aeq. p^3	vy^3 aeq. p^4	vy^4 aeq. p^5
ordinatarum	quadrata	v^2y aeq. p^3	v^2y^2 aeq. p^4	v^2y^3 aeq. p^5	v^2y^4 aeq. p^6
	Cubi	v^3y aeq. p^4	v^3y^2 aeq. p^5	v^3y^3 aeq. p^6	v^3y^4 aeq. p^7
	quadrato-quadrata	v^4y aeq. p^5	v^4y^2 aeq. p^6	v^4y^3 aeq. p^7	v^4y^4 aeq. p^8
	etc.				

Quae tabula in infinitum continuari potest, tantum notari debet, redire in ea easdem saepe curvas alio schemate tectas, duas ob causas, scilicet ob permutationem et ob depressionem; o b p e r m u t a t i o n e m , fit ut omnes bis occurrant, nempe sumendo v antea ordinatam, nunc pro abscissa, et y antea abscissam, nunc pro ordinata. Nempe ejusdem speciei est curva AC cujus aequatio pv aeq. y^2 cum curva AE per omnia simili et aequali intra eosdem axes conjugatos, descripta cujus aequatio v^2 aeq. py. Ob d e p r e s s i o n e m vero eadem curva saepius occurrit quoniam saepe aequatio ad minores terminos reduci potest, ut v^3 aeq. y^3. Aequatio coincidit cum hac v aeq. y et v^4

3–18 Huic poterit subjici Tabula rationalium directarum; et ex ea corollarium, quod ordinatae aequales abscissis. Si eveniat ipsam abscissam esse latus rectum, imo generalius hoc.

aeq. p^2y^2 cum hac: v^2 aeq. py. Et v^2y^4 aeq. p^6 cum hac: vy^2 aeq. p^3. Ex his autem definitionem Geometricam eandemque sequentem Curva Analytica simplex est in qua etc. vid. prop.

Curva Analytica rationalis est, cujus axis ita sumi potest, ut sit ordinata rationalis ad abscissam et parametros id est ut abscissa et parametris in numeris datis, etiam ordinata in numeris haberi possit. Talis est Parabola $A1C2C3C$, cujus vertex A, si pro axe sumatur, non AB, quae vulgo dicitur axis Parabolae, sed AT, quae parabolam in vertice tangit, ita ut abscissae AG sint v et ordinatae GC sint y latus rectum vero p. Ex natura parabolae est py aeq. v^2. ut supra explicuimus, ergo $y \sqcap \frac{v^2}{p}$. Erit scilicet ordinata y aequalis quadrato ab abscissa v, divisa per parametrum p. Si curva $(1C)2C(3C)$ sit Hyperbola, et alterutra ex Asymptotis pro axe ordinatarum sumatur, ordinata semper est rationalis. Nam ut supra diximus, y est $\frac{p^2}{v}$. et v est $\frac{p^2}{y}$. In circulo et Ellipsi impossibile est axem ita assumi ut ordinatae fiant rationales. Circulus itaque et Ellipsis ex Curvarum rationalium numero non sunt. Quoniam tamen curvae rationales magnas habent prae caeteris commoditates, ideo tandem Circulum reduxi ad figuram rationalem aequipollentem, quod etsi infinitis praestare possim, modis elegi tamen simpliciorem cujus aequatio est: $\frac{2py^2}{p^2+y^2}$ aeq. v unde ea mihi nata est Quadratura

1–4 aeq. p^3. | Ex ... prop. *erg.* | *(1)* Unum subjicio, Omnes curvas analyticas simplices directas aut reciprocas una generali aeqvatione servata homogeneorum lege enuntiari posse, hoc modo: v^ω aeq. $\mathrm{p}^{\omega-\mathrm{e}}\mathrm{y}^\mathrm{e}$ ubi literae e et ω. significant numeros exponentes potestatum, et illud tantum notandum est additionem exponentis significare multiplicationem, per potentiam cuius est exponens; at subtractionem significare divisionem, sit ω, 3. et e, 2. fiet: $\mathrm{p}^2\mathrm{v}^{3-2}$ aeq. y^3 seu $\mathrm{p}^2\mathrm{v}$ aeq v^3 ad parabolam Cubicam Sin sit ω, 2. et e, 3. fiet $\mathrm{p}^3\mathrm{v}^{2-3}$ aeq y^2 seu $\mathrm{p}^3\mathrm{v}^{-1}$ aeq y^2. est autem $\mathrm{p}^3\mathrm{v}^{-1}$ idem qvod $\frac{\mathrm{p}^3}{\mathrm{v}}$. qvia exponens negativus significat divisionem, ergo fiet: $\frac{\mathrm{p}^3}{\mathrm{v}}$ aeq y^2. vel p^3 aeq $\mathrm{y}^2\mathrm{v}$ qvae aeqvatio est ad Hyperbolam cubicam. Eodem modo eadem formula generalis ad caeteras applicari potest. Formulae autem huiusmodi generales, egregie serviunt ad generalia theoremata invenienda; magnam enim characteristica vim habet ad juvandam mentem, quoties commoda et ex ipsis rerum definitionibus sumta est | *Daneben am Rand:* fit v aeq. 2 et e aeq. 1. ex generali fiet v^2 aeq. $\mathrm{p}^{2-1}\mathrm{y}^1$ seu v^2 aeq. py. qvae est aeqvatio ad curvam parabolicam 1C2C3C, posita v aeq 1B1C, et y aeq. A1B. et p. constante recta, vel parametro Sin curva (1C)2C(3C) sit Hyperbola ⟨cu⟩bica, et sit 1 *nicht gestr.* | *(2)* Curva *L* 17 cuius ... v *erg. L*

3 prop.: s. o. S. 221 Z. 4–7.

Arithmetica, quae infra exponetur. De caetero ex aequationis forma statim agnosci potest an curva secundum axem qui assumtus est aut ejus conjugatum, sit rationalis nimirum si aequatio ad eam formam reduci potest, ut alterutra indeterminatarum, y vel v. ad nullam ascendat potestatem; unde valor ejus pure inveniri potest, et sine ulla radicum extractione. Tales sunt omnes aequationes in Tabula curvarum simplicium, quas lineis inclusas vides, item quae ad eas depressione reduci possunt.

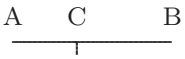
Caeterum spero Geometras nova quaedam nomina a me introducta, non improbaturos; neque enim alia quod sciam, extabant; et notiones novas, aut nova quadam ratione universalius quam ante conceptas sine nominibus explicare, definitionibus perpetuo substitutis, taediosum nimis erat futurum.

Denique quoniam scio excellentes quosdam Geometras dubitare, an Parabolae altiores, sint verae curvae reales ac Geometricae, motu continuo descriptibiles, ideo excogitavi instrumentum unicum, cujus partibus simili tantum ratione multiplicatis, omnes Paraboloeides rationales omnium graduum, cubica, quadrato-quadratica; altioresque, in quibus scilicet ordinatae sint in triplicata aut quadruplicata, aut quintuplicata, ratione abscissarum; possint in plano uno tractu delineari, quod et foret Organi Mesolabi genus a Cartesiano diversi, serviens ad inveniendas medias proportionales quotcunque; sed quoniam id nonnihil ab hoc loco alienum videri posset et aliunde mihi generatim constat omnes omnium graduum curvas analyticas etiam Geometricas sive uno tractu descriptibiles esse, demonstrationi supersedendum putavi, quam plerique supervacuam judicarent. Praesertim cum vis quadraturae Circuli Arithmeticae quae parabolarum quadratura nititur; subsistat, etsi parabolae altiores tantum imaginariae essent, nec nisi per puncta non vero continuo tractu describi possent. Nam in earum locum si opus videatur, utar polygonis vel spatiis gradiformibus per omnia puncta numero finita inventa transeuntibus semperque ostendam methodo prop. 6 et 7. errorem quadraturae circuli Arithmeticae, quae a me affertur; quovis errore minorem, adeoque nullum esse.

18 qvoniam *(1)* pleriqve alii non dubitant qvin Curvae omnes *(2)* generaliter ea res ab instituto nostro aliena *(3)* id paulo prolixius est, qvam ut hinc commode inseri possit; et pleriqve alii non dubitant qvin omnes omnium graduum Parabolae, verae sint curvae, idqve multis aliis argumentis evinci potest; cum generaliter certum sit, omnes curvas analyticas esse Geometricas, unoqve tractu descriptibiles *(4)* id *L*

17 Cartesiano: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 67–69.

Nunc ad Curvarum Analyticarum simplicium tangentes generaliter exhibendas progredior, ut deinde ad quadraturas mea methodo enitar. Tangentes curvarum analyticarum simplicium omnium dudum apud Geometras habentur, et ex calculo nullo negotio sequuntur, sive methodum Fermatii de maximis et minimis, sive methodum tangentium Cartesii sequaris; certum est enim utramque esse probam, et generalem si quis eas sciat recte tractare, prorsus enim idem praestant; brevior est et simplicior Fermatiana, sed subtilior Cartesiana, illa ex indivisibilibus sive infinite parvis, haec ex aequationibus ducta fluxit. Ex utraque aut alterutra egregia quaedam compendia fluxere ab excellentibus Geometris publicata ex quibus eminent Methodus Huddii de maximis et minimis, et Methodus tangentium Slusii, quae velut ab hoc loco aliena non exscribo. Porro Clarissimus Geometra Michael Angelus Riccius, eleganti inprimis ratione Geometricam tangentium Curvarum, quibus opus habeo demonstrationem exhibuit, usus Theoremate, quod et⟨iam⟩ postea diversa ratione demonstratum publicavit vir in his studiis excellens Renatus Franciscus Slusius. Cum vero meum non sit aliena prolixe describere, aut cum nihil melius habeam, transferendo corrumpere satis erit ad eorum scripta remittere lectorem, qui theorematis sequentis demonstrationem postulabit.

6 praestant; | qvanqvam nesciam an id satis initio exploratum habuerit ipse Fermatius, *erg. u. gestr.* | brevior *L* 6 sed *(1)* profundior *(2)* subtilior *L* 7 sive ... parvis *erg. L* 14 Slusius, *(1)* et vero Slusii demonstratio a reliqvo eius tractatu facile avelli potest, Ricciana sine reliqvis transscribi neqvit, ideo Lemmatis qvidem probationem ex Slusio sumsi, reliqvam tangentium demonstrationem ex Riccio exhibui, qvod bona utriusqve venia futurum spero. Verba Slusii haec sunt; Miscellaneorum cap. 4. *(2)* Theorema autem hoc est: Si magnitudo secetur in duas partes in ratione numeri ad numerum, productum ex illis partium dignitatibus, qvarum exponentes sunt eidem numeri, fore omnium maximum productorum ex iisdem dignitatibus duarum portionum eandem magnitudinem constituentium. ut si recta AB, secetur in puncto C in duas partes qvae sint ut 2. ad 3. 

(3) Cum *L*

4 Fermatii: Fermats Methode war Leibniz zugänglich durch die Darstellungen in P. Herigone, *Supplementum cursus mathematici*, 1642, S. 59–69, und in Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255, sowie durch die Diskussion in R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 300–338 (*DO* I S. 486 bis 493, *DO* II S. 1–13, 103–114, 154–158, 122–134, 169–178). 4 Cartesii: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–49. 9 Huddii: J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. 10 Slusii: vgl. R.-Fr. de Sluses Tangentenbrief in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VIII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059). 12 exhibuit: M. Ricci, *Exercitatio geometrica*, 1668. — Theoremate: *a. a. O.*, theorema tertium, S. 7 f. 13 publicavit: R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 116 f.

[*Erster Ansatz, nicht gestrichen*]

Propositio Decima tertia

In Curva Analytica simplici, portio axis inter occursum tangentis et ordinatam intercepta, $1B1\theta$ erit ad abscissam, $A1B$ ut exponens dignitatis ordinatarum ad exponentem dignitatis abscissarum. Si exponens dignitatis secundum quem multiplicata est ratio ordinatarum v, sit ad exponentem dignitatis secundum quem multiplicata est ratio abscissarum y ut numerus ω ad numerum e seu si aequatio sit

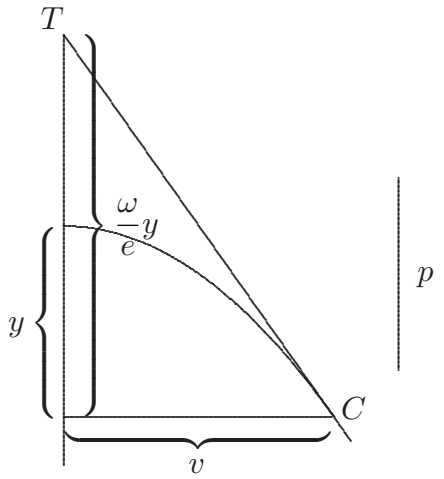
2 *(1)* Propositio Decima Tertia
In Curva Analytica *(a)* | simplice, seu *erg.* | cuius ordinatarum ad abscissas relatio hac *(b)* simplice *(aa)* si ratio ordinatarum sit multiplicata rationis abscissarum secundum numerum $\frac{z-e}{z-\omega}$ portio axis inter tangentem *(bb)* si exponens dignitatis secundum qvem multiplicata est ratio ordinatarum, sit ad exponentem dignitatis secundum qvem multiplicata est ratio abscissarum ut numerus $z-\omega$ ad numerum $z-e$ | et ab ordinata versus verticem sumatur recta qvae sit ad abscissam, ut $z-\omega$ ad $z-e$. perveniet unde recta ad punctum curvae ex qvo ordinata demissa est ducta, curvam tanget *erg.* | tunc portio axis inter tangentem curvae et ordinatam, erit ad abscissam; seu portionem curvae inter verticem et ordinatam, etiam ut $z-\omega$ ad $z-e$. | *Dazu am Rand*: $p^{\omega-e}v^{z-\omega} \sqcap y^{z-e}$ |

Huius theorematis demonstratio ex traditis a Riccio Exercitatione Geometrica de Maximis et minimis sumi potest. Qvoniam vero ab eo non ita generaliter concepta, sed in duos casus Paraboloeidum scilicet vel Directarum, et Hyperboloeidum vel Reciprocarum, distributa est, explicanda tantum est enuntiatio nostra, ut eius generalitas appareat.

Nimirum diximus | (in definitionibus) *erg.* | omnis Curvae analyticae simplicis naturam hac aeqvatione explicari posse (I) $p^{\omega}v^{e-\omega}$ aeq. y^{ω}, unde posita v ordinata, | ut $\overline{1v}$ seu 1B1C, vel $\overline{2v}$ seu 2B2C etc et *erg.* | y abscissa, | ut A1B, seu $\overline{1y}$. A2B, seu $\overline{2y}$ *erg.* | erit (II) $\overline{1v}$ aeq $\frac{\overline{1y}^{\frac{\omega}{e-\omega}}}{p^{\frac{\omega}{e-\omega}}}$, et (III) $\overline{2v}$ aeq $\frac{\overline{2y}^{\frac{\omega}{e-\omega}}}{p^{\frac{\omega}{e-\omega}}}$. Ergo erit (IV) $\overline{1v}$ ad $\overline{2v}$, ut $\overline{1y}^{\frac{\omega}{e-\omega}}$ ad $\overline{2y}^{\frac{\omega}{e-\omega}}$ id est erunt ordinatae $\overline{1v}$, $\overline{2v}$ inter se, in ratione multiplicata abscissarum secundum numerum exponentem $\frac{\omega}{e-\omega}$. Jam ergo Tangens ad curvam in puncto 1C. ita ducetur, idem enim de aliis omnibus fieri intelligemus; Ex puncto 1C curvae 1C2C3C. in Axem A1B2B3B ducatur Ordinata 1B1C, et ex puncto 1B, versus punctum A sumatur recta 1B1T. qvae sit ad rectam A1B ut $e-\omega$ est *(2)* Propositio *L* 3–5 portio ... ordinatam | intercepta, A1θ *ändert Hrsg.* | erit ... abscissarum. *erg. L*

17 traditis: s. Erl. zu S. 230 Z. 12.

v^ω aeq. $y^e p^{\omega-e}$ posito parametro p. et ab ordinata versus verticem sumatur recta quae sit ad abscissam etiam ut ω ad e[,] ea recta perveniet ad punctum, quod curvae puncto ad ordinatam eandem pertinenti curvae jungens recta, curvam tanget.



[*Fig. 7*]

5 S c h o l i u m

Hoc theorema ex nota methodo de Maximis et Minimis pendet, et demonstratio ejus ex doctissima Riccii exercitatione peti potest; sed quoniam Riccius in duos casus partitus est propositionem, unum Paraboloeidum seu directarum, alterum Hyperboloeidum seu reciprocarum, ego vero una regula comprehendi posse putavi, ideo explicatione quadam
10 opus habet enuntiatio.

Nimirum aequatio generalis Curvae Analyticae simplicis naturam explicans sit, ut supra jam tetigi: v^ω aeq. $y^e p^{\omega-e}$; posito p. parametro, y seu AB abscissa, et v, seu BC, ordinata, ut ante. Patet exponentem ordinatarum v, esse ω, at abscissarum seu y, exponentem esse e. Sit jam punctum curvae $1C$. Ergo a puncto $1B$, seu ab ordinata

4 *Darüber:* $\frac{y}{t} \sqcap \frac{e}{\omega}$

5 S c h o l i u m *erg. L*

7 exercitatione: s. Erl. zu S. 230 Z. 12.

$1B1C$. sumatur in axe, versus A, recta $1B\theta$, quae sit ad $A1B$ abscissam, ut ω ad e. et juncta $\theta 1C$ curvam tanget. Exemplis opus est. Sit parabola cubica, ejus aequatio v^3 aeq. y^1p^2. patet esse ω aeq. 3. et e aeq. 1. $\omega - e \sqcap 2$ eritque $1B1\theta$ ad $A1B$, ut 3 ad 1. Si contra fuisset vp^2 aeq. y^3, vel v aeq. $\frac{y^3}{p^2}$ vel v^1 aeq. y^3p^{-2}. quoniam subtractio exponentis notat divisionem per quantitatem exponente affectam; fuisset ω aeq. 1. et e aeq. 3 [et $\omega - e$ aeq. -2. (adeoque ω minor quam e.)] adeoque erit $1B1\theta$ ad $A1B$ ut 1 ad 3. Ut ⟨et⟩ supra dixi: Quod et in eadem figura apparebit si axem prioris singulum sumas, vertasque ordi⟨na⟩tam in abscissam ⟨—⟩ tunc enim appellando contra quam ante AB ⟨aeq.⟩ y. et GC aeq. v. ⟨— —⟩ $1G1T$ ad $A1G$ ut 1 ad 3. Si aequatio sit v^3 aeq. y^2p. sive si curva sit parabola semicubicalis erit ω aeq. 3. et e aeq. 2. et $\omega - e$ aeq. 1. adeoque erit $1B1\theta$ ad $A1B$ ut 3 ad 2. Nec in reciprocis ulla est differentia, nisi quod in illis exponentes dignitatum fient aliquando numeri negativi quod ita patet. Sit aliqua ex Hyperbolarum specie, verbi gratia omnium prima nempe Apolloniana sive Conica; curva scilicet $(1C)2C(3C)$ cujus Centrum A. asymptoti AB, AG. $A1B$ sit y ordinata; $1B(1C)$ sit v abscissa et potentia Hyperbolae sit quadratum a p. erit rectangulum sub $A1B$, et $1B1C$, aequale huic quadrato seu yv aeq. p^2 et ut habeatur ab uno latere (quemadmodum praescribit aequatio generalis, v^ω aeq. $y^ep^{\omega-e}$) fiat v^1 aeq. $\frac{p^2}{y^1}$ vel v^1 aeq. $y^{-1}p^2$ quoniam ut aliquoties dixi exponens negativus vel subtractus, notat divisionem quantitatis exponente affectae. Ergo erit ω aeq. 1. et $e \sqcap -1$ [et $-e$ erit 1. et $\omega - e$ erit 2] adeoque ut etiam $1B(1\theta)$ erit ad $A1B$, ut ω ad 1. id est ut 1. ad -1. id est $1B1\theta$ erit quidem aequalis ipsi $1BA$, sed sumetur in contrariam partem; id est non ab $1B$, versus A verticem, sed contra. Quod aliunde ex nota Hyperbolae proprietate constat, si $(1\theta)(1C)$ sit tangens. In quo quidem regula nostra non fallit; ea enim dixit quidem 1θ debere ab $1B$. sumi versus A, sed ita ut monstrat ratio ω ad e, sed si ratio illa exhibent contraria signa, ipsae progressus secundum signum minus, in effectu regressus erit. Quemadmodum additio quantitatum negativarum seu ut quidam vocant radicum falsarum, subtractio est.

1 recta Aθ *L ändert Hrsg.* 4 f. qvoniam ... affectam; *erg. L* 7–9 ut ... ad 3 *erg. L* 22 f. qvod ... tangens *erg. L* 25 erit *(1)* qvemadmodum eum qvi plus debet qvam habet, bona habere, et societatem contrahere, et haeredem facere posse dicent jureconsulti, tametsi is qvi minus nihilo habet si omnium bonorum societatem cum aliqvo ineat, bona sua conferendo non o *(2)* qvemadmodum *L*

6–20 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz selbst.

Quae loquendi ratio nunc apud Analyticos recepta, id habet commoditatis, ut regularum numerum, memoriaeque onus minuat, ita enim una formula multos casus complecti licet. Si Curva esset Hyperbola Cubica et aequatio esset v^2y aeq. p^3. vel v^2 aeq. $\frac{p^3}{y^1}$, vel v^2 aeq. p^3y^{-1}, foret $1B(1\theta)$ ad $A1B$, ut 2 ad -1. Id est foret illa hujus dupla sed etiam non ab $1B$ versus A sed in contrariam partem sumta; si fuisset aequatio ad eandem Hyperbolam Cubicam, (sed axium conjugatorum curvaeque situ permutato) vy^2 aeq. p^3. fuisset $1B(1\theta)$ dimidia ipsius $A1B$. et hos casus sufficere arbitror ad caeteros omnes Curvarum analyticarum simplicium, ope regulae praescriptae investigandos.

Propositio Decima Quarta

Si figura generans sit Analytica simplex, etiam figura per resectas a tangentibus modo supra dicto ex ea generata erit analytica simplex, ejusdem speciei, et quidem ordinatas habens priori proportionales, respondentes respondentibus prioris, in ratione numeri ad numerum, ut $\omega - e$ est ad ω, eadem quae in praecedenti literarum significatione seu positis ordinatis v, abscissis y. et aequatione curvae, v^ω aeq. $y^e p^{\omega-e}$ id est in figuris directis ut differentia, in reciprocis ut summa, exponentium ordinatarum et abscissarum; ad exponentem ordinatarum.

Demonstratio:

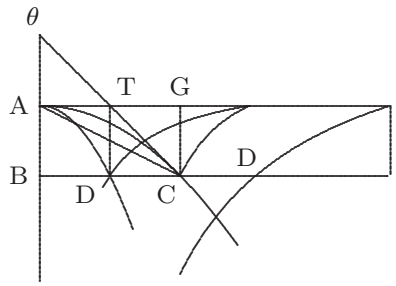
Artic. I. Si curva $1C2C3C$ sit analytica simplex, cujus axis AB, et ex axe conjugato rectae AT per tangentes CT resecentur; hae resectae sunt eaedem quae ordinatae figurae segmentorum, translatae scilicet in ordinatas figurae propositae BC si opus est productas, ut constat ex figurae segmentorum constructione de qua supra prop. 7. 8.

Artic. II. Tantum ergo ostendendum est has rectas AT, ipsis BC respondentibus eo modo esse proportionales, quo propositio enuntiat. Id vero manifestum est. Nam ob Triangula $1\theta A1T$, $1\theta 1B1C$, similia erit $A1T$ ad $1B1C$, ut $1\theta A$ ad $1\theta 1B$. Est autem $1\theta A$ idem quod $1\theta 1B - A1B$. Est autem per praecedentem $1\theta 1B$ ad $A1B$ ut ω ad e. Ergo erit $1\theta 1B - A1B$ ad $1\theta 1B$, ut $\omega - e$ ad ω, adeoque et $A1T$ vel (per artic. I.) $1B1D$ ad $1B1C$. erit ut $\omega - e$ ad ω. Quod ostendere propositum erat.

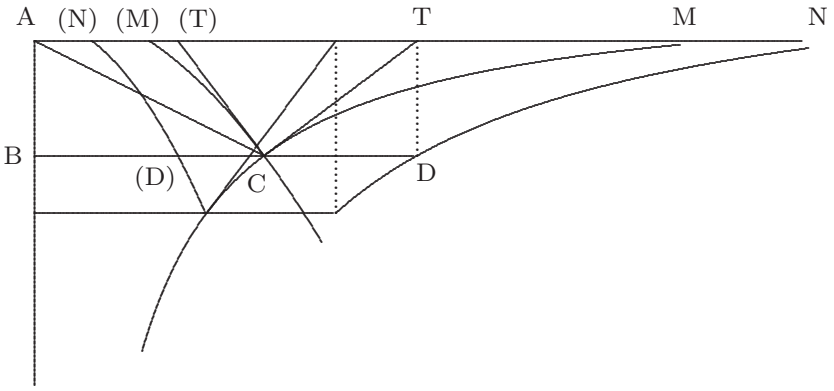
8 f. investigandos. *(1)* Definitio *(2)* Propositio *L* 14–16 seu ... ordinatarum *erg. L*

Eadem ratiocinatio est in casibus omnibus, tantum res docebit tunc cum ω est minor

1 omnibus, *(1)* Sed, qvia figura eos non simul iisdem lineis complecti potest, reliqvos majoris perspicuitatis causa separatim perseqvemur; sumto nimirum *(2)* T r e s s u n t c a s u s , unus qvo tangens occurrit axi, ultra verticem, ut in 1θ. ita ut vertex A, sit inter ordinatam 1B et tangentis occursum 1θ. et huic p r i m o : huic praecedens ratiocinatio manifeste accommodata est; alter qvo occursus tangentis, ut 1T, cadit intra verticem A, et 1G occursum ordinatae 1C1G et tunc qvaeritur recta $A1\theta$ tertius qvo occursus ordinatae ut 1B cadit inter A verticem, et (1θ) occursum tangentis et tunc qvaeritur recta A(1T) S e c u n d u m ita probabimus, 1T1G intervallum occursuum tangentis et ordinatae, est ad A1G abscissam seu intervallum occursus ordinatae a vertice, ut ω ad e, per praeced. ergo $\underset{e}{A1G} - \underset{\omega}{1G1T}$ sive A1T, est ad $\underset{\omega}{1T1G}$ ut $e - \omega$ ad ω. jam ut est A1T ad 1T1G, ita est $A1\theta$ ad 1G1C. (ob Triangula similia $1TA1\theta$. 1T1G1C) ergo etiam $A1\theta$ erit ad 1G1C, ut $e - \omega$ ad ω, sive ut minus, $\overline{\omega - e}$ ad ω, qvod apud Analyticos significat esse qvidem ut $\omega - e$ ad ω, qvemadmodum propositio asserit, sed sumendam esse in contrariam, qvoniam e illo casu major qvam ω, adeoqve $A1\theta$ cadere trans lineam AG, cum contra 1G1C cadat cis ipsam. Tertium casum sic conficiemus:



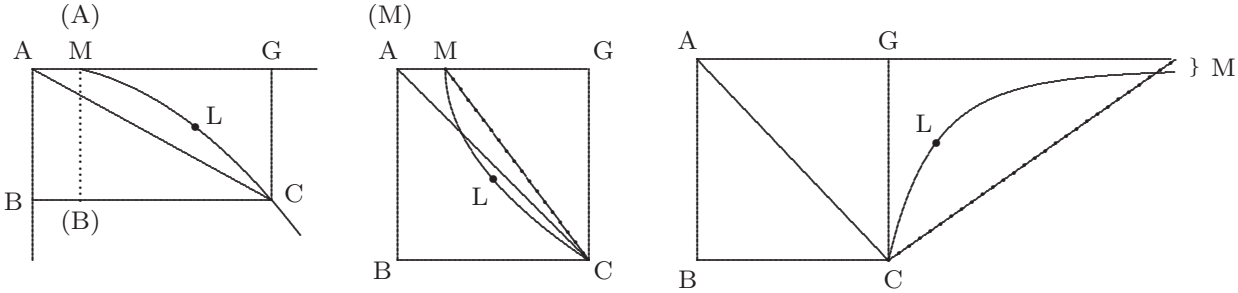
aeqvatio est: $v^{\omega} \sqcap y^{e} p^{\omega - e}$. qvaeritur $\int \overline{v}$. seu $v \sqcap y^{\frac{e}{\omega}}, p^{1-\frac{e}{\omega}}$ $\int v \sqcap ABCA$. $ABCA \sqcap \dagger ACA + \frac{ABCG}{2}$



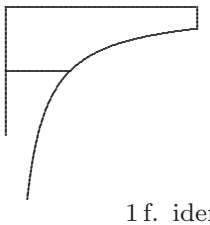
$AB \sqcap y$. $BD \sqcap v$ $\int v \sqcap MABCM$ $NABDN \sqcap 2MACM$ rursus BD est ad BC :: $\omega - e$ ad ω. ergo $\frac{NABDN \sqcap \int \overline{BD}}{\int v \sqcap MABCM} \sqcap \frac{\omega - e}{\omega}$. Ergo $\frac{2MACM}{MABCM} \sqcap \frac{\omega - e}{\omega}$ jam $MACM + ABC \sqcap MABCM$ et $MACM \sqcap$ $\int \overline{BC}$

quam e, idem fore ac si diceres esse resectam $A1\theta$ ad ordinatam, ut $e-\omega$ [ad ω], sed quoniam deberet esse minus, $\overline{e-\omega}$, seu $\omega-e$, cadere eam in alteram axis partem $A1G$ quam in qua sunt ordinatae $1G1C$; denique cum e est quantitas negativa seu numerus nihilo minus ut si curva sit $(1C)2C(3C)$ in Reciprocis, tunc posito e valere, $-\varepsilon$ erit resecta $A(T)$ ad ordinatam, $1B(1C)$ ut $\omega+\varepsilon$ ad ω. Unde eo casu resectae fiunt majores ordinatis. Sed haec cuilibet numeros tantum literis substituenti statim patebunt, nobis more analytico regulam generalem condere satis fuit.

MABCM − ABC ergo fiet: $\dfrac{\text{2MABCM} - \text{2ABC}}{\text{MABCM}} \sqcap \dfrac{\omega - \text{e}}{\omega} \sqcap 1 - \dfrac{\text{e}}{\omega}$ seu $\underset{1}{2} - \dfrac{\text{2ABC}}{\text{MABCM}} \sqcap 1 - \dfrac{\text{e}}{\omega}$. Ergo $1 + \dfrac{\text{e}}{\omega} \sqcap \dfrac{\text{2ABC}}{\text{MABCM}}$. seu $\dfrac{\text{2ABC} - \text{MABCM}}{\text{MABCM}} \sqcap \dfrac{\text{e}}{\omega}$



Figuram Analyticam simplicem qvamlibet Quadrare.

Sit portio qvaelibet, ut 1C1B2B2C1C portione directricis (sive axis ordinatarum) 1B2B, duabus ordinatis 1D1B2B2D1D aeq. 2A1CL2C. per prop. 7. qvia BD aeq. AT. 1D1B2B2D1D : 1C1B2B2CL1C :: $\omega - \text{e} : \omega$, qvia singulae ordinatae ad singulas nempe 1B1D ad 1B1C, etc ut $\omega - \text{e}$ ad ω per prop. praeced. Ergo 2A1CL2C : 1C1B2B2CL1C :: $\omega - \text{e} : \omega$ A1CL2C aeq. diff inter 1C1B2B2C1C + A1B1C, et A2B2C. Ergo diff inter 1C1B2B2C1C + A1B1C, et A2B2C,, ad 1C1B2B2C :: $\omega - \text{e} : \omega$ seu diff inter $1 + \dfrac{\text{A1B1C}}{\text{1C1B2B2C1C}}$ et $\dfrac{\text{A2B2C}}{\text{1C1B2B21C}}$ aeq. $1 - \dfrac{\text{e}}{\omega}$ | *Daneben:*  $\text{x}^2\text{y} \sqcap \text{p}^3$ $\text{xy} \sqcap \dfrac{\text{p}^3}{\text{x}}$ $\text{y} \sqcap \dfrac{\text{p}^3}{\text{x}^2}$ $\text{x} \sqcap \text{p}\sqrt{\dfrac{\text{p}}{\text{y}}}$ et

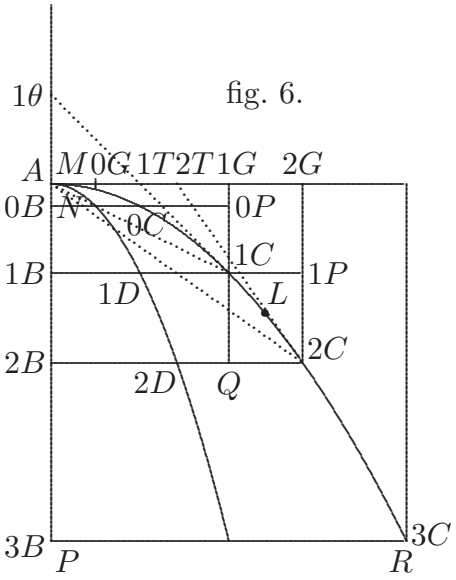
$\text{xy} \sqcap \text{p}\sqrt{\text{py}}$ | *(3)* tantum L

1 f. idem ... $\omega - \text{e}$, *erg.* L

[*Zweiter Ansatz*]

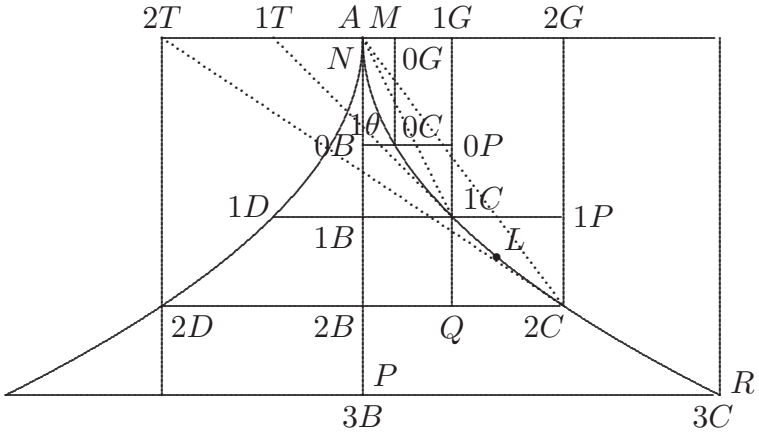
Necesse est ut per singulos procedam casus particulares, sed methodo quae possit esse universalis:

fig. 6.



[*Fig. 8*]

fig. 7.



[*Fig. 9*]

4–238,1 *Neben Fig. 8:* $1\theta A \sqcap A1B$

Unter Fig. 10: x^2

$x \sqcap y$

$x \sqcap \dfrac{1}{y} \qquad xy \sqcap 1$

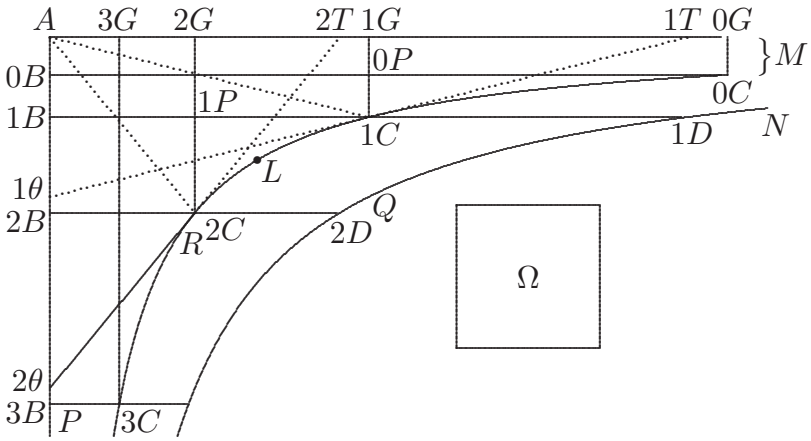
Am Rand: $\left.\begin{matrix}1C1B2B\\1B2BQ\end{matrix}\right\} \sqcap B \quad \left.\begin{matrix}1C1G2G\\1P2G1G\end{matrix}\right\} \sqcap G \quad \left.\begin{matrix}1P1CQ\\1CQ1C\end{matrix}\right\} \sqcap S$

$1C1P2C1C \sqcap P \qquad P + Q \sqcap S$

$\ldots\ldots Q \ldots\ldots\ldots\ldots \sqcap Q$

4–238,1 *In den Figuren Punktbezeichnung* P *gestr. L, erg. Hrsg.*

fig. 8.



[*Fig. 10*]

Propositio Decima Tertia

In Curva Analytica simplici portio axis inter tangentis et ordinatae occursus intercepta, est ad abscissam curvae, ut exponens dignitatum ab ordinatis quem imposterum vocabimus ω, ad exponentem dignitatum ipsis proportionalium ab abscissis quem appellabimus e. D i g n i t a t e m autem vocant quantitatem ipsam aut ejus potentiam. Porro in directis tangens cadit ab ordinata versus verticem, in reciproca vero in partes contrarias.

$$\underbrace{B+Q}_{R} : \underbrace{G+\overbrace{P}^{S-Q}}_{C} :: \omega : e.$$

$B+Q : G+P :: \omega : e.$ $eB+eQ \sqcap \omega G+\omega S-\omega Q.$ et $\dfrac{\omega G+\omega S}{\omega+e} - eB \sqcap Q.$ vel $eB+eQ \sqcap G\omega+Q\omega$ et $eB-G\omega \sqcap Q\omega-eQ.$ seu $\dfrac{eB-G\omega}{\omega-e} \sqcap Q.$

4 NB. definiendus exponens ubi explicandum quod exponens sit 1. Item explicandus noster notandi modus, incipiendo a curva.

4 abscissam, *(1)* ut in aeqvatione | simplici *erg.* | relationem ad axem explicante, a fracti *(2)* curvae *L*
7 f. porro ... contrarias *erg. L*

Scholium.

Hujus theorematis demonstratio ex doctissima Riccii exercitatione de Maximis et minimis peti potest. Nobis id explicare hoc loco suffecerit:

Sit curva analytica simplex $1C2C3C$. Axis si opus est productus AB, cui occurrunt tangentes $C\theta$ in punctis θ, ajo ipsam $1B1\theta$ esse ad ipsam $1BA$, ut est exponens dignitatis ordinatarum ad exponentem dignitatis abscissarum. Nempe si fig. [6.] curva sit parabola et quadrata ab ordinatis BC sint ut abscissae AB, exponens ordinatarum erit 2. abscissarum 1. adeoque $1B1\theta$ ipsius $A1B$ dupla. In parabola Cubica erit tripla in quadrato-quadratica quadrupla; in Semicubicali, ubi Cubi ordinatarum sunt ut abscissarum quadrata, erit $1B1\theta$, ad $1BA$ ut 3 ad 2.

Si easdem figuras inverso consideremus modo, et in fig. [7.] sumamus pro axe, axem praecedentis conjugatum, erunt in Parabola ordinatae, in subduplicata ratione abscissarum, seu ordinatae BC erunt ut abscissarum AB quadrata; unde exponentes earum erunt ut 1. ad 2. adeoque erit $1B1\theta$ dimidia ipsius $A1B$, et in Parabola Cubica, triens, in semi-cubicali ut 2 ad 3.

Denique in fig. [8.] Si figura sit ex reciprocarum numero, idem obtinebit, et in hoc erit discrimen, quod punctum 1θ non a puncto $1B$ versus A verticem, sed in contrariam partem sumetur quod ex ipsa harum Curvarum constitutione patet. Proportio autem easdem servabit leges, ut in hyperbola simplici cujus centrum A, asymptoti AB. AG, ubi ordinatae sunt reciproce in ratione abscissarum, exponentes erunt ut 1. ad 1. seu aequales, adeoque $A1B$ aeq. $1B1\theta$. Si esset Hyperbola proxime altior, forent quadrata ordinatarum ut abscissae, vel (: curva inverse sumta :) quadrata abscissarum ut ordinatae, priore casu $1B1\theta$ erit dupla, posteriore dimidia ipsius $A1B$.

Propositio Decimaquarta

Si figura generans sit analytica simplex; etiam figura resectarum ex ea generata erit analytica simplex ejusdem speciei, ordinatas habens quae sint ordinatis prioris proportionales ut numerus ad numerum scilicet ut differentia in directis, summa

16 (de qua supra . . .)

18 qvod . . . patet *erg. L* 27 proportionales | et summam ordinatarum summae seu aream areae proportionale⟨m⟩ *erg. u. gestr.* | ut *L*

2 exercitatione: s. Erl. zu S. 230 Z. 12.

in reciprocis; exponentium dignitates quas vocabimus ω et e ordinatae et abscissae, est ad exponentem dignitates ordinatae sive ut $\omega - e$ vel $-\omega + e$ vel $\omega + e$ est ad ω.

In fig. [6.] vel [7.] vel [8.] generantis figurae curva $1C2C$, figurae resectarum $1D2D$. ajo perpetuo esse $1B1D$ ordinatam ad curvam figurae resectarum, ad $1B1C$, respondentem ordinatam figurae generantis, ut propositio enuntiat. Patet ex defin. figurae resectarum, ipsam $1B1D$ esse aequalem ipsi $A1T$. et quamlibet BD cuilibet AT, suffecerit ergo probari quamlibet AT, esse ad respondentem BD, nempe $A1T$, ad $1B1C$, ut dictum est. Hoc ita patet: triangula $1\theta A1T$ et $1\theta 1B1C$, similia sunt, et $A1T$ ad $1B1C$, ut $1\theta A$, ad $1\theta 1B$. Est autem in fig. [6.] vel [7.] seu in directis, $1\theta A$, differentia inter $1\theta 1B$ et $A1B$, quae (per prop. praeced.) sunt inter se ut exponens ordinatarum quem vocabimus ω, ad exponentem abscissarum quem vocabimus e, ergo $1\theta A$ erit ad $1\theta 1B$, ut differentia inter ω et e. id est fig. [6.] ut $\omega - e$, fig. [7.] ut $-\omega + e$ ad ω. In Reciprocis seu fig. [8.] ipsa $1\theta A$ est summa $1\theta 1B$ et $A1B$ ergo erit ad $1\theta 1B$, ut summa ex ω et e, ad ω. Quod asserebatur.

Corollar:

Iisdem positis: summa quoque resectarum, seu area figurae resectarum, figurae generantis aream seu ordinatarum ejus summam, eodem modo erit. Scilicet figura $1D1B$ $2B2D1D$ erit ad figuram $1C1B2B2C1C$ ut diff. vel summa numerorum ω, e, ad ω, quia enim singulae respondentes eo se habent modo seu sunt proportionales, ut propositio ostendit, summae eodem modo se habebunt; summae inquam linearum, id est areae, ex methodo indivisibilium, ad formam prop. 6. severe demonstrata. Unde patet autem re in summam collecta, incipiendo a vertice fore $A2B2D1D1N$ ad $A2B2C1CM$

---

2 *Darunter:* (+ Id statim infra propositionem collocandum, et applicandum ad figur⟨as —⟩

3–13 *Am Rand:* Prop. XV. In figura Analytica simplice duplum Trilineum sub arcu curvae et duabus rectis eius extrema vertici jungentibus. est ad qvadrilineum eodem arcu duabus ordinatis, et ex axe comprehensum, ut eodem modo qvem praecedenti propositione expressimus id est

ut $+\omega - \mathrm{e}$ ad ω. *erg. u. gestr. L*
$-\omega + \mathrm{e}$
$+\omega + \mathrm{e}$

14–241,15 *Reihenfolge von Korollar und Scholium nachträglich getauscht L* 20–241,3 unde ... $\omega + \mathrm{e}$ *erg. L*

$$\begin{array}{llll} \text{ut} & \text{fig. [6.]} & \omega - e & \text{ad } \omega. \\ & \text{fig. [7.]} & -\omega + e & \\ & \text{fig. [8.]} & \omega + e & \end{array}$$

S c h o l i u m

In fig. [6.] et [7.] si $1C2C$ sit parabola Conica, $1D2D$, erit alia parabola Conica, ordinatas $1B1D$ habens in fig. [6.] ordinatis prioris, $1B1C$ dimidias, in fig. [7.] aequales. Si curva fuisset parabola Cubica, in fig. [6.] forent BD duae tertiae ipsarum BC. Nam forent cubi ab ipsis BC ut ipsae AB, ergo ω erit 3. et e erit 1. et BD ad BC, ut $\omega - e$, ad ω, seu ut 2 ad 3. Si in fig. [7.] sint inverso modo ordinatae BC, ut cubi ab AB, erit ω, 1. et e, 3. et $e - \omega$ ad ω, erit ut 2 ad 1. adeoque ipsae BD duplae ipsarum BC. In Reciprocis fig. [8.] si sit curva $1C2C$ Hyperbola Conica, cum ordinatae sint proportionales abscissis, reciproce, erunt ω, 1. et e, 1. quorum summa $\omega+e$, erit 2. unde ipsae BD duplae ipsarum BC. Eodem modo Hyperboloeidibus altioribus ratiocinari licet, nam si ordinatae sint reciproce ut quadrata abscissarum erit BD ad suam BC, ut 3 ad 1. Sin quadrata ordinatarum sint reciproce ut abscissae, ergo ut 3 ad 2.

[*Erster Ansatz*]

Propositio decima quinta.

Portio figurae Analyticae simplicis, ordinatis axe et arcu curvae comprehensa, est ad portionem conjugatam, seu ordinatis conjugatis, eodem curvae arcu et axe conjugato contentam, Triangulo sub minore abscissa et ejus ordinata; in directis minutam in reciprocis auctam, ut exponens dignitatum ordinatarum ad exponentem proportionalium ipsis dignitatum ordinatarum conjugatarum, id est abscissarum, id est portio $1C1B2B2C1C$ contenta ordinatis $1B1C$, $2B2C$, axis portione $1B2B$, et arcu curvae $1C2C$, est ad portionem conjugatam, $1C1G2G2C1C$, ordinatis conjugatis $1G1C$, $2G2C$ (: quae abscissis $A1B$, $A2B$ aequales sunt :) axis conjugati portione $1G2G$, et eodem, quo prius arcu curvae, $1C2C$ contentam, ut ω ad e seu ut

26 *Über* ω ad e*:* in fig. [6.] [7.] minutam

9 ad 3. | adeoqve et area spatii 1D1B2B2D1D ad 1C1B2B2C1C erit ut 2 ad 3. *erg. u gestr.* | si *L* 10 BC. | ac proinde et area ex illis conflata, areae conflatae ex his *erg. u gestr.* | In *L* 13–15 Eodem ... ad 2. *erg. L* 20 f. Triangulo ... auctam *erg. L*

exponentes dignitatum secundum quas ipsae BC ordinatae, proportionales sunt ipsis GC vel AB abscissis, directe vel reciproce: Hoc primum demonstrabimus inde a vertice, si punctum $1B$ intelligatur incidere in punctum A. et ajo figuram $A2B2C1CM$ esse ad figuram conjugatam $M2G2C1CM$, ut ω ad e.

Quod ita demonstratur:

5–243,1 demonstratur: *(1)*

figura resectarum est ad A2B2D1D1N Analyticam simplicem ut fig. ... $\left\{\begin{array}{l} \omega - \mathrm{e} \\ \text{vel } \mathrm{e} - \omega \\ \text{vel } \omega + \mathrm{e} \end{array}\right\}$ ad ω per prop. 14. Coroll. seu per prop. 7. dupl. A2C1CMA. id est autem per figurae ... vel ... vel ... ⟨—⟩structionem (dupla) A2C1CM differentia inter (duplam) A2B2C1CM, et (dupl.) Triangulum A2B2D, nempe

generantem fig. ...
A2B2C1CM fig. ...

☉ ☽ ☿

in fig. ... ☉ est $+ ☽ - ☿$
... ☉ est $- ☽ + ☿$
⟨— — —⟩

Ergo fig. ... $+2 ☽ - 2☿$ est ad ☽ ut $+\omega - \mathrm{e}$ ad ω
... $-2 ☽ + 2☿$ $-\omega + \mathrm{e}$
... $+2 ☽ - 2☿$ $\omega + \mathrm{e}$

Omittatur ubiqve ratio aeqvalitatis, seu illinc ☉ ad ☉, hinc ω ad ω fiet

fig. ... $+ ☽ - 2☿$ ad ☽ ut $-\mathrm{e}$ ad ω
... $- ☽ + 2☿$ $+\mathrm{e}$
... $+ ☽ - 2☿$ $+\mathrm{e}$

sive

fig. ... $- ☽ + 2☿$ ad ☽ ut $+\mathrm{e}$ ad ω
... $- ☽ + 2☿$
... $+ ☽ - 2☿$

vel explicando rursus signa ☉. ☽. ☿.

2☿. seu dupl.
☽ Triang. A2B2C

fig. ... $-$ A2B2C1CM $+$ rectang. A2B2C2G
... $-$ A2B2C1CM $+$ rectang. A2B2C2G
... $+$ A2B2C1CM $-$ rectang. A2B2C2G
} id est ubiqve spatium conjugatum M2G2C1CM est

☽
ad A2B2C1CM ut e ad ω.

NB. Nota in casu ultimo memorabilem admisimus paralogismum, nec facile vitatu hoc enim posito foret spatium longitudine infinitum M2G2C1CM ad aliud spatium infinitum A2B2C1CM ab eo non nisi qvantitate finita A2B2C, differens ut numerus ad numerum, adeoqve utrumqve erit finitum. Nam si duae qvantitates, finitam habentes differentiam, sint ut numerus ad numerum seu finitam habeant rationem, ipsa erunt finita. Sed hoc in hyperbola et alterutra semper hyperboloeidum parte scimus esse absur-

In quantitatibus finitis, ne infinita nos turbent[:]

(I) Figura resectarum $1D1B2D1D$ seu per prop. 7, (2)$1CA2C1C$ est ad $1C1B2B$ $2C1C$

$$\begin{array}{lll} \text{ut in fig. [6.] ut} & +\omega - e & \text{ad } \omega. \\ \text{[7.]} & -\omega + e & \\ \text{[8.]} & +\omega + e & \end{array}$$

---

1 *Am Rand, ohne direkten Bezug zum Text, teilweise quer und gegenläufig geschrieben:*

$$\begin{array}{r} 42 \\ 8 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 4 & 1\frac{1}{2} \\ \cancel{11} & \cancel{f}\ 1 + \frac{8}{14} \sqcap \frac{1}{2} + \frac{1}{14} \\ \cancel{7} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

dum. Qvae ergo ratio erroris. Ea vero haec est, qvod ducenda erat recta AM, adeoque omisimus rectangulum AM}MA, cuius basis AM, infinita, altitudo infinite parva, qvodqve in Hyperbola communi exacte facit qvantitatem finitam aeqvalem spatio finito seu differentia A2B2C, qvae proinde definitur; ut in aliis facit qvantitatem plusqvam infinitam; qvin ducendum v. g. x in $\frac{a^3}{x^2}$. posita x infinite parva, fit $\frac{a^3}{x}$. et manet qvantitas $\frac{a^3}{x}$ infinita. itaqve de integro reassumenda ratiocinatio est, et qvidem in *(2)* In *L*

17 $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.*

(II) Dupl. $1CA2C1C$ est

$$\text{fig.}\ \begin{array}{ll} [6.] & \overbrace{+1C1B2B2C1C + \triangledown A1B1C}^{+\,☽}, \quad \overset{-☿}{-\triangledown A2B2C}. \\ [7.]\ \text{dupl.} & -\,☽ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +☿ \\ [8.] & +\,☽ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -☿ \end{array}$$

(III) Ergo per 1.

$$\begin{array}{llll} [6.] & +2\,☽ - 2☿ & \text{ad}\ ☽\ \text{ut} & +\omega - e\ \text{ad}\ \omega \\ [7.] & -2\,☽ + 2☿ & & -\omega + e \\ [8.] & +2\,☽ - 2☿ & & +\omega + e \end{array}$$

et omittendo utrobique rationem aequalitatis, illic ☽ ad ☽, hic ω ad ω fiet:

$$\begin{array}{llll} [6.] & -\,☽ + 2☿ & \text{ad}\ ☽\ \text{ut} & +e\ \text{ad}\ \omega. \\ [7.] & -\,☽ + 2☿ & & +e \\ [8.] & +\,☽ - 2☿ & & +e \end{array}$$

Nam si verbi gratia ab analogia ultima $2\,☽ - 2☿$ ad ☽ ut $+\omega - e$ ad ω, vel ☽ + ☽ $- 2☿$ ad ☽ ut $+\omega - e$ ad ω, auferas illinc ☽ ad ☽, hinc ω ad ω, restabit: + ☽ $- 2☿$ ad ☽ ut $-e$ ad ω, vel in hoc quidem primo casu signa mutand⟨a⟩ $-$ ☽ $+ 2☿$ ad ☽ ut e ad ω. Et ita de reliquis duobus nisi quod in iis non opus mutatione signorum.

(IV) Id est explicando ☽ et ☿ fiet

$$\begin{array}{llll} [6.] & -1C1B2B2C1C & -\ \text{Triang.}\ A1B1C, & +\ \text{bis triang.}\ A2B2C \quad \text{ad}\ \ 1C1B2B2C1C \\ [7.] & - & - & + \\ [8.] & + & + & - \\ & & & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ut}\ e\ \ \text{ad}\ \ \omega. \end{array}$$

(V) Jam

$$\left.\begin{array}{llll} [6.] & -1C1B2B2C1C & +\ \text{triang.}\ A2B2C, \text{ vel rectang. } A2B2CG \\ [7.] & - & + \\ [8.] & + & - \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{facit portionem} \\ \text{conjugatam} \\ 1C1G2G2C1C. \end{array}$$

Artic. VI. Ergo in Artic. IV. substituendo portionem conjugatam pro ejus valore in artic. V. invento fiet

12 $+\omega -$ e ad e *L ändert Hrsg.*

17 ad $1C1B2B2C1C$: Richtig wäre ad $1C1B2B2C1C + \triangledown A1B1C$. Im Folgenden kommen weitere Versehen hinzu; Leibniz bricht den Beweis in S. 245 Z. 6 ab.

[6.]	$+1C1G2G2C1C$	$-$ Triang. $A1B1C$	$+$ semel triang. $A2B2C$	ad	$1C1B2B2C1C$
[7.]		$-$	$+$		
[8.]		$+$	$-$		
				ut e	ad ω

vel

$1C1G2G2C1C$	ad	[6.]	$+1C1B2B2C1C$	$+$ Triang. $A1B1C$	[*bricht ab*]
		[7.]	$+$	$+$	
		[8.]	$+$	$-$	

[*Zweiter Ansatz*]

Propositio Decima Quinta

In figura Analytica simplice duplum Sectoris $1CA2C1C$ sive Trilinei sub arcu curvae $1C2C$, et duabus rectis $A1C$, $A2C$ ejus extrema vertici jungentibus comprehensi, ad Zonam, $1C1B2B2C1C$ sive Quadrilineum arcu curvae eodem, duabus ordinatis $1B1C$, $2B2C$, et axis portione $1B2B$ contentum, eodem erit modo, quem propositione praecedenti enuntiavimus:

id est dupl. $1CA2C1C$ erit ad $1C1B2B2C1C$, ut $+\omega - e$ adω.
$-\omega + e$
$+\omega + e$

Quod ita facile demonstratur: $1B1D$ est ad $1B1C$; item $2B2D$ ad $2B2C$ eo quo diximus modo, idemque est in caeteris; per prop. 14. ergo et summa omnium BD, ad summam omnium BC, id est, (methodo indivisibilium, ad modum prop. 6. demonstrata,) area $1D1B2B2D1D$, sive per prop. 7. duplum Trilineum $1CA2C1C$; ad aream $1C1B2B2C1C$, eodem modo erit. Quod asserebatur.

16–18 *Daneben:* $\frac{s}{\odot} \sqcap \frac{\omega - e}{\omega}$. $\frac{s}{☽} \sqcap \frac{\omega - e}{e}$. $\frac{\odot}{☽} \sqcap \frac{\omega}{e}$.

4 f. ad ω *(1)* Q. E. D. *(2)* vel *L* 16–19 ad ω *(1)* Nam duplus sector 1CA2C1C est aeqvalis zonae figurae resectarum, 1D1B2B2D1D per prop. 7. *(2)* Qvod *L*

Propositio Decima sexta

In figura Analytica Simplice directa Zona, ordinatis, arcu curvae et axe comprehensa est ad Zonam conjugatam, id est ordinatis conjugatis, eodem arcu, et axe conjugato comprehensam, ut exponens dignitatum ab ordinatis ad exponentem dignitatum ipsis proportionalium ab ordinatis conjugatis id est ab abscissis.

Id est zona directa $1C1B2B2C1C$, qualem jam praecedenti prop. explicuimus est ad zonam conjugatam $1C1G2G2C1C$, arcu eodem quo prior $1C2C$, ordinatis conjugatis $1G1C$, $2G2C$, (quae abscissis prioris, $A1B$, $A2B$ aequales sunt) et $1G2G$ portione axis conjugati AG comprehensam, ut ω ad e. Nam per praecedentem, duplus Sector $1CA2C1C$ est ad zonam $1C1B2B2C1C$ ut differentia ipsarum ω et e in directis, summa in reciprocis, est ad ω. Eodemque modo idem duplus sector ad zonam conjugatam $1C1G2G2C1C$, est ut differentia ipsarum e et ω in directis, summa in reciprocis, est ad e. Nam par ratio est quia eligere possumus quem axium, quasve ordinatarum velimus; tantumque quae antea erant ordinatae BC, nunc fiunt abscissae AG, et quae antea erant abscissae AB, nunc fiunt ordinatae GC, adeoque tantum in locum ipsius ω substituenda est e, et contra.

Cum ergo duplus sector sit ad zonam, ut summa vel differentia ipsarum ω et e est ad ω, et idem sit ad zonam conjugatam, ut summa vel differentia ipsarum e et ω, (id est rursus ipsarum ω et e,) est ad e. erit zona ad zonam conjugatam, ut ω ad e. Q. E. D.

2–6 *Daneben, gegenläufig:* $A.\ B.\ \dfrac{\omega^2}{A \sqcap FG} \sqcap CG.\ \dfrac{CG}{CE} \sqcap \dfrac{B}{A}.\ CE \sqcap \dfrac{A, CG}{B}.\ ME \sqcap \dfrac{\omega^2}{CE \sqcap \frac{A}{B}CG} \sqcap \dfrac{\frac{B}{A}\omega^2}{CG \sqcap \frac{\omega^2}{A}}$. Ergo $ME \sqcap B$.

16 f. contra. | Unde terminus rationis antecedens manet, nempe eadem est summa vel differentia ipsarum ω et e, qvae ipsarum e et ω. *gestr.* | Cum *L*

---

17 Cum ergo: Der Beweis deckt nicht die Fälle $e = \omega$ (Gerade) und $e = -\omega$ (Hyperbel) ab, für die der Satz ebenfalls gilt.

Scholium.

Hanc propositionem memorabilem credidi, tum ob simplicitatem expressionis, quia facile memoria teneri potest; tum ob usus generalitatem, quia in omnibus curvis analyticis simplicibus, eodem modo componitur. Unde qui eam memoria tenet, statim ubi opus est quadraturam figurae propositae ex ea calculo investigare potest.

Sed nos mox propria in eam rem theoremata dabimus, nunc propositionem exemplis applicare suffecerit. In fig. [6.] sit curva, parabola Conica, constat esse quadrata ipsarum BC seu dignitates quarum exponens est 2. ut ipsas AB vel GC, seu ut earum dignitates exponentem habentes 1. Ergo erit zona $1C1B2B2C1C$ ad $1C1G2G2C1C$, ut 2. ad 1. Si in fig. [7.] ubi omnia inverse sumuntur, intelligatur etiam esse parabola Conica, erit ut 1. ad 2. Pro numeris 1. 2. in Parabola Cubica substituemus 1. 3. in semicubicali, in qua ordinatarum quadrata, sunt ut cubi abscissarum sive ordinatarum conjugatarum vel contra, pro 1. 2. substituemus 2. 3. In fig. [8.] si curva sit Hyperbola Conica, ubi ordinatae sunt ut abscissae reciproce, adeoque exponentes 1. 1. erunt zonae directa et conjugata, aequales, quod adeo verum esse constat, ut sint per omnia sibi similes et congruentes. Si sit in fig. [8.] Hyperboloeides proxime superior sive Antiparabola Berthetiana, in qua quadrata ordinatarum ut abscissae reciproce, de qua supra, utique ut in parabola, zona zonae conjugatae dupla vel subdupla erit.

Corollaria:

T r i l i n e i c o n j u g a t i $1C1P2C1C$ q u a d r a t u r a. Vocemus hoc trilineum P. et rectangulum $1P1C1G2G$, vocemus G. et rectangulum zonae directae circumscriptum quod est $1P1B2B$ in directis seu fig. [6.] vel [7.], at rectang. $1C1B2B$ in reciprocis seu fig. [8.] vocemus B. Zonam directam, R: conjugatam C. Ex hac propositione R, est ad C, id est $B-P$ ad $P+G$ ut ω ad e. Ergo $\omega P+\omega G$ aeq. $eB-eP$ sive $\omega P+eP$ aeq. $eB+\omega G$. ac denique P aeq. $\dfrac{eB+\omega G}{\omega+e}$. Sunt autem e et ω numeri cogniti, B et G rectangula cognita ergo habetur valor ipsius P quaesitus seu quadratura Trilinei dicti.

19 *(1)* Corollarium *(2)* Corollaria *L*

17 supra: s. o. S. 226 Z. 17–21. 25 aeq. $eB+\omega G$: Richtig wäre $eB-\omega G$; Leibniz rechnet konsequent weiter.

Coroll. 2. Quadratura Zonae conjugatae, $1C1G2G2C1C$, seu C eodem sensu literarum qui est in praecedenti corollario: patet esse C aeq. $P + G$. Est autem G cognita et P habetur per praecedentem, ergo habebitur et C.

Quadratura Zonae directae, $1C1B2B2C1C$, seu R. Est R ad C ut numerus ω cognitus ad numerum e cognitum per hanc prop. Est autem C. cognita per coroll. praeced. ergo et R.

Quadratura Trianguli directi $1CQ2C1C$. Si a rectangulo cognito $1P1CQ2C$ auferatur trilineum conjugatum $1C1P2C1C$ inventum coroll. 1. habebitur directum.

Eodem modo aliisque variis ex eodem principio pendentibus ex propositione hic demonstrata figurarum ad curvas analyticas simplices terminatarum quadraturae, calculo haberi possunt. Sed elegantius in eam rem theorema ipsam exhibens Quadraturam mox sequetur.

Prop. XVII.

„Si $V + X$ ad $V + Z$ rationem habeat inaequalitatis finitam, sintque X et Z finitae, „erit et V finita; quod si alterutra ipsarum, X vel Z sit infinita, etiam V infinita „erit.

Prior pars ita probatur; ponatur V esse infinita, erit quoque $V + X$ infinita, itemque $V + Z$ infinita, et ex hypothesi unius ad alterum ratio est inaequalitatis finita, jam si infinitum minus a majore ad ipsum rationem finitam, verbi gratia duplam, triplam, vel sesquialteram, aliamve quamcunque habente, subtrahatur, restabit infinitum; itaque si $V + Z$ minor, si placet ab $V + X$ majore subtrahatur, restare deberet $X - Z$ infinita, at ea ex hypothesi finita est. Ergo V infinita non est.

1–13 Coroll. 2. ... C aeq P + G *(1)* est autem per coroll. praeced. P aeq. $\frac{\mathrm{eB} + \omega\mathrm{G}}{\omega + \mathrm{e}}$. erit C aeq $\frac{\mathrm{eB} + 2\omega\mathrm{G} + \mathrm{eG}}{\mathrm{e} + \omega}$ adeoqve valor habetur sive qvadratura Zonae conjugatae: Qvadratura Zonae directae 1C1B2B2C1C R ad C ut ω ad e. ergo eR aeq. ωC. et R aeq $\frac{\omega}{\mathrm{e}}$C pro C. ponendo eius valorem ex Coroll. praeced. erit: R aeq. $\frac{\mathrm{e}\omega\mathrm{B} + 2\omega^2\mathrm{G} + \mathrm{e}\omega\mathrm{G}}{\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}\omega}$ Qvadratura Trilinei Directi 1CQ2C1C *(2)* est ... seqvetur *erg. L* 13–249,25 seqvetur | Prop. XVII. ... regatur. *erg.* | Propositio Decima *(1)* septima *(2)* o⟨ctava⟩ *L*

Posterior pars ita constabit: Si V esset finita, et Z, verbi gratia infinita, X finita, foret $V+X$ finita, at $V+Z$ infinita, itaque finitum ad infinitum, rationem habebit finitam, (supposuimus enim $V+X$ ad $V+Z$ rationem habere finitam) quod est absurdum. Ergo posteriore casu V necessario infinita erit.

Scholium ad prop. 17.

Libenter hanc contemplationem persecutus sum quia specimen exhibet cautionis circa ratiocinia de infinito: ostenditque non semper ex partium finitarum perpetuo abscissarum proprietate quadam ad totius infiniti spatii proprietatem posse prosiliri. Ut hoc loco, in hyperbola conica posset aliquis ita ratiocinari; $1C1B2B2C1C$ aeq. $1C1G2G2C1C$; et $0C0B1B1C0C$ aeq. $0C0G1G1C0C$ (ponendo haec semper finita esse) et ita semper quodlibet spatium directum seu horizontale, transverso seu perpendiculari in infinitum. Et omnia spatia horizontalia seu directa in infinitum usque ad A, complent spatium infinitum $2C2BAM$ etc. $1C2C$, et omnia ipsis conjugata sive perpendicularia complent spatium infinitum $2C2GM$ etc. $1C2C$. Ergo hoc infinitum priori aequale erit, pars toti. Et in aliis Hyperboloeidibus, semper concluderetur absurdum simili argumento. Nam exempli causa, in Hyperboloeide post Conicam proxima seu Antiparabola si ordinatae BC, sint ut abscissarum AB quadrata, reciproce; erit per prop. 16. $1C1B2B2C1C$ dimidium ipsius $1C[1G]2G2C1C$; eodem modo $0C0B1B1C0C$ dimidium ipsius $0C0G1G1C0C$, (ponendo haec semper finita esse) et ita semper quodlibet directum cujuslibet conjugati dimidium erit. Ergo spatium infinitum $2C2BAM$ etc. $1C2C$ completum a directis omnibus in infinitum sumtis; erit dimidium spatii $2C2GM$ etc. $1C2C$ completi a conjugatis omnibus, totum partis. Eodem modo in aliis colligetur totum partis suae trientem aut quartam partem esse. Eleganti argumento, quam lubrica sit ratiocinatio circa infinita, nisi demonstrationis severae filo regatur.

Propositio Decima o⟨ctava⟩

In qualibet Hyperboloeide, praeter omnium primam, nempe ipsam Hyperbolam Conicam, spatium curvilineum infinitae longitudinis ad unam asymptoton est area infinitum ad alteram finitum. Infinitum ad illam in quam demissae ordinatae expo-

15 concluderetur *(1)* simili argumento spatium asymptoto et curva comprehensum infinite longum, esse magnitudine finitum, quod absurdum est. sed qvi ea qvam adhibui cautione utetur, non facile ratiocinando circa indivisibilia atqve infinita falletur. *(2)* absurdum *L*

nentem habent exponente dignitatum proportionalium ab abscissis minorem; sin majorem habeant, spatium finitum erit.

Spatium longitudine infinitum intelligo, $0C0GA1B1C0C$, cum ipsa $A0B$ vel $0G0C$ infinite parva est, tunc enim ipsa $0B0C$ infinite longa intelligetur; Nam $A1B$ finita, ad $A0B$ infinite parvam, habet rationem omni assignata majorem, seu quam infinitum ad finitum, ergo et potentia illius ad potentiam similem hujus jam ut $A1B$ ad $A0B$ vel potentiae ab ipsis, ita contra potentia aliqua ab $0B0C$ ad potentiam similem, ab $1B1C$, vel ipsa $0B0C$ ad ipsam $1B1C$. Ergo etiam ut infinitum ad finitum. Jam si potentiae similes inter se sint ut infinitum ad finitum, ipsae lineae erunt etiam ut infinitum ad finitum, semper ergo erit $0B0C$ ad ipsam $1B1C$ ut infinitum ad finitum, cumque haec sit finita, illa erit infinita. Et quoniam in quemcunque axium conjugatorum, ducantur ordinatae semper ipsae vel earum potentiae abscissis vel earum potentiis reciprocae sunt ideo semper abscissa sumta infinite parva, ordinata erit infinita. Itaque omnis Hyperboloeides utrumque axium habet asymptoton sive non concurrentem vel quod hic idem est infinito ab hinc intervallo occurrentem. Posito ergo punctum $0B$ distantia infinite parva abesse a puncto A, rectamque ab $0B$ versus curvam ductam infinito ab hinc intervallo occurrere curvae in $0C$, seu rectam $[0B]0C$ esse infinitam, ajo quinquilineum spatium longitudine infinitum $1C1GA2B2C1C$ (: terminatum recta asymptoto infinita $A0G$ curva itidem infinita $1C0C$, et recta finita $A2B$, $1B1C$ et infinite parva $0G0C$:), fore magnitudine finitum, eo casu, quem enuntiat propositio secus infinitum. Nam per praecedentem $0C0G1G1C0C$ id est spatium longitudine infinitum

15 f. Admonendum hic ne quis turbetur, quid per infinitum atque infinite parvum intelligam.

21 *Über* praecedentem*:* prop. 16

20 longitudine *L ändert Hrsg.*

3 $0C0GA1B1C0C$: Leibniz hat den Beweis zunächst anhand der Kurvenpunkte $1C$ und $2C$ statt $0C$ und $1C$ geführt sowie die Flächen V und Z ursprünglich mit ☉ und ☿ berechnet, die entsprechenden Korrekturen dann jedoch nicht vollständig ausgeführt. Dies ist im Folgenden vom Herausgeber stillschweigend berichtigt worden. 21 id est: Leibniz hat die beiden folgenden Flächenzerlegungen irrtümlich verwechselt; $0C0G1G1C0C$ entspricht $V + Z$ und $0C0B1B1C0C$ $V + X$. Dies hat jedoch keinen Einfluss auf die allgemeine Diskussion.

$\underset{V}{0C0P1C0C}$ + rectang. finit. $\underset{X}{0P0B1B1C}$ est ad $0C0B1B1C0C$, seu idem spatium longitudine infinitum $\underset{V}{0C0P1C0C}$, + rectang. $\underset{Z}{0G0C0P1G}$ altitudinis infinite parvae $0G0C$, baseos infinite longae $0G1G$, ut numerus ad numerum, inaequalem, exponens scilicet abscissae ad exponentem ordinatae (: qui non nisi in Hyperbola Conica, jam exclusa aequales sunt :), itaque si rectangulum $\underset{Z}{0G0C0P1G}$ est quantitas finita (et multo magis infinite parva) erit etiam spatium $\underset{V}{0C0P1C0C}$ quantitas finita. Et contra si rectangulum Z sit infinitum etiam spatium hoc V erit infinitum per prop. 17. praeced. Ergo ut sciamus an spatium $V + Z$ sit infinitum magnitudine vel finitum, sufficit ut sciamus an finitum vel infinitum sit magnitudine spatium Z, seu rectangulum $0G0C0P1G$, contentum sub infinite parva $0G0C$, et infinite longa, $0G1G$. Addamus huic rectangulo finito vel infinito, rectangulum finitum $0P1GA0B$; producetur rectangulum, $A0B0C0G$ quod

10 Propositio separata praemittenda[:] Rectangulum sub Abscissa infinite parva, et ordinata ad Hyperboloeidem infinita, est quantitas infinita cum major est exponens dignitatum abscissarum, quam exponens dignitatum ordinatarum ipsis reciproce proportionalium; finita, cum minor. Praemittenda definitio infiniti et infinite parvi.

6 finita. *(1)* Qvod sic ostendo ☉ + ☽ est ad ☉ + ☿ ut numerus ad alium inaeqvalem, seu ut e ad ω. ☽ finita est, qvod si ergo et ☿ finita est, non potest utiqve finitarum ☽ vel ☿ additio ad eandem infinitam, facere duas summas infinitas qvarum una alterius dupla vel tripla sit vel aliter ut numerus ad numerum inaeqvalem se habeat. Nam si posset, utiqve minore a majore sublata restaret adhuc infinitum, aeqvale scilicet minori infinito, aut eius duplum triplumve, aut pars tertia qvartave; at vero si ☉ + ☽ auferatur ab ☉ + ☿ vel contra restat finitum scilicet ☽ − ☿ vel ☿ − ☽. Ergo si ☿ sit finitum, ☉ etiam erit magnitudine finitum. Contra si ☿ sit infinitum, etiam ☉. erit infinitum. Nam si ☉ esset finitum, foret etiam ☉ + ☽ finitum, (qvia ☽ finitum), *(a)* | ergo *nicht gestr.* | fini *(b)* at ☉ + ☿ infinitum, qvia ☿ infinitum, ergo ☉ + ☽ finitum ad ☉ + ☿ infinitum, finitam haberet rationem, ut numerus ad numerum, qvod absurdum est. *(2)* et L

15 finita: Richtig wäre infinite parva, vgl. N. 51 prop. XXI S. 579 Z. 2. Leibniz diskutiert auch im Haupttext Z. 5 irrtümlich den Fall, das Rechteck $0G0C0P1G$ sei endlich statt unendlich klein. Vgl. die Erl. zu N. 51 S. 582 Z. 21 sowie die dortigen Verweise.

adhuc erit finitum vel infinitum, si modo prius tale erat. Rectangulum ergo $A0B0C0G$ examinare suffecerit, quod ut clarius fiat, faciemus in exemplo, unius curvae, quod ad caetera applicare facile sit. Sit ergo curva $0C1C2C$ Antiparabola, sive talis ut Quadrata ordinatarum, sint reciproce, ut abscissae sive ut ordinatae conjugatae; vel contra. Et primum ponamus ad axem sive asymptoton AB demissas ordinatas, BC esse ut quadrata ipsarum AB reciproce, sive esse $0B0C$ ad $1B1C$, ut quad. $A1B$ ad quad. $A0B$. Porro Rectangulum $A0B0C0G$ est ad rectangulum $A1B1C1G$ in ratione composita ex rationibus $A0B$ ad $A1B$, et $0B0C$ ad $1B1C$ vel quad. $A1B$ ad quad. $A0B$. Ergo rectang. illud erit ad hoc, ut recta $A1B$ ad rectam $A0B$, id est ut quantitas finita ad infinite parvam, sive ut infinitum ad finitum. Rectangulum autem hoc finitum est, ergo illud infinitum erit, adeoque per consequentiam supra ostensam spatium $V + Z$, sive $0C0B1B1C0C$, et multo magis spatium eo majus $0C0GA1B1C0C$ infinitum erit. Idemque eveniet in aliis curvis quotiescunque exponens abscissarum major erit quam exponens ordinatarum.

Si vero eadem curva Antiparabolica inverso modo sumta intelligatur, et sint scilicet quadrata ordinatarum ut abscissae reciproce, sive quadr. $0B0C$ ad quadr. $1B1C$, ut $A1B$ ad $A0B$, eodem plane modo ratiocinabim⟨ur⟩, nempe Rectangulum $A0B0C0G$ est ad rectang. $A1B1C1G$ in ratione composita ex rationibus $A0B$ ad $A1B$ vel ut quad. $1B1C$ ad quad. $0B0C$ et $0B0C$ ad $1B1C$, id est in ratione rectae $1B1C$ finitae ad rectam $0B0C$, infinitam. Ergo rectangulum $A0B0C0G$ ad rectang. $A1B1C1G$ erit ut finitum ad infinitum; hoc autem, finitum, illud autem infinite parvum est quod ad finitum nempe hoc loco ad rectang. $A1B1C1G$, rationem habet quam finitum ad infinitum, ipsum ergo Rectangulum $A0B0C0G$ infinite parvum erit, ergo per consequentias supra ostensas

---

7 $\dfrac{\dfrac{A0B,\ \text{quad. } A1B}{A1B,\ \text{quad. } A0B}}{\dfrac{\text{quad. } 1B1C, 0B0C}{\text{quad. } 0B0C, 1B1C}} \sqcap \dfrac{A1B}{A0B}.$

1 f. A0B0C0G *(1)* est ad rectangulum A1B1C1G in composita ratione ex rationibus A0B ad A1B et 0B0C ad 1B1C, At ex natura curvae reciprocae $\overline{\text{A0B}}^{\text{e}}$ ad $\overline{\text{A1B}}^{\text{e}}$, est ut $\overline{\text{1B1C}}^{\omega}$ ad $\overline{\text{0B0C}}^{\omega}$. posito ut hactenus exponente dignitatis abscissarum e, et exponente dignitatis ordinatarum, ω. Ergo A0B ad A1B, ut $\sqrt[\text{e}]{\overline{\text{1B1C}}^{\omega}}$ ad $\sqrt[\text{e}]{\overline{\text{0B0C}}^{\omega}}$, adeoqve ratio rectangulorum supra dictorum composita erit ex rationibus, $\sqrt[\text{e}]{\overline{\text{1B1C}}^{\omega}}$ ad $\sqrt[\text{e}]{\overline{\text{0B0C}}^{\omega}}$, et 0B0C ad 1B1C, sive ut 0B0C multipl. in $\sqrt[\text{e}]{\overline{\text{1B1C}}^{\omega}}$ ad 1B1C multipl. in $\sqrt[\text{e}]{\overline{\text{0B0C}}^{\omega}}$ *(2)* examinare *L*

spatium $V + Z$ id est $0C0B1B1C0C$ erit finitum, adeoque et spatium $0C0GA1B1C0C$ quod ipsum quantitate infinite parva, rectangulo scilicet $A0B0C0G$ excedit, finitum erit. Idemque eveniet in aliis curvis, quotiescunque exponens ordinatarum major est quam exponens abscissarum. Cumque in eadem curva reciproca ordinatae ad unam asymptoton fiant abscissae ad alteram et contra, et ad unam asymptoton exponens ordinatarum major sit quam abscissarum; (excepta Hyperbola prima sive Conica, ubi idem est utrobique) ideo ad aliam Asymptoton erit minor; adeoque excepta Hyperbola Conica, spatium ad unam Asymptoton erit finitum ad aliam infinitum, ea conditione, quae in propositione asserebatur.

Propositio Decima nona

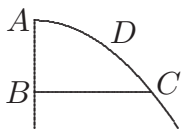
Quadratura Figurae Analyticae simplicis magnitudine finitae completae. Regula autem haec est[:] figura analytica simplex completa finita, est ad rectangulum sub altitudine id est maxima abscissa assumta, et basi, id est ultima ordinata assumta ut exponens dignitates ordinatarum dignitatibus abscissarum proportionales ordinatae, est ad eundem exponentem auctum in directis, minutum in reciprocis exponente dignitates abscissarum.

Explicatio

Nempe in fig. [6.] vel [7.] vel [8.] figura Analytica areae finitae $MA2B2C1CM$. completa id est a vertice incipiens contenta ordinatis duabus, prima per verticem transeunte AM, (quae in fig. [6.] et [7.] infinite parva est, punctis A. M. coincidentibus) altera ultima pro arbitrio assumta $2B2C$, abscissa $A2B$, et Curva analytica simplice

11 NB.

18–255,9 *Am Rand:*



12 completae, *(1)* exceptis simplicissimis, in qvibus dignitatum proportionalium ab ordinatis et abscissis exponentes aeqvales sunt, Triangulo scilicet et Hyperbola Conica et Hyperboloeidibus area infinitis. Regula autem haec est. Figura Analytica inde a vertice sumta, axe, curva et ordinatis qvarum una per verticem transit, aut in eo evanescit, comprehensa, completa, *(2)* in qva exponentes dignitatum proportionalium ab ordinatis et abscissis sunt inaeqvales *(3)* Regula L

$M1C2C$ comprehensa, est ad rectangulum $A2B2C$ abscissa maxima assumta $A2B$, et ordinata ultima, ei respondente $2B2C$ comprehensum ut ω. ad $\omega + e$ in directis, ad ω ⟨— — —⟩ posito esse ω numerum exponentem dignitates ordinatarum, proportionalium dignitatibus ⟨abscissarum⟩ quarum exponens e. In Parabola, directe sumta, ut in fig. [6.] cum scilicet pro axe sumitur, quod vulgo vocant axem, erunt ordinatarum $1B1C$, $2B2C$, dignitates exponentem habentes 2. seu quadrata, proportionalia dignitatibus abscissarum $A1B$, $A2B$ exponentem habentibus, 1. id est abscissis ipsis, unde erit ω aeq. 2. et e aeq. 1. eritque figura $A2B2C1CA$ ad rectangulum $A2B2C$, ut ω ad $\omega + e$, id est ut 2. ad 3. ut constat. In eadem parabola inverse sumta fig. [7.] ubi pro axe $A1B2B$ sumitur tangens verticis, et ad eum demittuntur ordinatae BC, ibi vero, ω exponens dignitatum, ordinatarum, proportionalium dignitatibus abscissarum est 1. et e, exponens dignitates abscissarum est 2. quia ordinatae ipsae $1B1C$, $2B2C$, sunt ut quadrata abscissarum $A1B$, $A2B$, seu in earum ratione 2^{plicata}, itaque erit Spatium $MA2B2C1CM$ fig. [7.] ad rectang. $A2B2C$, ut ω, ad $\omega + e$, seu ut 1 ad 3. ut etiam constat.

At in fig. [8.] idem est, modo secundum prop. 18. spatium ad curvam analyticam Hyperboloeidem seu reciprocam $MA2B2C1CM$ ad eam sumatur partem, ad quam infinitae areae est, quoniam ad unam asymptoton, ut AM est areae finitae quanquam sit longitudinis infinitae, ad aliam vero AB etc. eodem modo assumtam fuisset non tantum longitudinis sed et areae infinitae. Exempli [causa] in Antiparabola, si ordinatarum

$\overline{AB} \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $y^\omega \sqcap p^{\omega-e}, x^e$. $\dfrac{ABCDA}{yx} \sqcap \dfrac{\omega}{\omega+e}$, $ABCDA \sqcap \dfrac{\omega}{\omega+e}yx$ et $\overline{ABCDA}^\omega \sqcap \overline{\dfrac{\omega}{\omega+e}x}^\omega \widehat{y^\omega}_{p^\omega x^e}$. seu $\overline{ABCDA} \sqcap \dfrac{\omega}{\omega+e}xp\sqrt[\omega]{x^e}$. Si $\omega \sqcap 1$ fiet $ABCDA \sqcap \dfrac{1}{1+e}x^{e+1}$.

$y^\omega \sqcap \dfrac{p^{\omega+e}}{x^e}$. $\dfrac{ABCDA}{yx} \sqcap \dfrac{\omega}{\omega-e}$. fiet: $\overline{ABCDA} \sqcap \overline{\dfrac{\omega}{\omega-e}yx}\widehat{}_{p\sqrt[\omega]{\frac{p^e}{x^e}},x}$ seu $\overline{ABCDA} \sqcap \dfrac{\omega}{\omega-e}px\sqrt[\omega]{\dfrac{p^e}{x^e}}$ et si $\omega \sqcap 1$. fiet $\sqcap \dfrac{1}{1-e}\dfrac{\overline{p}^{1+e}}{x^{1-e}}$.

19 infinitae, | (: excepta Hyperbola Conica seu simplici, qvae cum utrinqve sit infinita, adeoqve eodem modo prop. 18. exclusa est :) *gestr.* | exempli *L*

quadrata sint ut abscissae reciproce; spatium $MA2B2C1CM$, Asymptoto $AM_{[,]}$ curva infinita $M1C2C$, abscissa finita, assumtarum maxima infinita $A2B$, et ejus ordinata $2B2C$ assumtarum inde a vertice A, ultima, comprehensum; licet infinite longum finitae magnitudinis erit, habebitque se ad rectangulum $A2B2C$, ut ω ad $\omega - e$. Adeoque ut id obiter admoneam, in Antiparabola, sive Hyperbola Cubica, Spatium infinitum $M2G2C1CM$ erit rectangulo $A2B2C$ aequale. Nam quia ordinatarum quadrata sunt ut abscissae, erit ω aeq. 2. et e aeq. 1. et ratio ω ad $\omega - e$, erit quae est 2 ad 1. adeoque totum spatium infinitum $MA2B2C1CM$ (seu totum ex spatio infinite longo $M2G2C1CM$ et rectangulo $A2B2C$, compositum,) erit rectanguli $A2B2C$ duplum.

Demonstratio

Sit $A0B$ abscissa infinite parva, eique respondens ordinata $0B0C$, ordinataque conjugata $0G0C$, constat Zonam directam $0C0B2B2C1C0C$ esse ad Zonam conjugatam, $0C0G2G2C1C0C$ ut ω ad e. per prop. praeced. Jam residuum rectangulum $A0B0G0C$ in directis fig. [6.] et [7.] est quantitas infinite parva, tam enim altitudo ejus $A0B$, quam basis $0B0C$ est infinite parva, in reciprocis fig. [8.] ejus altitudo quidem $A0B$ est infinite parva, sed basis $0B0C$ est infinite longa unde fit ut hoc rectangulum tum demum certo finitum sit, cum exponens ordinatarum major quam abscissarum per prop. ..., eo autem casu et tota figura $MA2B2C1C0CM$ est infinita et contra. Per prop. ... ergo in directis semper, ut in reciprocis cum figura in eam partem sumta est secundum quam finitae est areae, id est secundum quam major ω quam e; negligi poterit rectangulum $A0B0C0G$ velut infinite parvum, sive omni assignabili quantitate minus adeoque et ei inscriptum $0C0GA$ $0C0BA$. Adeoque idem est dicere $0C0B2B2C1C0C$, quod est dicere
$0C0G2G2C1C0C$

12 f. $\dfrac{B}{B-A} \sqcap \dfrac{\omega}{e}$. Ergo $eB \sqcap \omega B - \omega A$ et $B \sqcap \dfrac{\omega A}{\omega - e}$.

11 *(1)* Qvia Zona directa 1C1B2B2C1C, est ad conjugatam 1C1G2G2C1C, ut ω ad e. eodemqve modo utcunqve procedendo usqve ad aliqvam 0C0B2B2C1C0C qvae est ad conjugatam eidem proximam, 0C0G1G1C0C aliqvam vertici A proximam etiam ut ω ad e, ideo summa omnium directarum usqve *(2)* sit L

13 prop. praeced.: Gemeint ist prop. 16 S. 246 Z. 1–6. 17 finitum: Richtig wäre infinite parvum; s. Erl. zu S. 251 Z. 15. 17 prop. ... : prop. 18 S. 249 Z. 25 – S. 250 Z. 2.

$MA2B2C1CM$ cum differentia infinite parva, sive omni assignabili quantitate minor sit, $MA2G2C1CM$

ergo et ratio horum eadem quae illorum, at illa sunt inter se ut ω ad e, quemadmodum ostendimus ex prop. praeced. Ergo et haec, $MA2B2C1CM$, $MA2G2C1CM$, eodem modo erunt ut ω ad e; ergo et summa eorum, in directis, vel fig. [6.] et fig. [7.] differentia in reciprocis, seu fig. [8.] est rectangulum $A2B2C$. Ergo $MA2B2C1CM$, erit ad rectangulum $A2B2C$ ut ω ad $\omega + e$ in directis, vel ut ω ad $\omega - e$ in reciprocis. Q. E. D.

Prop. Vigesima.

Quadratum lateris recti est ad Trilineum a vertice incipiens, abscissa ordinata et curva terminatum, cujus natura est ut ordinatae sint directe in multiplicata ratione abscissarum, secundum aliquem numerum exponentem e; in composita ratione $e+1$ ad 1. et ratione lateris recti, ad altitudinem sive maximam abscissam; multiplicata secundum numerum exponentem $e+1$. Ut calculo exprimamus; si abscissa sit y, ordinata v maxima abscissa, m et aequatio exprimens naturam curvae, v aequal. $\frac{y^e}{p^{e-1}}$ fiet Trilineum dictum aequal. $\frac{y^{e+1}}{\overline{e+1}p^{e-1}}$.

Sit Paraboloeidum rationalium aliqua, (: tales enim tantum exprimit propositio :) $A1C2C$, cujus ordinatae $1B1C$, $2B2C$, sint in multiplicata ratione abscissarum $A1B$, $A2B$, secundum numerum, e, exempli causa in triplicata, si e, sit 3. sive ordinatae ut Cubi abscissarum, ut fit in parabola Cubica, et sit latus rectum sive parameter p. vel AP. Ajo esse quadratum ab AP ad Trilineum $A2B2C1CA$ in composita ratione $e+1$. (id est 4 hoc loco) ad 1 toties sumtum quot sunt unitates in numero $e+1$, (id est hoc loco

8 *(1)* In Curva *(2)* Figura Analytica Rationalis simplex | directa completa *erg.* | id est in qva Ordinatae sunt in ratione multiplicata | directa *erg.* | ordinatarum, secundum aliqvem numerum, e, est ad qvadratum lateris recti multiplum per numerum e + 1, in ratione altitudinis ad latus rectum, multiplicata secundum e + 1 *(3)* Trilineum *(a)* figurae *(b)* orthogonium figurae analyticae rationalis simplicis ductae, sive Paraboloeidis sumtae *(c)* paraboloeidis rationalis secundum ordinatas rationales; est ad *(4)* Trilineum ordinata rationali *(5)* Trilineum figurae analyticae simplicis | rationalis directae *erg.* | abscissum, sive qvo ratio ordinatarum est in multiplicata ratione abscissarum *(6)* Trilineum a vertice incipiens, abscissa ordinata et curva terminatum, cuius natura est ut ordinatae sint directe in multiplicata ratione abscissarum, secundum aliqvem numerum exponentem e; est ad Qvadratum lateris recti, multiplum per numerum e + 1, in ratione altitudinis sive maxime abscissae, ad latus rectum *(7)* Qvadratum *L*

11 ratione altitudinis sive maximae abscissae, ad latus rectum *L ändert Hrsg.*

ad quadruplum quadratum a p), ac ratione lateris recti AP ad ipsam $A1B$, abscissam maximam sive altitudinem, multiplicata (hoc loco quadruplicata) secundum numerum $e+1$, (4).

Erit ordinata in Trilineo Concavo Paraboloeidis rationalis, ex curva scilicet in tangentem verticis velut axem, demissa; valor ejus hic est ex data abscissa ex axe AB, et latere recto AP:

Ordinata	ad Parabolam Quadraticam	Cubicam	Quadrato-Quadraticam	Surdesolidam	Quadrato-Cubicam	
BC	$\frac{\boxed{2}\,AB}{AP}$	$\frac{\boxed{3}\,AB}{\boxed{2}\,AP}$	$\frac{\boxed{4}\,AB}{\boxed{3}\,AP}$	$\frac{\boxed{5}\,AB}{\boxed{4}\,AP}$	$\frac{\boxed{6}\,AB}{\boxed{5}\,AP}$	etc.

In exemplum (: eodem enim modo idem in caeteris demonstrabitur; :) sumamus duas ordinatas $1B1C$, $2B2C$, ad curvam quandam, talis naturae, ut assumto latere recto AP, et abscissis $A1B$, $A2B$, sit: $1B1C$ aeq. $\frac{\boxed{3}\,A1B}{\boxed{2}\,AP}$. et $2B2C$ aequal. $\frac{\boxed{3}\,A2B}{\boxed{2}\,AP}$, utique erunt ordinatae $1B1C$, $2B2C$ inter se ut cubi $A1B$, $A2B$. id est ex definitione erunt ad Parabolam Cubicam.

Nota poterit hoc subj [*bricht ab*]

---

3 NB. Inseratur hic propositio de valoribus ordinatarum inserta fini plagulae praecedentis.

4 *(1)* Ordinatae ad partem concavam *(2)* Ordinatarum Ft, Fs, Fr, Fq, Fp in Trilineis Concavis Paraboloeidum rationalium, ex curva scilicet in tangentem verticis velut axem demissarum, *(a)* series haec est *(b)* valores hi sunt *(3)* Erit *L* 12 demonstrabitur; :) *(1)* Ponamus id de qvo agitur non esse verum: Et *(2)* sumamus *L* 16 f. Cubicam. *(1)* contra *(2)* Eodem autem sumto latere recto AP, et Axe A1B2B non nisi unica parabola Cubica est, cum nulla alia re distinguantur. Ergo vicissim in Parabola Cubica cuius latus rectum AP, ordinata BC abscissa *(3)* Si vero *(4)* Nota *L*

---

18 inserta: Die folgende Proposition ist auf Bl. 156 v° unten ergänzt. 20 Ft ... Fp: zur nicht aufgefundenen zugehörigen Figur vgl. N. 28 S. 324 Z. 19 Erl. zu Recta FG.

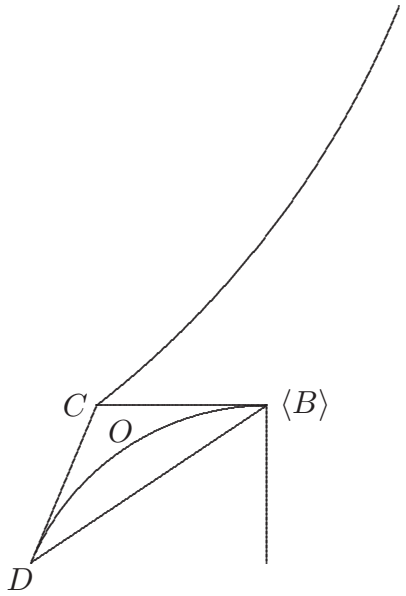
21. DE QUADRATURA CIRCULI ET PARABOLAE. DE PROBLEMATE PERRALTI. DE TRIANGULIS RECTANGULIS

[April – September (?) 1676]

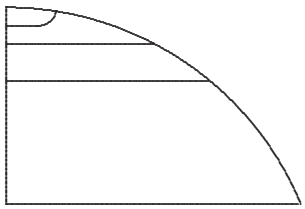
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 144+159. 1 Bog. 2°. Ca 2/3 S. auf Bl. 159 v°. 8 Z. auf Bl. 144 r° oben. Auf Bl. 159 v° im oberen Drittel und in der Mitte rechts Figuren zu N. 20.
Cc 2, Nr. 1233 C tlw.

Datierungsgründe: Die Teile 1–6 der vorliegenden Aufzeichnungen sind nach den Figuren für N. 20 auf Bl. 159 v° geschrieben worden. Teil 1 entstand möglicherweise in direktem Zusammenhang mit der Konstruktion der Figuren für N. 20. Für die Figuren der Teile 1 und 5 hat Leibniz manchmal bereits konstruierte Kreise und Kreisbögen verwendet oder überschrieben. Teil 7 wurde zu einem nicht bestimmbaren Zeitpunkt auf Bl. 144 r° notiert. Die Teile 3–6 sind vermutlich während eines Gesprächs entstanden, in dem Leibniz u. a. seine arithmetische Kreisquadratur sowie den Transmutationssatz, am Beispiel der Parabel, erläuterte. Das in Teil 5 verwendete Gleichheitszeichen ⊓ gebraucht Leibniz ab Mitte 1674 hauptsächlich während des Parisaufenthalts.

[*Teil 1*]



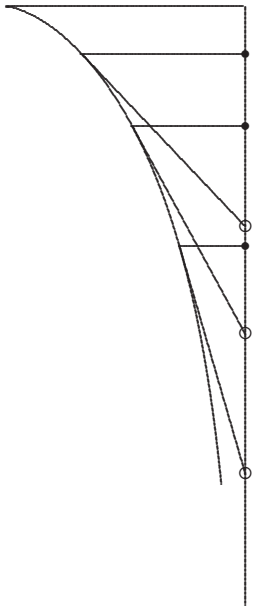
[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

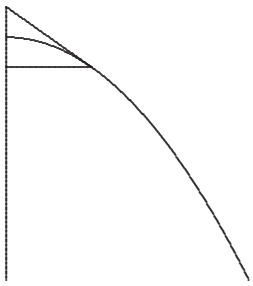
17 *Fig. 1*: vgl. die ergänzte prop. in N. 20 S. 208 Z. 17 sowie N. 51 fig. 9.

[*Teil 2*]



[*Fig. 3*]

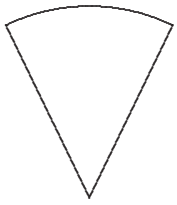
[*Teil 3, quer geschrieben*]



[*Fig. 4*]

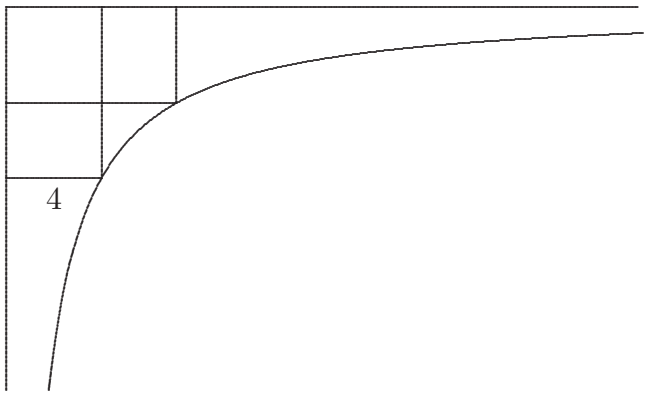
2 *Fig. 3*: Vgl. Leibniz' spätere Beschreibung des Problems, das ihm Cl. Perrault während seines Parisaufenthalts gestellt hatte: „Claudius Perraltus [...] mihi et aliis ante me multis proposuit hoc problema, cujus nondum sibi occurrisse solutionem ingenue fatebatur: invenire lineam BB [...] quam pondus, fili vel catenulae AB extremitati B annexum, puncto B vel aequivalente describat in plano horizontali; dum alteram fili AB extremitatem A, ducendo per rectam immotam AA, eo ipso pondus B trahimus per dictum planum horizontale; in quod, vel aequivalens, etiam recta AA, et durante motu filum, AB, cadunt.“ (*Supplementum geometriae dimensoriae*, in: *Acta Eruditorum* (1693), S. 387; *LMG* V S. 296.)

x^3+
x
$+\ x^3 - x^2 + x - a \sqcap 0$
$\pm\ \sqrt{-2}$



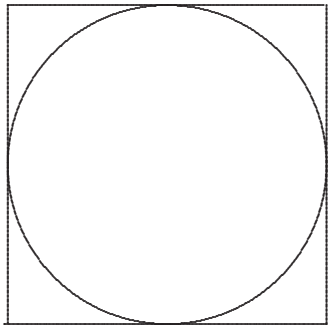
[*Fig. 5*]

[*Teil 4, gegenläufig*]

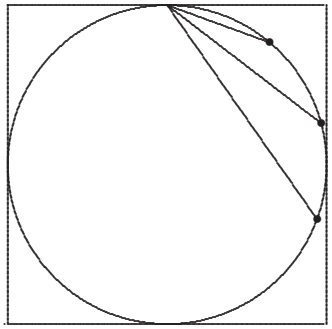


[*Fig. 6, gestrichen*]

[*Teil 5*]

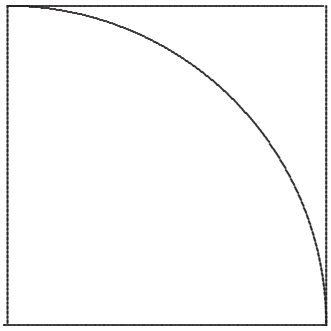


[*Fig. 7*]

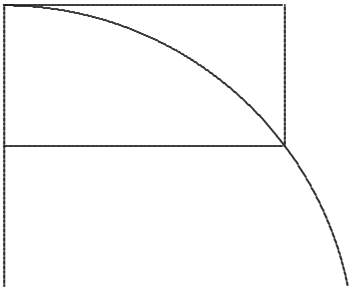


[*Fig. 8*]

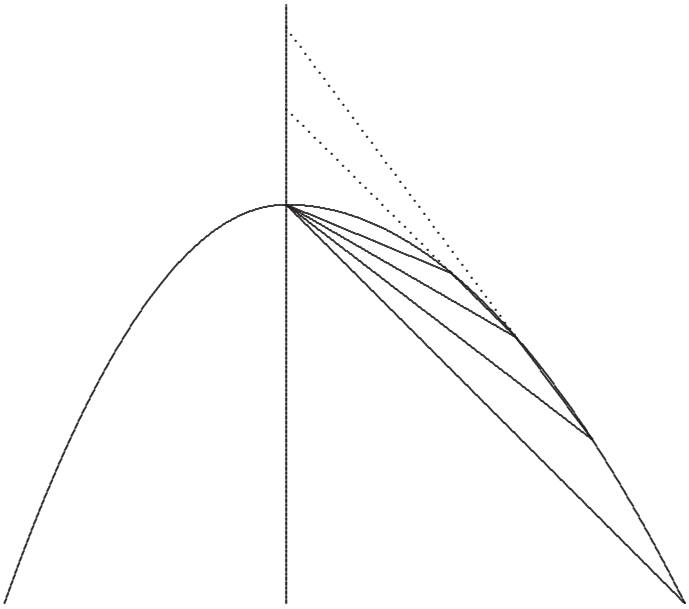
$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \qquad \frac{1}{99}$$



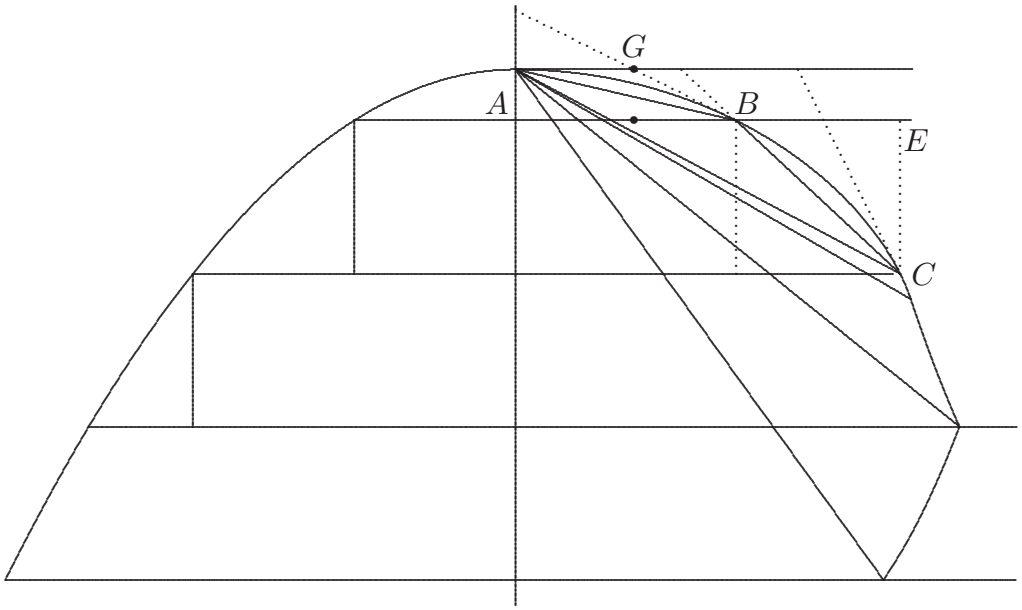
[*Fig. 9*]



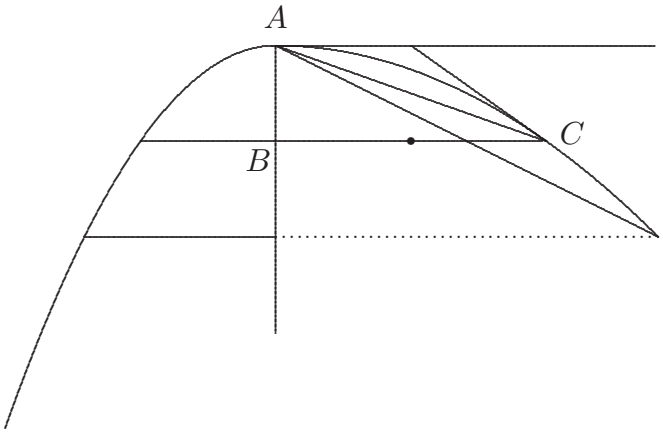
[*Fig. 10*]



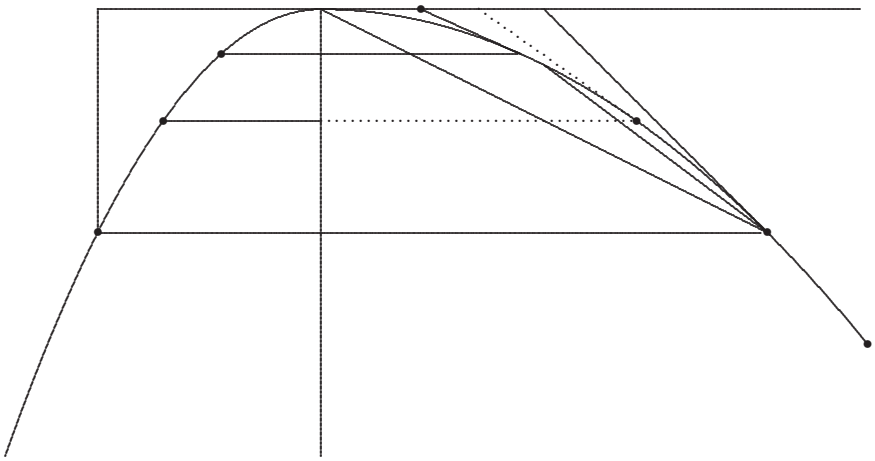
[*Fig. 11*]



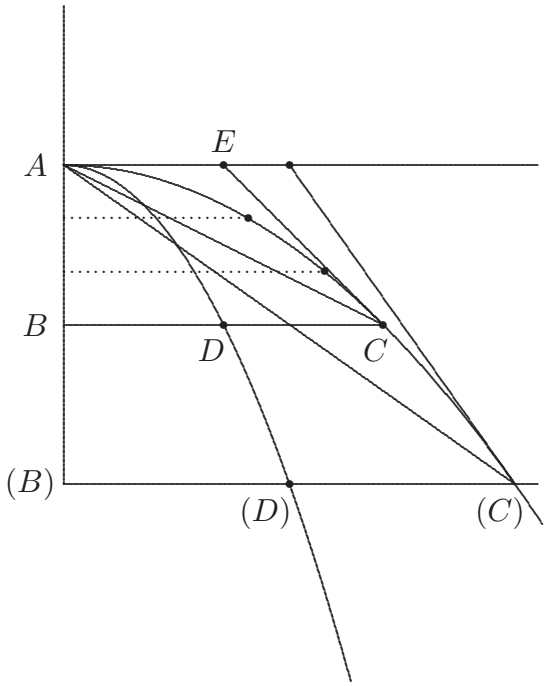
[*Fig. 12*]



[*Fig. 13*]



[*Fig. 14*]



$$ABDA \sqcap \frac{1}{2}ABCA$$

$$ABDA \sqcap 2\boxed{ACA}$$

$$2ABCA - 2ABC$$

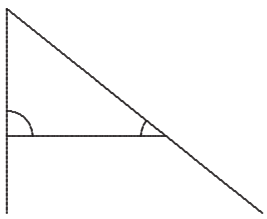
$$\frac{1}{2}ABCA \sqcap 2ABCA - 2ABC$$

$$\cancel{ABCA} \sqcap \cancel{4ABCA} - 4ABC$$

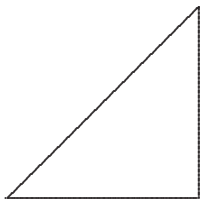
$$0 \qquad 3ABCA$$

[*Fig. 15*]

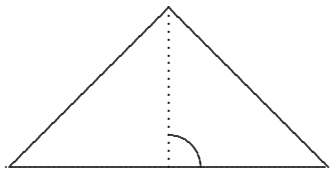
[*Teil 6*]



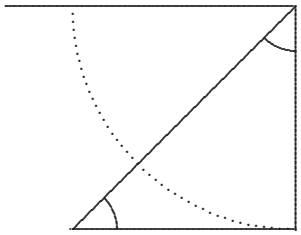
[*Fig. 16*]



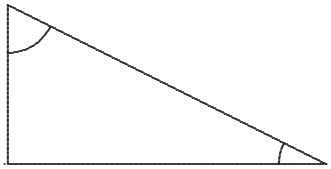
[*Fig. 17*]



[*Fig. 18*]



[*Fig. 19*]



[*Fig. 20*]

[*Teil 7, auf Bl. 144 r°*]

	10
	4
14	3
6	
20	

3 12

5 :		6

10 10

4 4

22. DE SERIEBUS. DE QUADRATURA CIRCULI ET HYPERBOLAE [Mai – 4. Juni 1676]

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung: LH 35 V 6 Bl. 10–11. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 10. Auf dem restlichen Bogen VII, 5 N. 82.
Cc 2, Nr. 1472

Datierungsgründe: Die Gesprächsaufzeichnung ist als erstes auf dem Träger der auf 4. Juni 1676 datierten Aufzeichnung VII, 5 N. 82 notiert. Fig. 2 steht vermutlich im Zusammenhang mit der nicht nummerierten, vor der zweiten prop. 9 ergänzten Proposition in N. 20; vgl. N. 51 prop. X Fig. 9. Die entsprechende Figur ist in N. 28 vorausgesetzt.

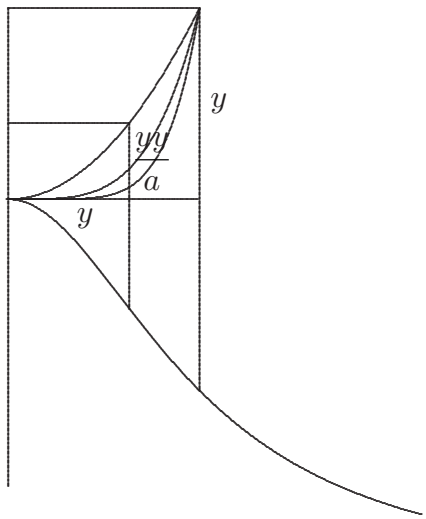
[*Tschirnhaus*]

$a - b - c - d$

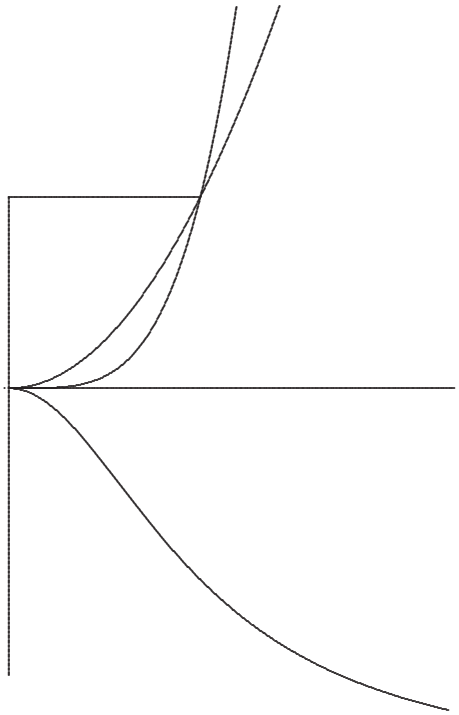
$a - b$ ⊓⊔ b ⊓⊔ b

$a - b$ $\qquad$ $c - d$

$a + b \mid b$ ⊓⊔ b



[*Fig. 1a, Tschirnhaus*]

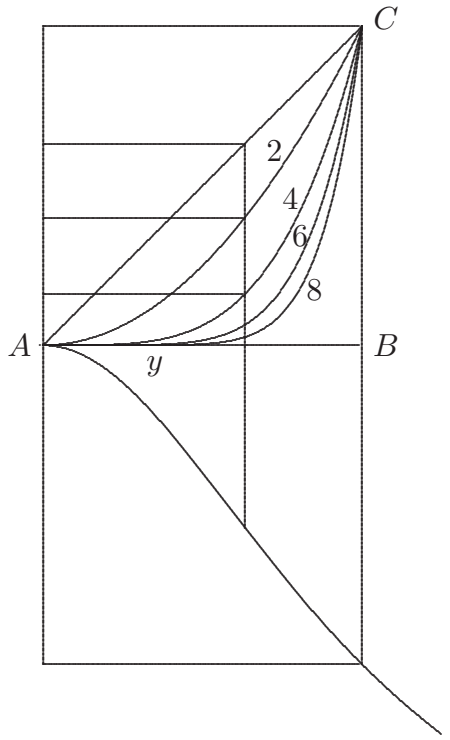


[*Fig. 1b, Tschirnhaus oder Leibniz*]

[*Tschirnhaus*]

$$\frac{2ayy}{aa+yy} \propto \frac{yy}{a} - \frac{y^4}{a^3} + \frac{y^6}{a^5}$$

$$\frac{yy}{3} - \frac{yy}{5} + \frac{yy}{7}$$



[*Fig. 2, Leibniz und Tschirnhaus*]

$$\frac{yy}{a} \qquad \frac{y^4}{a^3}$$ 5

$$\frac{y^3}{3a} \qquad \frac{y^5}{5a^3}$$

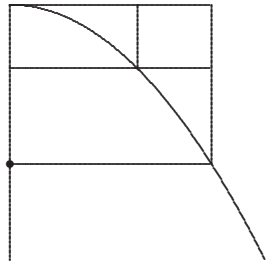
[*Leibniz*]

$$a \sqcap \frac{t^1}{1} - \frac{t^3}{3} \Big| + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$$

4 *Fig. 2*: Die drei Punktbezeichnungen in Tschirnhaus' Hand sind quer zur Schreibrichtung notiert.

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
 & x^2 & + & cy^2 & + & dyx & + & ey & + & fx & + & c & \sqcap & 0 \\
y^3 & & + & cy^2 & + & dy & + & e & \sqcap & 0 & & & & \\
y & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & + & \cancel{\frac{1}{2}} & + & \frac{1}{3} & + & \cancel{\frac{1}{4}} \\
1 & \cancel{-} & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & \cancel{-} & \frac{1}{4} \\
\hline
2 & + & \frac{2}{3} & + & \frac{2}{5} & &
\end{array}
$$



[*Fig. 3, Leibniz oder Tschirnhaus*]

[*Leibniz*]

$$
1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}
$$

[*Tschirnhaus*]

plus

$+ \qquad -$

$$
\begin{array}{ccc|ccc|ccc|}
x & - & xx & xx & - & x^3 & x^3 & - & x^4 \\
\frac{1}{2} & - & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} & \frac{1}{} & & \\
 & \frac{1}{2} & & & & & & &
\end{array}
$$

13–15 $x \ldots \frac{1}{2}$: Das Schema ist quer zur Schreibrichtung notiert.

$$1 \quad 2 \frown 3 \frown 4 \quad 5 \quad 6 \qquad\qquad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9$$

[*Leibniz*]

$$\frac{1}{1,2} + \frac{1}{2,3} + \frac{1}{3,4} + \frac{1}{4,5} + \frac{1}{} \qquad\qquad \frac{2}{1,3}$$

[*Leibniz*]

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \left[\frac{1}{4}\right] \quad \frac{1}{5} \qquad\qquad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{9}$$

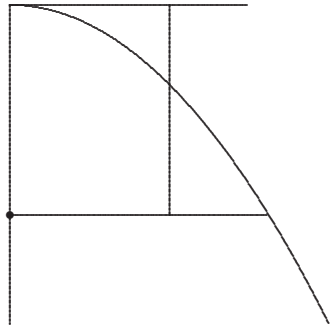
$$\frac{2}{1,3} \quad \frac{2}{3,5} \quad \frac{2}{5,7} \quad \frac{2}{7,9}$$

$$\begin{array}{llll}
1 & - \; y^2 & + \; y^4 & - \; y^6 \\
\hline
1 & - \; x^2 & + \; x^4 & \\
 & + \; 2xb & + \; 4x^3b & \\
 & + \; b^2 & + \; 6x^2b^2 & \\
 & & + \; 4xb^3 & \\
 & & + \; 1b^4 & \\
\hline
x & - \; \dfrac{x^3}{3} & + \; \dfrac{x^5}{5} & \\
 & \dfrac{2x^2}{2}b & + \; \dfrac{4x^4b}{4} & \\
 & + \; b^2x & + \; \dfrac{6x^3}{3}b^2 & \\
 & & + \; \dfrac{4x^2b^3}{2} & \\
 & & + \; xb^4 & \\
\hline
\end{array}$$

7–17 *Darüber, Leibniz:* $x \quad 1 \qquad x+1 \qquad x+b. \qquad x-$

Neben dem Schema, Leibniz: $\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$

13 $1 - \frac{x^3}{3}$ *L ändert Hrsg.*



[*Fig. 4, Leibniz oder Tschirnhaus*]

[*Leibniz*]

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & - & 3 & + & 3 & - & 1 \\ \frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{1} & - & \frac{3}{2} & + & \frac{3}{3} & - & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\frac{24-36+24-6}{}\ \sqcap\ \frac{6}{1,}}$$

$$\frac{1,2,3}{1,2,3,4} + \frac{1\ 2\ 3\ 4}{1\ 2\ 3\ 4\ 5}$$

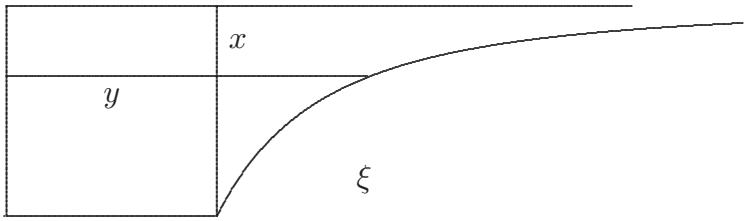
[*Tschirnhaus*]

$$\frac{1.2.}{1,3,5} \Big| \frac{1,2\ 4,6}{}$$

$$1 \qquad 1-\frac{1}{2} \ \Big|\ 1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3} \ \Big|\ 1-\frac{3}{2}+\frac{3}{3}-\frac{1}{4}$$

10 $1 \ldots -\frac{1}{4}$: quer zur Schreibrichtung notiert.

[*Leibniz*]



[*Fig. 5*]

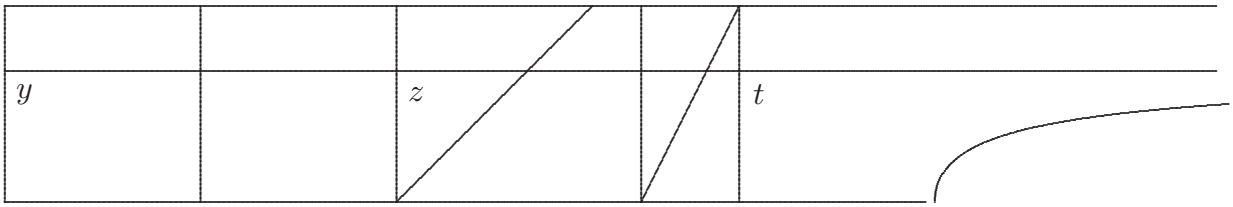
[*Tschirnhaus*]

$$xxy \;\wp\; a^3$$

$$y \qquad \frac{a^3}{xx} \;\wp\; y$$

$$\frac{a^3}{aa-2ax+xx} \;\wp$$

a	$a-x$	$\dfrac{aa-2ax+xx}{a}$	$\underbrace{\dfrac{a^3-3aax+3axx-x^3}{aa}}$
ξ	$\xi-\dfrac{\xi^2}{2a}$	$\underbrace{\xi[-]\dfrac{2\xi^2}{2[a]}+\dfrac{\xi^3}{3[a^2]}}$	



[*Fig. 6*]

$$z \qquad y-z \;\text{⊤⊥}\; z \;\text{⊤⊥}\; z \;\text{⊤⊥}\; \frac{zz}{y-z} \;\wp\; t$$

$$y \;\wp \qquad xx \;\text{⊤⊥}\; x \;\text{⊤⊥}\; x \;\text{⊤⊥}$$

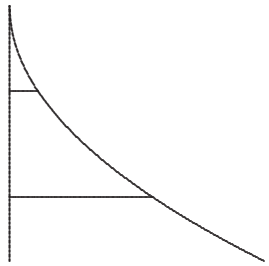
$$z \;\wp\; a-x \qquad x \;\text{⊤⊥}\; x \;\text{⊤⊥}$$

$a \qquad a + x$

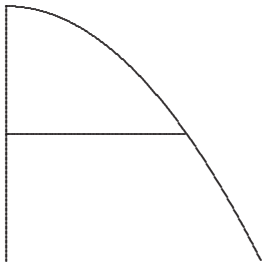
y

[*Leibniz*]

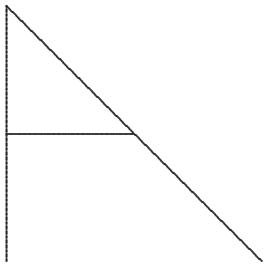
$\frac{1}{3} \quad \frac{\xi^3}{3}$



[*Fig. 7a*]



[*Fig. 7b*]



[*Fig. 7c*]

23. QUADRATURA ARITHMETICA CIRCULI ET HYPERBOLAE NONNIHIL VARIATA

8. Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 131–132 u. LH 35 V 6 Bl. 9. Ursprünglich 1 Bog. 2°, von dem die untere Hälfte des zweiten Blattes (= LH 35 V 6 Bl. 9) abgeschnitten wurde. 4 S.
Cc 2, Nr. 1242, 1243, 1244 A–B, 1437, 1438

8. Jun. 1676.

Quadratura Arithmetica Circuli et Hyp. nonnihil variata ponendo t aequ. $\theta + b$.

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{lllll}
 & \cancel{zy^0} & + \cancel{by^1} & + cy^2 & + dy^3 \sqcap 0 \\
\hline
- & \cancel{zy^0}\cancel{1} & \begin{array}{l} 1zy^0 \\ -\cancel{by} \end{array} & & \\
\hline
 & \sqrt[0]{zy^0} \sqcap 1 & \dfrac{by}{1} & & \\
\hline
- & zy^0 & 1\sqrt[0]{} & 2 & 3
\end{array}$$

Sed ita continuando divisionem z non intraret in calculum, quod absurdum.

8 8 Jun. 1676 *auf der gegenüberliegenden Seite erg. L* 9 | *(1)* Qvadratura Hyperbolae ex data Circuli vel contra Unde videtur seqvi impossibilem esse utriusqve qvadraturam etiam specialem *(2)* Quadratura ... θ + b. *erg.* | | Et tentamentum *(a)* an *(b)* an qvadrat. Circuli et hyperb. ex se invicem pendeant *erg. u. gestr.* | *L*

12 *(1)* $\cancel{z} - \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} - \frac{y^9}{9}$ etc $\sqcap 0$ $\cancel{f}1 - \frac{y}{z}$ Haec ⟨—⟩ est *(2)* $\begin{array}{l} z - \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} \\ \hline z - \frac{y}{} \end{array}$ *(3)* $zy^1 + by^2 + cy^3$

$$\begin{array}{l} \overline{z} \\ \hline -\cancel{z} \end{array} \quad \begin{array}{l} z \\ \hline + \frac{zy}{z} \end{array}$$

$+ dy^4$ *(4)* $\cancel{zy^0}$ *L*

12–17 Bei dieser abgebrochenen Rechnung handelt es sich möglicherweise um einen inkonsequenten Ansatz der Division des Polynoms durch $1 + y$.

$$\begin{array}{llll}
\boxed{y^3} & \boxed{+\,by^2} & +\,c^2y^1 & +\,d^3y^\circ \\
\hline
\sqrt[3]{y^3} & \dfrac{by^2}{3\sqrt[3]{y^6}} & & \\
\hline
\boxed{\sqrt[3]{1y^9}} & +\,3\sqrt[3]{y^6} & +\,3\sqrt[3]{y^3} & 1\sqrt[3]{y^\circ} \\
\hline
 & \boxed{-\,\dfrac{by^2 3\sqrt[3]{y^6}}{3\sqrt[3]{y^6}}} & & \\
 & -\,\dfrac{by^2 3\sqrt[3]{y^6}}{3\sqrt[3]{y^6}} & -\,\dfrac{b^2y^4}{9\sqrt[3]{y^{12}}} & \dfrac{b^3y^6,\,1\sqrt[3]{y^\circ}}{27\sqrt[3]{y^{18}}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
y^3 & +\,by^2 & +\,c^2y^1 & +\,d^3 \\
\hline
y & +\,e & & \\
\hline
y^3 & +\,3y^2e & 3ye^2 & e^3
\end{array}$$

Ut radices extrahi possunt ope binomiorum, ita et ope Trinomiorum, tunc cum aequationes sunt duarum incognitarum.

Si jam velimus radicem extrahere ex

$$\begin{array}{lllll}
0 \sqcap y & \boxed{+\,b} & +\,\dfrac{c^2}{y} & +\,\dfrac{d^3}{y^2} & \\
\hline
\sqrt[1]{y} & \dfrac{b}{1} & \dfrac{c^2}{y^2} & \text{etc.} & \\
\hline
-\,y & +\,1 & \cancel{\dfrac{b}{1}} & b & \\
 & \boxed{-b} & y & & \\
 & \cancel{y} & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
y^2 & +\,by & +\,c^2 & \dfrac{d^3}{y} & \dfrac{e^4}{y^2} \\
\hline
y & b & \dfrac{c^2}{2y} & & \\
\hline
-\,y^2 & -\,2yb & -\,1b^2 & -\,2b,\ \dfrac{c^2}{2y} & -\,\dfrac{c^4}{4y^2} \\
 & \boxed{2y \quad 2b} & & & \\
 & & 2y,\ \dfrac{c^2}{2y} & &
\end{array}$$

Sit aequatio quaelibet ut $y^3 + by^2 + c^2y + d^3 \sqcap 0$. Ex ea radix extrahi potest tum ut fiat, tum etiam ut ex superiore: $y^4 + by^3 + c^2y^2 + d^3y \sqcap 0$ per extractionem radicis quadratoquadraticae, tum etiam per inferiorem, si fiat: $y^2 + by + c^2 + \dfrac{d^3}{y} \sqcap 0$ per ex-

9–13 *Zum linken Schema, mit Bezug auf S. 275 Z. 1–3:* ∘

10 etc. | inepte redeunt priora fit enim y $\dfrac{\mathrm{b}}{1}$ $\dfrac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{y}^2}$ *gestr.* | *L*

tractionem radicis quadraticae, imo et per simplicem, si fiat: $y + b + \frac{c^2}{y} + \frac{d^3}{y^2} \sqcap 0$ per extractionem radicis simplicis, et ad hanc extractionem radicis simplicis omnes reduci possent aequationes, quod si ut in methodo Vietae ope extractionis ordinariae ex aequatione $y^3 + by^2 + c^2x + d^3 \sqcap 0$ provenit radix rationalis exacta si qua est, etiam spes est ex simplicibus radicem exactam prodire. Quae foret pulcherrima ratio investigandi aequationum radices, quae simul exactam et proximam verae daret, nisi quod difficultas ab eo, quod non facile in numeris tractabilis, ob fractas. Atque hac methodo quaevis radix tam facile extrahi potest quam quadratica. Imo nihil est, quia sic y in suum valorem ingreditur.

$$\begin{array}{lllll}
\boxed{y^2} & \boxed{+\frac{1}{c}y^3} & +\frac{1}{d^2}y^4 & +\frac{1}{e^3}y^5 & \sqcap 0\,. \\
\hline
y^1 & \frac{1}{2c}y^2 & \frac{1}{2d}y^3 & & \\
\hline
\boxed{-y^2} & \boxed{-2y, \frac{1}{2c}y^2} & + \quad -1, \frac{1}{4c^2}y^2 & & \\
 & & \underbrace{2y, \frac{1}{2d}y^3}_{\ldots\, y^4} & \underbrace{-\frac{1}{c}y^2, \frac{1}{4d^2}y^6}_{\ldots\, y^8} &
\end{array}$$

ubi nota subtrahendos semper procedere per exponentes geometricos duplos. Videndum.

$a \sqcap by + c^2y^2 + d^3y^3 + e^4y^4$ etc.

Ergo $y \sqcap fa + g^2a^2 + h^3a^3 + l^4a^4$ etc. Quaeruntur $f.\ g^2.\ h^3.\ l^4.$

---

3 *Über* possent *mit Bezug auf S. 274 Z. 9–13, linkes Schema:* $\circ$

16 *Nebenbetrachtung:* $\not{a} + by + c^2y^2 + d^3y^3 + e^4y^4$ etc. $\sqcap 0 \not{f} \frac{b}{a}y$

$\not{a}$

$by \sqcap a - c^2y$

---

3 ope extractionis ordinariae: vgl. Fr. Viète, *De numerosa potestatum resolutione*, 1600, Bl. 9 r° bis 12 v° (*VO* S. 176–183). 10–15 Die Rechnung enthält Versehen und führt zu einer falschen Schlussfolgerung, über die Leibniz offenbar im Zweifel bleibt.

Ergo $\boxed{by + fa} \sqcap fby \qquad fc^2y^2$

$0 \qquad bfa \qquad g^2ba^2$

$\dfrac{1}{1+y^2} \sqcap 1 - y + y^3 - y^5 + y^7 - y^9$ etc. Pro y pone $x + b$. fiet:

---

3 *Späterer Zusatz:*

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{y^2}{1+y^2} \sqcap & y^2 - & y^4 + y^6 - y^8 \\
& x^2 & x^4 \\
& +2bx & 4x^3b \\
& +\ b^2 & 6x^2b^2 \\
& & 4xb^3 \\
& & +\ b^4 \\
\hline
& \dfrac{x^3}{3} - & \dfrac{x^5}{5} \\
& \dfrac{2bx^2}{2} & +\ \dfrac{4x^4b}{4} \\
& \dfrac{b^2x}{1} & +\ \dfrac{6x^3b^2}{3} \\
& & +\ \dfrac{4x^2b^3}{2} \\
& & +\ \dfrac{b^4x}{1}
\end{array}$$

Si ponas $y \sqcap x - b$ et postea $\xi \sqcap b$ redibis ad priora $\dfrac{y^3}{3} - \dfrac{y^5}{5}$ etc. NB. ponatur y aequ. $x - b$ et fiet:

---

3 $\dfrac{1}{1+y^2} \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung müsste $1 - y^2 + y^4 - y^6 + y^8 - y^{10}$ etc. stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter bis S. 278 Z. 16.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1 & - & x & + & x^3 & - & x^5 \\ & - & b & + & 3x^2b & - & 5x^4b \\ & & & + & 3xb^2 & - & 10x^3b^2 \\ & & & + & b^3 & - & 10x^2b^3 \\ & & & & & - & 5xb^4 \\ & & & & & - & b^5 \end{array}$$

$$\int \overline{\frac{y^2}{1+y^2}} \text{ aequ. } + \frac{x^3}{3} \quad - x^4 \smile 5 \qquad \text{etc. ubi nota } \frac{1}{3} - \frac{2}{2} + \frac{1}{1} \text{ esse } \frac{1}{3} \text{ et}$$

$$- \frac{2bx^2}{2} + 4b^1x^3 \smile 4$$

$$+ \frac{b^2x}{1} - 6b^2x^2 \smile 3$$

$$+ 4b^3x^2 \smile 2$$

$$- 1b^4x \smile 1$$

$\frac{1}{5} - \frac{4}{4} + \frac{6}{3} - \frac{4}{2} + \frac{1}{1}$ aequ. $\frac{1}{5}$. Unde posita $b \sqcap x$ aequ. 1. redit prior series $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ etc. Sed si ponas $y \sqcap x + b$. prodit alia.

1–6 *Nebenrechnung:*

1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	10	15	21
4	10	20	35	56
5	15	35	70	
6	21	56		
7	28	84		
8	36			
9	45			
10	55			
11	66			

7–9 $-x^4 \smile 5$: Es müsste $- x^5 \smile 5$ heißen, darunter $+ 4b^1x^4 \smile 4$ u. $- 6b^2x^3 \smile 3$.

Horum summa $(x) - \frac{(x)^2}{2} + \frac{(x)^4}{4} - \frac{(x)^6}{6}$ etc. (x) in parenthesi est ultima earum

$$\begin{aligned}
&- b(x) + \frac{3(x)^3 b}{3} - \frac{5(x)^5 b}{5} \\
&\quad + \frac{3(x)^2 b^2}{2} - \frac{10(x)^4 b^2}{4} \\
&\quad + b^3(x) - \frac{10(x)^3 b^3}{3} \\
&\qquad - \frac{5(x)^2 b^4}{2} \\
&\qquad - (x) b^5
\end{aligned}$$

seu maxima.

Hic jam eleganti artificio utemur, ponemus b. arbitrariam aequalem fuisse assumtam ipsarum x. maximae, (adeoque pro qualibet portione metienda aliud nos punctum fixum assumsisse,) seu

$$x \sqcap b. \text{ fiet : } b - b^2 \frown \frac{1}{2} + b^4 \frown \left.\begin{matrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{3} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{1} \end{matrix}\right\} \frac{15}{4} b^4 \qquad - b^6 \frown \left.\begin{matrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{5} \\ \frac{10}{4} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{1} \end{matrix}\right\} \frac{63}{6} b^6$$

$$\begin{matrix} 1 \\ \hline - \frac{3}{2} b^2 \end{matrix}$$

Summa est ex harmonicis in Combinatorios. Talium numerorum quaerenda est summa:

17 *(1)* At alibi a me inventum est, si numeri harmonici multiplicentur in Combinatorios semper *(2)* summa L

$$1 \text{ in } \frac{1}{1} \qquad \frac{1}{1}$$

$$1\ 1 \text{ in } \frac{1}{1}\ \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{1}\ \frac{1}{2} \sqcap \frac{1,2,+1}{1,2} \sqcap \frac{3}{2}$$

$$1\ 2\ 1 \text{ in } \frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{1}\ \frac{2}{2}\ \frac{1}{3} \sqcap \frac{2,3,,1+1,3,,2+1,2,,1}{1,2,3} \sqcap \frac{14}{6}$$

$$1\ 3\ 3\ 1 \text{ in } \frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{1}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{3}\ \frac{1}{4} \sqcap \frac{2,3,4,,1+1,3,4,,3+1,2,4,,3+1,2,3,,1}{1,2,3,4} \sqcap \frac{78}{24}$$

$\frac{y}{1}$	1 vel 2 vel 3 vel 4	⌢ per 1 dat ⊙	y
$\frac{y}{1}, \frac{y-1}{2}$	1 vel 3 vel 6	per 2	$\frac{y}{1},\ y-1$
$\frac{y}{1}, \frac{y-1}{2}, \frac{y-2}{3}$	1 vel 4 vel 10	per 3	$\frac{y}{1}, \frac{y-1}{2},\ y-2$

Dividantur haec ⊙ ordine per arithmeticos, $y, y-1, y-2$, fient quantitates, ☽ $\begin{cases} 1 & \text{etc.} \\ \frac{y}{1} \\ \frac{y}{2},\ y-1 \end{cases}$

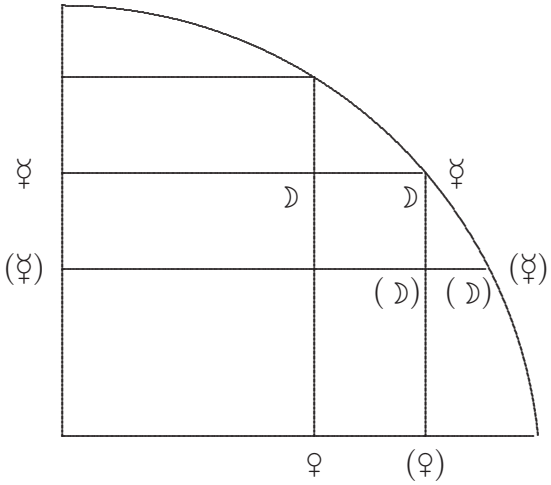
Si ex ☽. auferatur 1. reliquorum semper haberi potest summa quia sunt potestates a 2. ipsi nempe combinatorii quae summae sunto ☿. Ergo dantur et omnia rectangula (☽) (☽) (☿). ☽ ☽ ☿. seu ipsae ☽ multiplicatae per $y, y-1, y-2$, id est ipsae ⊙ quae quaerebantur. Quae summas inveniendi methodus pulchra videtur et jam alias mihi successit. Theorema enim in hanc rem habeo pulcherrimum, si seriei per arithmeticos divisae summa summarum haberi potest, ipsa series summari potest.

Si seriei per arithmeticos divisae summa summarum haberi potest, ipsius seriei haberi potest summa, ut series per arithm. divisa ♀ fit ☽. Ipsarum ☽ summa est ☿. Summa

10 $\frac{y}{1}, y-1$ *L ändert Hrsg.* 15 summa *(1)* haberi potest, ipsa series haberi *(2)* summarum *L*
17 summa *(1)* haberi potest, ipsa series *(2)* summarum *L*

---

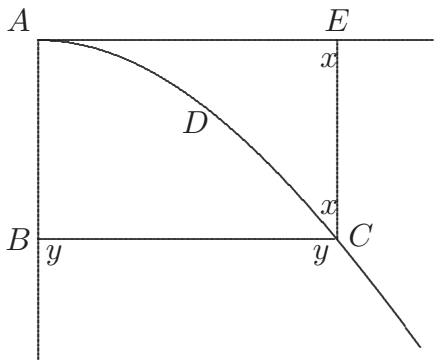
4 $\frac{78}{24}$: Richtig wäre $\frac{90}{24}$. 14 alias: vgl. z. B. VII, 3 N. $38_{2\text{-}3}$, VII, 3 N. 40 u. VII, 5 N. 38 S. 268.
14 Theorema: vgl. VII, 3 N. 40 S. 578 Z. 5 – S. 579 Z. 4.



[*Fig. 1*]

summarum seu summa omnium ☿ est eadem cum area figurae seu summa omnium ♀ in ☽.

Si seriei (ipsarum ☽) per arithmeticos (♀) multiplicatae summa habetur (area figurae) habetur et ejus summa summarum (seu summa omnium ☿).



[*Fig. 2*]

$y \sqcap \frac{x^2 a}{a^2+x^2}$. pendet ex quadratura Circuli; ergo et $z \sqcap \frac{ax}{a^2+x^2}$ ex quadratura Hyperbolae, ergo quadratura Hyperbolae et Circuli ex se invicem pendent si verum esset seriei per arithmeticos divisae summa data seriei summam dari.

$x^2y + a^2y \sqcap x^2a$. Ergo $x^2 \sqcap \frac{a^2y}{a-y}$. Ergo omnes x^2, seu momentum complementi, seu ipsius $AECDA$ ex AE pendet ex quadratura Hyperbolae. Ergo omnes $\overline{y \text{ in } x}$. seu momentum figurae $ABCDA$ pendet etiam ex quadratura Hyperbolae. At omnes yx sunt: $\frac{x^3}{a^2+x^2}$ ergo haec figura pendet ex quadratura Hyperbolae. Sumatur ejus differentia ab x, triangulo, fiet: $\dagger x \dagger \frac{x^3}{a^2+x^2} \sqcap \frac{\dagger a^2x \dagger x^3, \dagger x^3}{a^2+x^2} \sqcap \frac{a^2x}{a^2+x^2}$. Ergo $\frac{a^2x}{a^2+x^2}$ habetur ex quadratura Hyperbolae, vel contra Quadratura Hyperbolae ex ipsa.

Ipsae $\frac{a^2x}{a^2+x^2}$ sint velut ☽. ☿ $\sqcap \int$☽. habentur ex quad. Hyp. Quod si jam haberi potest $\iint$☽ seu $\int$☿. habebitur $\int \overline{☽ \text{ in } x}$ seu $\int \overline{\odot}$ seu $\int \overline{\frac{x^2a}{a^2+x^2}}$. Ergo ex data summa summarum Hyperbolae, seu ex data summa figurae Logarithmicae datur Quadratura Circuli. Nisi fallor autem datur summa Logarithmorum ex data Hyperbolae Quadratura, (videnda quae in hanc rem habet Wallisius), quia ex data Hyperbolae Quadratura datur ejus momentum ex alio quam centro (momentum autem dat summam summarum seu summam Logarithmorum[)]. Ergo datur Quadratura Circuli ex data Hyperbolae Quadratura, imo et ut arbitror contra.

3 si ... dari *erg. L*

10 velut ☽: s. o. Fig. 1. 11 Ergo: Die Folgerung, die Leibniz in Z. 16 f. wiederholt, ist nicht richtig, da $\iint \frac{ax}{a^2+x^2}$ sowohl von der Hyperbel- wie von der Kreisquadratur abhängt. 13 summa Logarithmorum: vgl. VII, 5 N. 38 S. 268. 14 videnda: vgl. J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, in: *Philosophical Transactions* III, Nr. 38 vom 17./27. August 1668, S. 756.

[*Teil 2*]

Videndum an infinitae parabolae surdae serviant ad Circuli vel Hyperbolae summam: $\frac{a-b}{a} \sqcap \frac{a}{z}$. seu $z \sqcap \frac{a^2}{a-b} : a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2}$ [etc.] Sit $z \sqcap \sqrt{d^2 - x^2}$. $za - bz \sqcap a^2$. et $b \sqcap \frac{za - a^2}{z}$. Ergo $b \sqcap a - \frac{a^2}{\sqrt{d^2 - x^2}}$. Sit $a \sqcap c\sqrt{d-x}$. fiet $b \sqcap c\sqrt{d-x} - \frac{c^2, d-x}{\sqrt{d^2-x^2}} \sqcap$ $c\sqrt{d-x} - \frac{c^2, \sqrt{d-x}}{\sqrt{d+x}}$ et $b^2 \sqcap \overline{d-x}, +1 - 2c^2 \sqrt{\frac{d-x}{d+x}} + c^4 \frac{d-x}{d+x}$. Porro $\sqrt{\frac{d-x}{d+x}}$ quadrari potest, pendet enim ex circuli summa summarum, quia momentum ejus pendet ex circulo.

$a \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}$ etc. est aequatio curvae factae ex applicatione arcuum ad tangentes. Jam ob Triangula similia $\underbrace{GWL}$. $\underbrace{ABC}$. unde AB in $GL \sqcap GW$ in AC. Hujus ergo figurae quadratura quae fiet arcubus ad tangentes applicatis, vel tangentibus arcui postea in rectum extenso insistentibus, coincidit quadraturae Hyperbolae, ergo hujus summae: $\int a \sqcap \frac{y^2}{1,2} - \frac{y^4}{3,4} + \frac{y^6}{5,6}$ etc. complementum coincidit spatii Hyperbolici complemento.

---

3 *Nebenrechnung:*

a

$a - b$

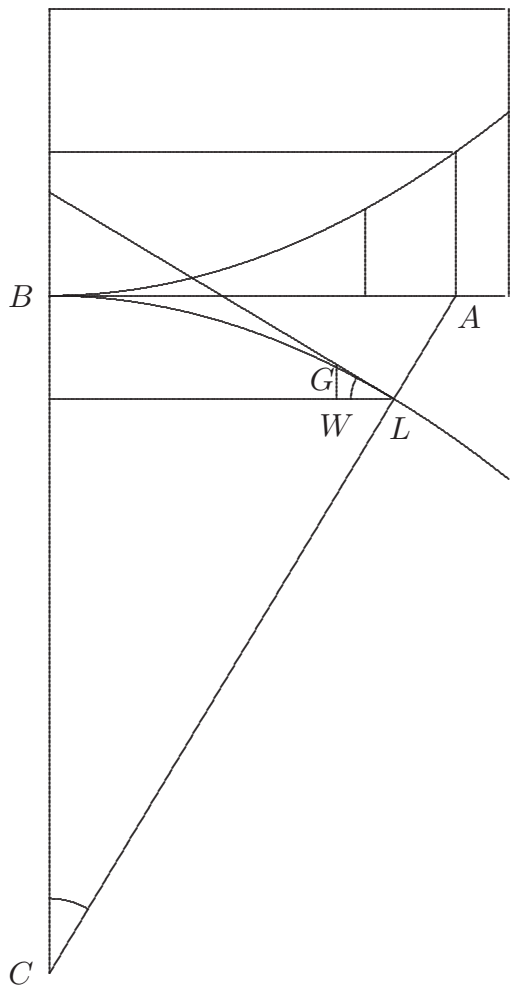
b

$\frac{b^2}{a}$

5 $\mathrm{b}^2 \sqcap$ *(1)* $\mathrm{c}^2\ \overline{\mathrm{d}-\mathrm{x}}, +1- \,|\, 2\mathrm{c}$ *erg.* $|\ \sqrt{\frac{\mathrm{d}-\mathrm{x}}{\mathrm{d}+\mathrm{x}}} + \,|\, \mathrm{c}^2$ *erg.* $|\ \frac{\mathrm{d}-\mathrm{x}}{\mathrm{d}+\mathrm{x}}$ *(2)* $\overline{\mathrm{d}-\mathrm{x}}\ L$

---

5 $b^2 \sqcap$: Richtig wäre $b^2 = c^2(d-x) + \frac{2c^3(d-x)}{\sqrt{d+x}} + \frac{c^4(d-x)}{d+x}$. 10 coincidit: Die Quadratur hängt sowohl von der Kreis- wie von der Hyperbelquadratur ab.

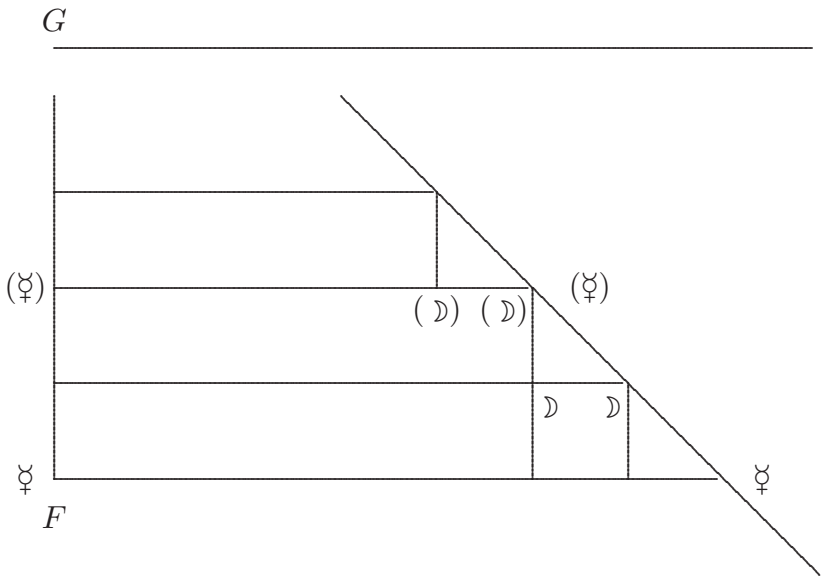


[*Fig. 3*]

Sint ☽. ipsae: $\frac{y}{1}$. $\frac{y^5}{5}$. $\frac{y^9}{9}$. etc. (vel etiam ipsae $\frac{y^3}{3}$ $\frac{y^7}{7}$ $\frac{y^{11}}{11}$ etc.) Maximus ex ipsis ☿ erit arcus (si altera seu summa $\frac{y^3}{[3]}$ etc. ipsi subtrahatur). ☽. in F☿ distantia, a vertice complent spatium complementale, eae autem sunt summae earum $\frac{\langle 1\rangle}{1+y^2}$ progressionis Geometricae. Ergo et ipsa summa ipsarum (☿). ☿ etc. haberi potest.

4 summae earum $\frac{\langle 1\rangle}{1+\mathrm{y}^2}$ *erg. L*

1 *Fig. 3*: Die Skizze von Leibniz gibt den Verlauf der Arkustangenskurve nicht richtig wieder.



[*Fig. 4*]

Caeterum spatium procurret in infinitum versus G. Si idem in quolibet arcu factum intelligatur, et unum spatium alteri superponatur, fiet omni⟨um⟩ ⟨sp⟩atiorum ☿ summa. Cujus area sit Rectangulum solidum sub GF☿ basi, altitudine respondente numero arcuum vel tangenti maximae: demta $\int \frac{1}{1+y^2}$.

Notabile in his spatiis si intervalla essent infinite parva, tamen duo proxima figurae puncta non haberent distantiam infinite parvam; ideoque talem figuram non puto esse realem seu possibilem, tametsi per puncta describi possit.

Quoniam arcus $\sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}$ etc. erit $d\overline{a}$ seu $GL \sqcap 1 - y^2 + y^4 - y^6$. etc. seu $d\overline{a} \sqcap GL \sqcap \frac{1}{1+y^2}$. Quod an verum sit videamus. $GL \sqcap \frac{1}{\text{sin.}}$. Tangente posita y.

9 GL: s. o. Fig. 3. 10 videamus: Leibniz bildet nun die Differenz nach dem Sinus versus und nicht wie zuvor nach dem Tangens y. Deshalb verfehlt er die Verifikation, wie er in S. 285 Z. 5 erkennt.

erit $\frac{y}{a} \sqcap \frac{\sin}{\text{sin. compl.}} \sqcap \sqrt{a^2 - \sin^2}$. et $\frac{y^2}{a^2} \sqcap \frac{\sin^2}{a^2 - \sin^2}$. Ergo $y^2a^2 - y^2\sin^2 \sqcap a^2\sin^2$. et $\sin^2 \sqcap \frac{y^2a^2}{a^2+y^2}$. et $\sin \sqcap \frac{ya}{\sqrt{a^2+y^2}}$. et denique erit $GL \sqcap \frac{\sqrt{1\cancel{a^2}+y^2}}{y\cancel{a}}$ cum tamen debeat esse $\frac{1}{1+y^2}$. Difficultas ingens. Si non obstaret haec difficultas possent semper pulchre duci tangentes figurarum transcendentium. Imo difficultas nulla. Error fuit quod $d\bar{a}$ assumi sine $d\bar{t}$. 5

[*Teil 3*]

$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-y^2}} - \sqrt{a^2-y^2} \sqcap \frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}$ quae etiam pendet ex quad. circ.

$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-y^2}} \sqcap x$. vel $\frac{a^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^2-y^2}$ vel si $\sqrt{a^2-y^2} \sqcap s$. fiet $\frac{a^2s}{a^2-y^2}$, seu $s + \frac{sy^2}{a^2}$

---

1 f. *Nebenbetrachtung:* Sin. $\sqrt{a^2-y^2}$. Differentia arcus $\sqcap \frac{a\beta}{\sqrt{a^2-y^2}}$. Ponatur [differentia] arcus esse constans erit $\beta \sqcap a\sqrt{a^2-y^2}$ eritque $y \sqcap$ ordinata figurae quadratricis meae seu figurae summae sinuum.

9 $\sqrt{a^2-y^2}$ *(1)* arcus *nicht gestr.* *(2)* differentia *L* 10 f. qvadratricis *(1)* communis arcu ergo posito *(2)* meae *L*

---

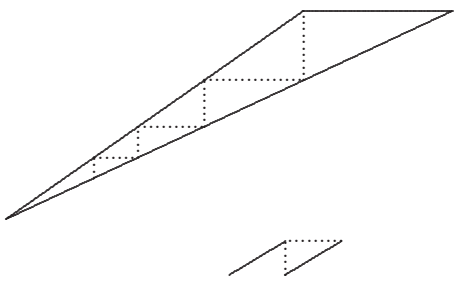
1 $\frac{y}{a}$: Neben dem Bogen bezeichnet Leibniz nun auch den Radius mit a. 5 $d\bar{t}$: Gemeint ist dy. 9–11 Die Nebenbetrachtung enthält Versehen, die Leibniz nur unvollständig korrigiert hat: In diesem Ansatz, den Leibniz in Teil 3 wieder aufnimmt, wäre y der sinus complementi, β die differentia sinus versi mit $\beta = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\, d(\text{arc})$. Damit wäre y zwar die Ordinate der figura summae sinuum aber nicht der figura segmentorum des Kreises.

$+s^2y^4 + s^3y^6 + s^4y^8$ etc. ubi excerpuntur omnes termini in quibus s^2. s^4. etc. Sunt enim pure rationales; reliqui redibunt ad quadraturas figurarum a Wallisio interpolatarum.

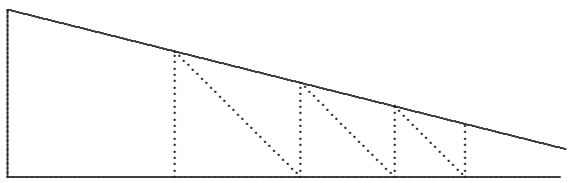
Dabitur $\int \frac{a^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^2-y^2} \sqcap \int x$. si dentur $\int \frac{a\sqrt{a^2-y^2}}{a+y}$ et $\int \frac{a\sqrt{a^2-y^2}}{a-y}$. Ergo requiritur $\int a\sqrt{\frac{a-y}{a+y}} \sqcap \int z$ et $\int a\sqrt{\frac{a+y}{a-y}} \sqcap \int \omega$. Horum summa circuli quadraturam dabit: nempe $\int z + \int \omega$. seu aream sectoris. Videmus quae sunt figurae ad ω et z. fiet: $a^2\frac{a+y}{a-y} \sqcap \omega^2$. et $a^3 + a^2y \sqcap a\omega^2 - y\omega^2$. et $y \sqcap \frac{a\omega^2 - a^3}{a^2+\omega^2}$ et $a^3 - a^2y \sqcap z^2a + z^2y$: et $\frac{a^3 - z^2a}{a^2+z^2} \sqcap [y]$.

$\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a+y} \sqcap \sqrt{\frac{a-y}{a+y}}$. Horum momentum ex vertice pendet ex quadratura circuli, ergo et $\int y^2$.

[*Teil 4*]



[*Fig. 5a*]



[*Fig. 5b*]

1 $+s^2y^4+ \ldots$ etc.: Richtig wäre $+\frac{sy^4}{a^4} + \frac{sy^6}{a^6} + \frac{sy^8}{a^8}$ etc. Es treten also nur irrationale Terme in der Reihe auf. 2 interpolatarum: vgl. J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. CLXXXIX, S. 169 f. (*WO* I S. 462 f.).

24. CALCULUS ARCUS CIRCULI EX TANGENTE
[Anfang Juni – 29. Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 123. 1 Bl. 2°. 2 S. Die Teile 2 u. 3 sind vermutlich im Verlauf eines Gesprächs aufgezeichnet worden.
Cc 2, Nr. 1486

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den 8. Juni 1676 belegt (s. N. 23). Leibniz übernimmt einen fehlerhaften Wert in das auf den 29. Juni 1676 datierte N. 27 (vgl. die Erl. zu S. 288 Z. 2). Weitere Übernahmen finden sich in Teil 1 von N. 25, wo die fehlerhafte Konstruktion aus Teil 2 von N. 24 durch eine verbesserte ersetzt ist.

[*Teil 1*]

$$\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}.$$

$$\text{Sit } y \sqcap \frac{1}{2}. \text{ erit } - \frac{y^3}{3} \sqcap - \frac{1}{24} + \frac{y^5}{5} \sqcap + \frac{1}{160} - \frac{y^7}{7} \sqcap - \frac{1}{896} + \frac{y^9}{9} \sqcap + \frac{1}{4608} - \frac{y^{11}}{11} \sqcap - \frac{1}{22528} + \frac{y^{13}}{13} \sqcap + \frac{1}{106496}$$

12 *Nebenrechnungen zu Z. 12 – S. 289 Z. 3:*

1	2	2048	8192
2	4	2048	13
3	8	22528	24576
5	32		8192
7	128		106496
9	512		
11	2048		
13	8192		

$$y \sqcap \frac{1}{3} \quad - \frac{y^3}{3} \sqcap - \frac{1}{81} \quad + \frac{y^5}{5} \sqcap + \frac{1}{1215} \quad - \frac{y^7}{7} \sqcap - \frac{1}{15309} \quad + \frac{y^9}{9} \sqcap + \frac{1}{177147}$$

$$y \sqcap \frac{1}{4} \quad - \frac{y^3}{3} \sqcap - \frac{1}{92} \quad + \frac{1}{5120} \quad - \frac{1}{114688}$$

$$y \sqcap \frac{1}{5} \quad - \frac{1}{375} \quad + \frac{1}{15625} \quad - \frac{1}{546875}$$

---

1 *Nebenrechnungen:*

1	3	27	243	2187	19683
2	9	3	5	7	9
3	27	81	1215	15309	177147
5	243				
7	2187				
9	19683				

2 *Nebenrechnungen:*

1	4	64	32	1024
2	16	3	32	16
3	64	192	64	6144
5	1024		96	1024
7	16384		1024	16384
			5	7
			5120	114688

3 *Nebenrechnungen:*

1	5	125	$\cancel{1}\cancel{2}500 \mathbin{\cancel{:}} 3125$		$\cancel{3}$	78125
2	25	3	$\cancel{4}\cancel{4}$	5	$\cancel{3}\cancel{1}\cancel{2}500 \mathbin{\cancel{:}} 78125$	7
3	125	375		15625	$\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}$	546875
5	3125					
7	78125					

---

2 $- \frac{1}{92}$: Leibniz schreibt versehentlich im Nenner 92 statt 192, rechnet aber mit dem richtigen Wert aus der Nebenrechnung weiter. Den falschen Wert übernimmt er in N. 27 S. 305 Z. 4.

$$y \sqcap \frac{1}{6} \qquad -\frac{1}{648} \qquad +\frac{1}{38880} \qquad -\frac{1}{1959552}$$
$$y \sqcap \frac{1}{7} \qquad -\frac{1}{1029} \qquad +\frac{1}{84035} \qquad -\frac{1}{5764801}$$
$$y \sqcap \frac{1}{8} \qquad -\frac{1}{1536} \qquad +\frac{1}{163840}$$

Hinc patet si tangens, y, sit minor octava radii parte, tunc arcu posito $\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3}$ defectum a veritate fore parte radii 163840ma minorem.

---

1 *Nebenrechnungen:*

1	6	27	216	7776
2	36	8	36	36
3	216	216	1296	46656
5	7776	3	648	23328
7	279936	648	7776	279936
			5	7
			38880	1959552

2 *Nebenrechnungen:*

1	7	343	343	343	16807	1680700
2	49	3	49	50	49	840350
3	343	1029	3087	17150	151263	16807
5	16807		1372	343	67228	823543
7	823543		16807	16807	823543	7
			5			5764801
			84035			

3 *Nebenrechnungen:*

1	8	512	512	32768
2	64	3	64	5
3	512	1536	2048	163840
5	32768		3072	
			32768	

Si radius 1000,000, erit peripheria: 6283185 justo minor.

Si radius 1. peripheria $\frac{6283185}{1000,000}$.

Si tangens sit minor sexta parte radii, error in calculando angulo erit minor $\frac{13}{23}$ secundi scrupuli.

5 Si sit tangens minor quinta parte arcus erit [*bricht ab*]

---

3 f. *Nebenrechnungen:*

360	38880	23|0000	$\not\vdash$	$\frac{13}{23}$
36 0	6	13|0		
21600	233280			
108				
129600				

Auf der Rückseite:

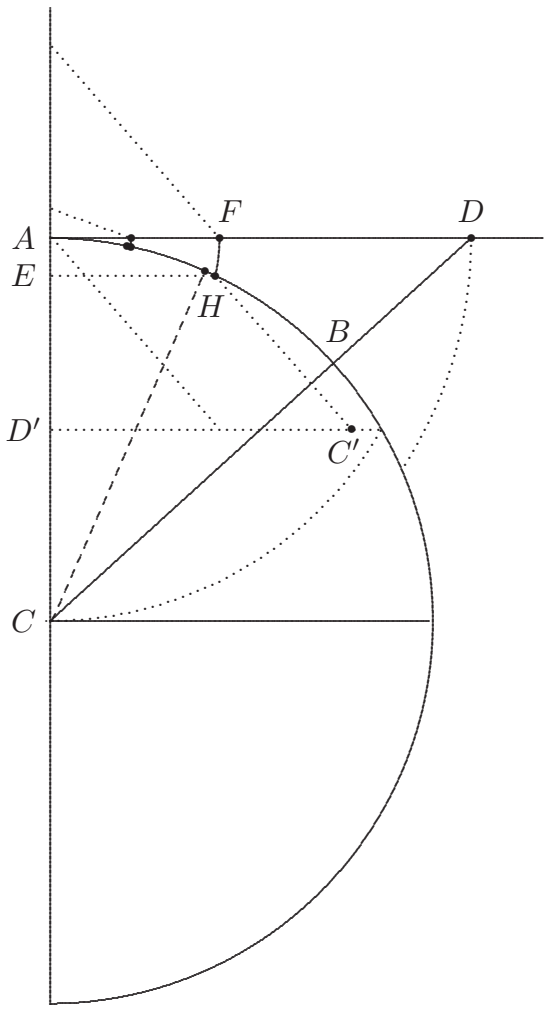
360	$\not\vdash$	3600
60		6
		216000
		6
		1296000

2 f. $\frac{6283185}{1000,000}$. *(1)* $\frac{1}{100,000}$ *(2)* | Centesima | millesima *erg.* | pars radii est minor qvam $\frac{1}{600,000}$ peripheriae; ergo minor qvam pars decima millesima gradus ergo minor qvam centesima centesimae gradus, ergo longe minor error qvam unius minuti secundi quod est $\frac{1}{3600}$. ergo error non est dimidii minuti secundi *gestr., daneben nicht gestr.:* male, *Nebenbetrachtung, nicht gestr.:* $\frac{\mathrm{r}}{\pi} \sqcap \frac{100,000}{628318}$. Ergo $\mathrm{r} \sqcap \frac{100,000}{628318}\pi$. Ergo $\frac{1}{100,000}\mathrm{r}. \sqcap \frac{1}{628318}\pi$. | Si L

---

3 minor $\frac{13}{23}$: Wie die Nebenrechnung zeigt, hat Leibniz die Anzahl der Sekunden um den Faktor 10 zu niedrig berechnet; die Abschätzung müsste also $\frac{130}{23}$ lauten. In der Nebenrechnung auf der Rückseite hat er das Ergebnis der Multiplikation nachträglich zum richtigen Wert ergänzt.

[*Teil 2*]



[*Fig. 1*]

$$AD \sqcap y. \quad AB \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3}\Big| + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}.$$

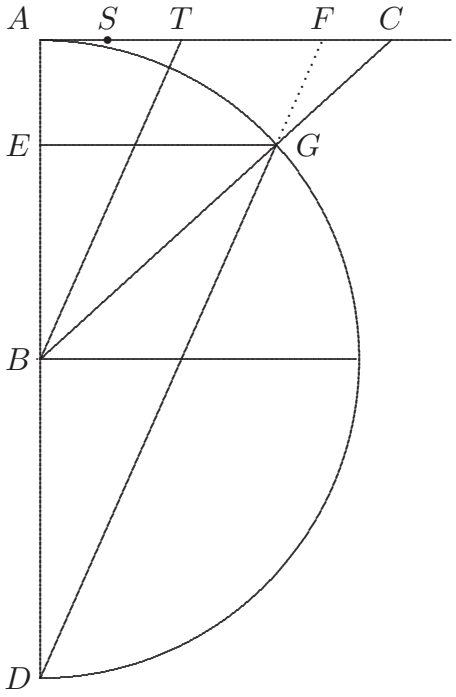
$$\frac{1}{10} - \frac{1}{3000}\Big| + \frac{1}{500,000}.$$

$$AF \sqcap y. \quad \frac{y^3}{a^2} \sqcap b. \quad \frac{b}{y} \sqcap \frac{y^2}{a^2} \sqcap \frac{HE}{C'D'}.$$

5

4 $\sqcap \frac{HE}{C'D'}$: Die Aussage ist nicht richtig; Leibniz gibt eine gültige Konstruktion in N. 25.

5 *Fig. 1*: Leibniz hat jeweils zwei verschiedene Punkte mit C und D bezeichnet. Zur Vermeidung von Verwechslungen wird ein Punktepaar mit C', D' benannt.

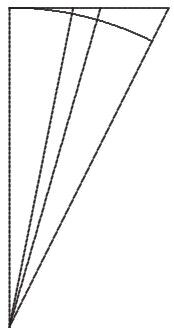


[*Fig. 2*]

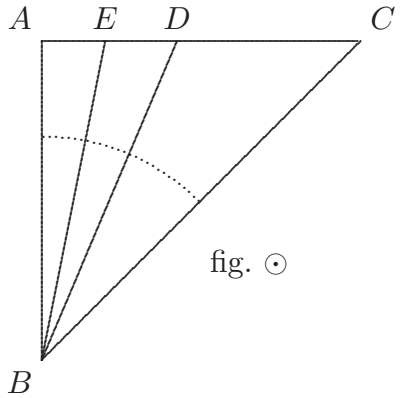
$AB \sqcap a$. $AC \sqcap b$. $BC \sqcap c$. $AF : EG :: AD : ED$. $AF \sqcap \frac{EG, AD}{ED}$. $\frac{EG}{AC \sqcap b} \sqcap \frac{BG \sqcap a}{c}$. $EG \sqcap \frac{ba}{c}$. $\frac{EB}{BG \sqcap a} \sqcap \frac{a}{c}$. $EB \sqcap \frac{a^2}{c}$. $ED \sqcap \frac{a^2}{c} + a \sqcap \frac{a^2 + ac}{c}$. $AF \sqcap \frac{\frac{ba}{\cancel{c}}, 2\cancel{c}}{\frac{a^{\cancel{2}} + c\cancel{c}}{\cancel{c}}}$. $AF \sqcap \frac{2ba}{a+c}$.

$AT \sqcap \frac{ba}{a+c}$. $\underset{(B)}{AT} \sqcap \frac{ba}{a + \sqrt{b^2 + a^2}}$. $AT^2 \sqcap \frac{b^2 a^2}{2a^2 + b^2 + 2a\sqrt{b^2 + a^2}}$. $AS \sqcap \frac{a(B)}{a + \sqrt{(B)^2 + a^2}}$.

$$AS \sqcap \frac{aba}{a + \sqrt{\frac{b^2 a^2}{2a^2 + b^2 + 2a\sqrt{b^2 + a^2}} + a^2}}.$$



[*Fig. 3a*]



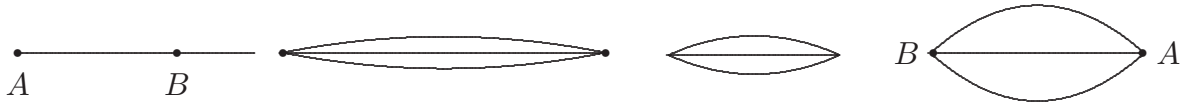
[*Fig. 3b*]

7 $AS \sqcap \frac{aba}{a + \sqrt{\frac{b^2 a^2}{2a^2 + b^2 + 2a\sqrt{b^2 + a^2}} + a^2}}$.: Im Nenner fehlt der Faktor $a + \sqrt{b^2 + a^2}$. Der Fehler beeinträchtigt die folgende Berechnung von AE nicht.

$AC \sqcap 1 \sqcap b$. $AB \sqcap 1 \sqcap a$. $BC \sqcap \sqrt{2} \sqcap c$. $AD \sqcap \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$. $1+\sqrt{\dfrac{1}{1+2+2\sqrt{2}}+1}$. $1+\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$. Ergo $AE \sqcap \dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$. $\sqrt{2} \sqcap \dfrac{7}{5}$ circiter. $3+\dfrac{14}{5} \sqcap \dfrac{15+14}{5} \sqcap \dfrac{29}{5} \sqcap \dfrac{145}{25} \overset{\surd}{\sqcap} \dfrac{\langle 12\rangle}{5}$. $34 \frown 5 \sqcap \dfrac{170}{25} \overset{\surd}{\sqcap} \dfrac{13}{5}$. $\dfrac{13}{5}+\dfrac{12}{5} \sqcap \dfrac{25}{5} \sqcap 5$. Ergo AE fig. $\odot$. est minor quam 5ta pars radii.

$\begin{smallmatrix}45\\4\end{smallmatrix} \not\int 11+\dfrac{1}{4}$. Si arcus minor quam $11+\dfrac{1}{4}$ grad. minor error quam $1+\dfrac{1}{3}$ secundi minuti.

[*Teil 3*]



[*Fig. 4*] [*Fig. 5a*] [*Fig. 5b*] [*Fig. 5c*]

---

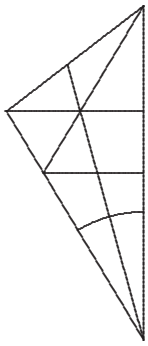
2 f. *Nebenbetrachtung:*

$$\begin{array}{r}
1\\
\cancel{2}\,1\\
\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{4}\,\cancel{2}\,4\\
\cancel{2}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\hline
\cancel{1}\quad 4\quad 2\\
\hline
\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{4}\,\cancel{4}\,\cancel{3}\\
\cancel{1}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\cancel{1}\,1\\
\cancel{5}\,\cancel{2}\,6\\
\cancel{1}\,\cancel{4}\,\cancel{9}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,0\,0\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\hline
\cancel{1}\quad 2\quad 2\quad 0\\
\hline
\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{2}\,\cancel{4}\,\cancel{2}\,4\,0\\
\cancel{2}\,2\,4
\end{array}$$

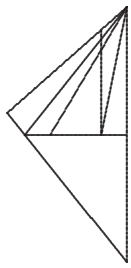
$\sqrt{3+2\sqrt{2}} \sqcap x$. $\sqrt{2} \sqcap \dfrac{71}{50}$. $2\sqrt{2} \sqcap \dfrac{71}{25} \sqcap 3-\dfrac{4}{25}$. Ergo $3+2\sqrt{2} \sqcap 6-\dfrac{4}{25}$. $\dfrac{149}{25}$ et $\sqrt{3+2\sqrt{2}} \sqcap \dfrac{\sqrt{145}}{5}$ ergo $\sqrt{3+2\sqrt{2}} \sqcap \dfrac{61}{25}$.

---

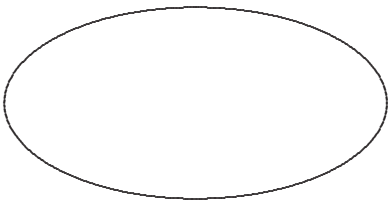
5 error: Der folgende Wert ist um den Faktor 10 zu niedrig. 18 $\dfrac{149}{25}$: Richtig wäre $\dfrac{146}{25}$, Leibniz ändert in der folgenden Zeile zu $\sqrt{145}$, verwendet im Ergebnis aber den Näherungswert für $\sqrt{149}$.



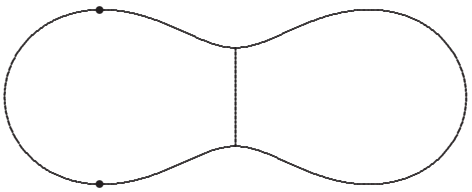
[*Fig. 6, Blindzeichnung*]



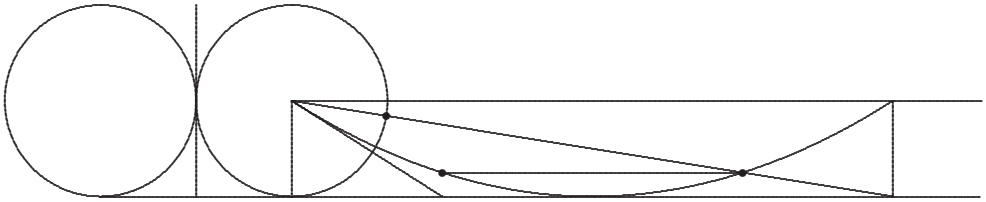
[*Fig. 7, Blindzeichnung*]



[*Fig. 8*]



[*Fig. 9*]



[*Fig. 10*]

25. TRIGONOMETRIA PER QUADRATURAM ARITHMETICAM. DE SERIEBUS CONVERGENTIBUS

[Anfang Juni – 29. Juni 1676]

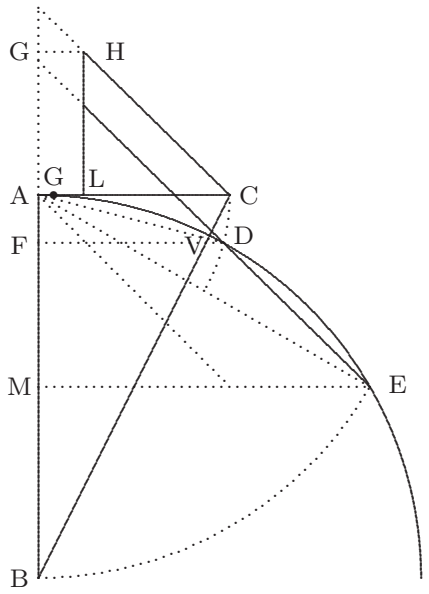
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 127. Ca $\frac{1}{2}$ Bl. 2°. 1 S. Gestr. Vorstufe auf LH 35 VIII 30 Bl. 13 v° (vgl. Cc 2, Nr. 1547, Druck in einem späteren Band der Reihe) u. LH 35 XIII 1 Bl. 229 v° (vgl. VII, 5 N. 94), mit denen zusammen Bl. 127 als unterer Teil ursprünglich ein vollständiges Bl. 2° bildete.
Cc 2, Nr. 1429, 00

Datierungsgründe: Leibniz übernimmt in Teil 1 fehlerhafte Ergebnisse aus N. 24, darunter eine falsche Abschätzung, die von Mohr in N. 26 richtig berechnet wird. Teil 1 von N. 25 dürfte also vor N. 26 geschrieben sein, das wiederum vor N. 27, dat. 29. Juni 1676 entstanden sein dürfte (s. N. 26). Teil 2 von N. 25 weist inhaltliche Bezüge zu VII, 3 N. 60, dat. 26. Juni 1676, auf.

[*Teil 1*]

Trigonometria per quadraturam Arithmeticam

14–296,1 *(1)*



si tangens y. sit minor sexta parte radii erit

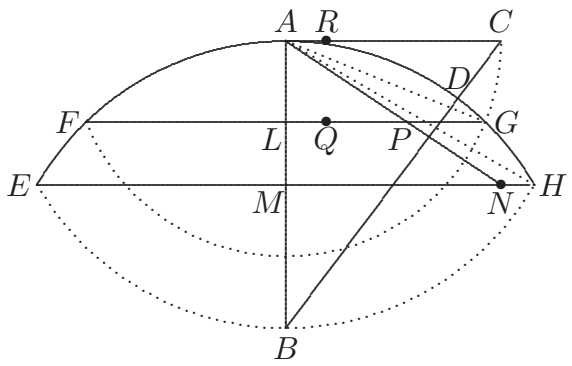
Si quod exhibeatur Triangulum rectangulum cujus data sint latera, quaerantur anguli; sumatur majus latus circa rectum pro radio, minus pro tangente. Quodsi jam tangens sit minor quinta parte radii, tunc posito radio a tangente y. erit arcus propemodum $y - \frac{y^3}{3a^2}$. et defectus a vero erit minor $\frac{4}{3}$ scrupuli secundi. Ex hoc calculo constructionem sequentem derivavi.

arcus $\mathrm{y} - \frac{1}{3}\mathrm{y}^3$ tam prope, ut angulus inventus non deficiat a vero $\frac{13}{23}$ parte scrupuli secundi. *(a)* Unde constructionem hanc derivo. Sit radius AB. tangens AC qvaeritur longitudo arcus AV qvi sit portio Arcus Circuli AVDE; ex centro A radio AC describatur arcus CD et eodem centro A, radio AB describatur arcus BE in eodem punctum E. Junctae ED ducatur parallela et aeqvalis CH, unde demittatur in AC perpendicularis HL Sumatur AG triens AL erit GC aeqvalis (propemodum) arcui AV *(b)* Constructio. centro A radiis AC. AB describantur arcus CD. BE. junctae ED. ducatur parallela et aeqvalis CH. et ex H in AC perpendicularis HL. et sumatur AG triens ipsius AL, erit GC, aeqvalis (propemodum) arcui AV qvaesito Analysis haec est, qvae et pro demonstratione serviet, AC est y. AB est 1. ut posuimus, debet ergo esse AG $\sqcap \frac{1}{3}\mathrm{y}^3$. et AL erit y^3. qvod sic effecimus: Consideravi, qvaeri rectam y^3. vel $\frac{\mathrm{y}^3}{\mathrm{a}^2} \sqcap \mathrm{AL} \sqcap \mathrm{b}$. ergo $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2} \sqcap \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{y}}$. debet ergo inveniri recta b. qvae sit ad y. in duplicata ratione AC. ad AE. qvod ut facilius efficerem, cogitavi utendum esse ad eam rem Circulo dato, et vero eius ope facile exhiberi potest ratio datae duplicata, nam si AC transferatur in AD, et AB in AE et in diametrum AB demittantur perpendiculares DF, EM erunt AF AM, in duplicata ratione AD, AE. video itaqve me in constructione errasse qvae processit ponendo FD, ME, in duplicata ratione AD, AE. itaqve reformanda omnia et inchoandum de novo

Si angulus minimus Trianguli rectanguli in qvatuor partes aeqvales secetur, et posito majore circa rectum trianguli rectanguli latere, pro radio, tangens qvartae portionis anguli minimi, *neben der Figur:* x. arcus 1. radius qvaeritur y tangens $\mathrm{y}^3 - 3\mathrm{y} + \mathrm{x} \sqcap 0$ $\mathrm{y} \sqcap \sqrt[3]{\frac{\mathrm{x}}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{x}^2}{4} - 1}} + \sqrt[3]{\frac{\mathrm{x}}{2} - \sqrt{\frac{\mathrm{x}^2}{4} - 1}}$ *(aa)* sed hoc non procedit *(bb)* qvae regulae Cardani incapax. *(2)* | Trigonometria ... Arithmeticam *erg.* | Si *L*

---

4 $\frac{4}{3}$: Der Wert ist um den Faktor 10 zu niedrig; Leibniz übernimmt ihn aus N. 24 S. 293 Z. 5 f. Eine korrekte Abschätzung gibt Mohr in N. 26 S. 300 Z. 6. 6 $\frac{13}{23}$: Leibniz übernimmt den um den Faktor 10 zu niedrigen Wert aus N. 24 S. 290 Z. 3 f.



[*Fig. 1*]

Dato radio AB. tangente AC quaeritur longitudo arcus AD, posito tangentem esse quinta radii parte minorem. Absolvatur ab utraque parte quantum satis est, arcus circuli $EFADGH$. et centro A, intervallis AC. AB. describantur arcus CGF, HBE. Jungantur FLG. EMH. quae secabunt radium AB, in L. M. Porro in MH sumatur MN aequalis AC. et juncta AN secabit LG alicubi in P. Jam LQ triens LP. sive ei sumta aequalis AR, auferatur ex AC, residua erit RC. aequalis arcui AD. quaesito, eritque defectus minor $\frac{4}{3}$ scrupuli secundi.

Si tangens AC justo major esset, imo si esset maxima, ipsi scilicet AB aequalis, tantum opus est arcum bisecari, dimidium ejus iterum bisecari, et inveniri tangentem quartae partis arcus dati, quod semper ex datis radio et tangente arcus dati haberi potest. Demonstravi enim tangentem arcus dimidii esse ad AC tangentem arcus dati, ut radius AB est ad $AB + BC$. summam radii et secantis. Quod si ergo dentur in numeris latera Trianguli ABC. facile in numeris et tangens arcus dimidii ipsius arcus AD. dati habebitur, adeoque et dimidii ipsius dimidii.

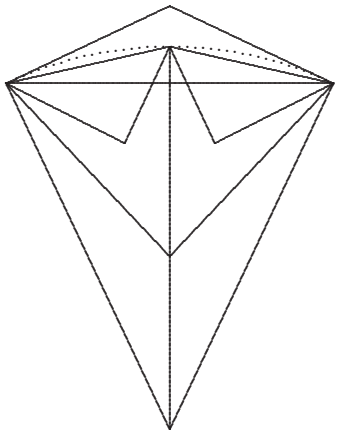
Superest ut adjiciam analysin constructionis, quae et demonstrationem dabit. Quoniam quaerimus RC aequalem $y - \frac{y^3}{3a^2}$. ideo AR erit $\frac{y^3}{3a^2}$ ejusque triplum LP erit $\frac{y^3}{a^2}$. Sit $LP \sqcap b$ erit $\frac{b}{y} \sqcap \frac{y^2}{a^2}$ seu LP ad MN (quae ipsi AC aequalis est) ut y^2 ad a^2. Quod et verum est, debet enim ut hoc verum sit esse LP ad MN in duplicata ratione $AC \sqcap y$ ad $AB \sqcap a$. seu in duplicata ratione AG ad AH quod verum est, quia LP ad MN est

1 *Fig. 1*: Aus Gründen der Übersichtlichkeit hat Leibniz den Tangens AC größer als den fünften Teil des Radius AB gezeichnet. 12 Demonstravi: vgl. VII, 4 N. 21 S. 389 u. VII, 4 N. 26 prop. 12 S. 434.

ut AL ad AM. Est autem, ut constat ex natura Circuli, AL ad AM in duplicata ratione AG ad AH. Quod praestandum erat.

Haec constructio etiam ut obiter dicam servit ad duas proportione medias tentando inveniendas. Sit LP data ⊓ y^3[,] AB unitas ⊓ 1. Quaeritur radix Cubica ⊓ y. Tunc LP tamdiu tentando applicetur ipsi AB. donec in L. incidat, ita ut ducta HE trianguli inscripti latere junctae APN, et AG sint aequales.

[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]

Si duae sint series convergentes, ut a b facile earum

$$(A) \sqcap \frac{2a}{a+b} \qquad (B) \sqcap \frac{b^2a+b^3}{[2b]}$$

ductu a. in b. fit ab. et ductu (A) in (B) fit etiam ab. Hinc quoniam ductu duarum producitur idem, etiam ductu omnium sequentium producitur idem, jam quando talis series non habetur, quae id praestat, videndum an ex data figura formari possit series convergens arbitraria. Cum enim ex data figura plures formari possint infinitis modis, videndum an generaliter quaedam formari possit infinitas possibiles comprehendens, ita ut postea possit incognita in formula residua sive in exponente, sive in ipsis quantitatibus explicari. Utile foret si in primo a. b. in secundo gradu esset quantitas facta ex a. b. cum quadam arbitraria. Pro circulo et Hyperbola generaliter ex⟨stru⟩enda omnis inquisitio, quae si succederet generalem regulam pro quolibet arcu vel sectore daret.

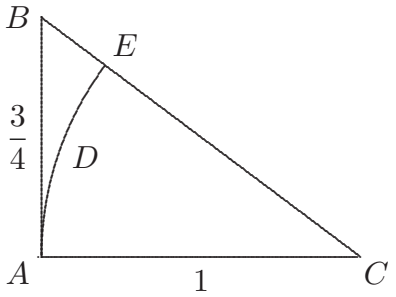
7 *Teil 2*: vgl. VII, 3 N. 60, dat. 26. Juni 1676.

26. APPROXIMATIE VAN DEN ARCUS

[Anfang Juni – 29. Juni 1676]

Überlieferung: *M* Aufzeichnung (Mohr für Leibniz): LH 35 VIII 30 Bl. 68. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 68 r°.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Die Näherungsrechnungen Mohrs mit der Kreisreihe dürften kurz nach Leibniz' eigenen Bogen- bzw. Winkelberechnungen in Teil 1 von N. 24 angefertigt worden sein. Leibniz übernimmt Fehlerabschätzungen Mohrs aus N. 26 in die auf den 29. Juni 1676 datierte Untersuchung N. 27.



$\angle ACB$ is 36 gr 52 m.

[*Fig. 1*]

$\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3}$ ꝓ de arcus ADE, kompt
voor de hoeck ACB 34 gr 55. te kleijn 1 gr 57 m.
$\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5}$ ꝓ de arcus ADE, kompt
voor de $\angle ACB$ 37 gr 38 m. te groodt − " 46 min.
$\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9}$ ꝓ de arcus ADE, kompt
voor de $\angle ACB$ 37 gr 1 m. te groodt − " 9 min.

Soo men de twee eerste termen wil alleen gebruijcken als $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3}$, ende AB is de $\frac{1}{2}$de, $\frac{1}{3}$ deel, $\frac{1}{4}$ deel, $\frac{1}{5}$ deel etc. van AC, om te vinden de $\angle ACB$, kompt als volgt[:]

AB	de $\angle ACB$ nae de Tabel sinus	de $\angle ACB$ te vinden als $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} \wp$ de arcus ADE	de differentie
$\frac{1}{2}$	26 gr 34 m	26 gr 20 m	− " 14 min.
$\frac{1}{3}$	18 gr 26 m	18 gr $23\frac{1}{2}$ m	− " $2\frac{1}{2}$ m
$\frac{1}{4}$	14 gr 2 m 12 sec.	14 gr 1 m 33 sec:	− " − " 39 sec.
$\frac{1}{5}$	11 gr 18 m 36 sec.	11 gr 18 m 24 sec.	− " − " 12 sec.
$\frac{1}{6}$	9 gr 28 m		
$\frac{1}{7}$	8 gr 8 m		
$\frac{1}{8}$	7 gr 7 m 30 sec:	7 gr 7 m $29\frac{1}{2}$ sec.	− " ontrent $\frac{1}{2}$ sec.
$\frac{1}{9}$	6 gr $20\frac{1}{2}$ m		
$\frac{1}{10}$	5 gr $42\frac{2}{3}$ m		

Soo men de $\angle ACB$, 3 mahl, in 2 gelijcke deelen deelt, dan is AB, een weijnig kleijnder als $\frac{1}{10}$ van AC, en de differ: voor de $\angle$en, sal seer weijnig differen (als men neembt de twee eerste termen, als $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} \wp$ de arcus ADE gereeckent) van de Tabel sinus. Als men

12 NB.

3 26 gr 20 m: Richtig wäre $26^\circ\ 15'\ 38''$ und für die Differenz entsprechend $18'\ 22''$. 4–9 $2\frac{1}{2}$m ... $\frac{1}{2}$ sec.: Leibniz verwendet die Werte der letzten Spalte in der auf den 29. Juni 1676 datierten Aufzeichnung N. 27 S. 309 Z. 1–3 bzw. S. 314 Z. 10 f.

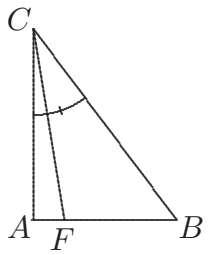
kan sien daer, AB is $\frac{1}{8}$ van AC dat het differ. ontrent is $\frac{1}{2}$ sec: soude dan diff: van de geheele AB. ontrent 3 secunden.

Maer soo men de $\angle ACB$, 2 mahl, in 2 gelijcke deelen deelt, dan is AB, een weijnig kleijnder als $\frac{1}{5}$ deel van AC (wen AB is $\wp$ AC) en de $\angle$en differ. als men kan sien in de wercking bouen, daer AB is $\frac{1}{5}$ deel van AC, dat de differentie is ontrent 12 sec.

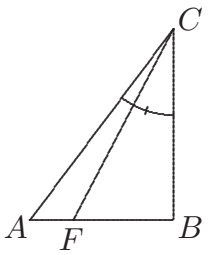
Daerom wen de sijde AB is $\wp$ AC ofte een wenig kleijnder, het is genoeg om de $\angle ACB$, te deelen in 2 mahl, in 2 gelijcke deel, de $\angle$ sal ontrent $\frac{4}{5}$ deel, van 1 minut differen (als men met de 2 eerste termen, als $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3}$ $\wp$ de arcus ADE werckt) van de Tab. sinus; ende hoe naeder het kombt tot $\frac{1}{3}$ deel van AC, hoeweeniger het verschiet.

Soo AB is $\frac{1}{3}$ deel van AC ofte een wenig groter soo heeft men van nooden de $\angle ACB$ te deelen in 2 gelijcke deel, tot AB is $\frac{1}{5}$ deel van AC.

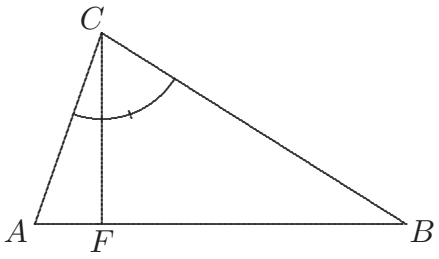
Ende wen AB is ontrendt $\frac{1}{5}$ deel van AC, dan heeft men niet van nooden te deelen de $\angle$ in eenige deel.



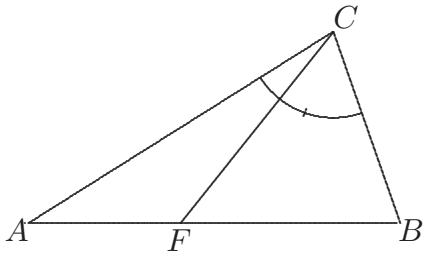
[*Fig. 2a*]



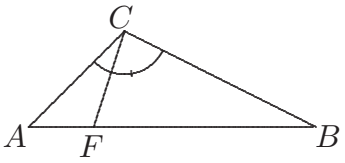
[*Fig. 2b*]



[*Fig. 2c*]



[*Fig. 2d*]



[*Fig. 2e*]

Als men de $\angle ACB$ wil 2 mahl in 2 gelijcke deel, deelen; om AF te vinden, soo kan men het dus oock doen[:]

Regel.

Gelijck als
$AC + BC$, sijn $\square$ staet tot also het tot het
$-\square AB$, multipl. in BC $\sqcap\!\sqcap$ $\square AB$, multipl. in AC $\sqcap\!\sqcap$ $\square AC$ $\sqcap\!\sqcap$ $\square AF$.

3 Regel: Die Regel gilt für Winkelhalbierung im rechtwinkligen Dreieck; im ersten Term der Proportion müsste $(BC + AC)^2$ statt AB^2 stehen.

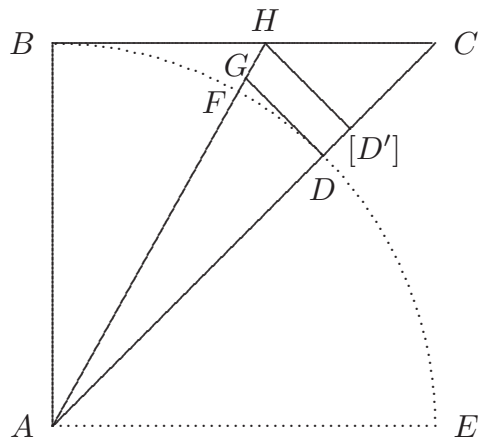
27. COMPENDIUM PRO TRIGONOMETRIA SINE TABULIS

29. Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 116–117. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 1460

29 Jun. 1676.

Reperi tandem pulcherrimum compendium pro Trigonometria sine tabulis absolvenda. Quaeritur primum inventio angulorum in triangulo rectangulo ex datis lateribus.



[*Fig. 1*]

Centro A, radio AB describatur quadrans BDE, secans AC in D. Ante omnia patet arcum BD non posse esse majorem semiquadrante seu octante. Res autem eo redit, ut dato radio AB, et tangente BC inveniatur arcus BD, adeoque et angulus BAC. Porro si BC satis parva sit, id est minor octava parte ipsius AB tunc posito $AB \sqcap 1$. et arcu

5 *(1)* ⟨30⟩ *(2)* 29 Jun. 1676 *erg. L* 10 arcum ABC *L ändert Hrsg.*

8 *Fig. 1*: Leibniz hat vergessen, den Fußpunkt des Lotes von H auf AC zu bezeichnen, und verwendet im zugehörigen Text irrtümlich D, was zu D' geändert ist.

a, et tangente t, erit $a \sqcap \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3}$. seu, $a \sqcap \frac{1}{1} - \frac{t^2}{3}$,, $\frown$ t (sic enim enuntiare utilius ad praxin). Errorque erit minor quam dimidii scrupuli secundi. Si vero sit major BC quam $\frac{1}{8}AB$. nihilo minus nullo negotio eo reducemus. Nimirum ab arcu BD auferamus arcum BF, cognitae rationis ad peripheriam, et Geometrice descriptibilem; exempli causa $\frac{5}{6}$tas octantis et erit GD tangens arcus residui minor, ut arbitror, quam octava pars ipsius radii AD. Verum ipsa DG invenienda est, et facile quidem. Quod opinor ita fiet: Datur tangens vel chorda unius sextae octantis, seu unius 48mae circuli. Hinc autem per sectiones angulares Vietae haberi poterit chorda arcus vel tangens quintupli solis multiplicationibus atque additionibus. Semper enim multipli arcuum facile hoc modo inveniuntur: Si essent $\frac{4}{5}$ octantis quadruplicati arcus invenienda esset chorda vel tangens. Quaerenda autem potius tangens si id commode fieri sectiones illae angulares patiuntur. Ea inventa BH subtrahatur a cognita BC. Habebimus HC. porro habemus et HA, ex HB et AB. Ergo in triangulo AHC. ex datis lateribus AH. HC. CA. quaeramus HD'. ex HD' data GH[,] ex GD arcum. (Haec methodus serviret etiam ad valore[m] appropinquandum etiam sine artificio nostro inprimis si sumatur arcus talis ⟨rationem⟩ ad circulum et tangentem habens notam, qui per pauca multiplicari opus habet.) Utilius tamen forte re ordinaria nostra methodo uti; arcum datum secare in partes quatuor, etiam secundum sectiones angulares Vietae.

2 dimidii: Gemeint ist wohl dupli. 5 minor: Dies gilt nicht, falls der Restwinkel noch etwas größer als ca $7^\circ\ 7'\ 30''$ ist. 8 quintupli: vgl. Fr. Viète, *Ad angulares sectiones theoremata*, 1615, theorema III u. V, S. 11–16 u. 20–23 (*VO* S. 289–294); für die Berechnung des Kosekans in theorema V sind auch Divisionen erforderlich. 18 Vietae: *a. a. O.*, theorema VII, S. 28–30 (*VO* S. 296 f.).

$\frac{y}{1}$	$-$	$\frac{y^3}{3}$	$+$	$\frac{y^5}{5}$	$-$	$\frac{y^7}{7}$	etc.	
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{160}$		$\frac{1}{896}$		
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{81}$		$\frac{1}{1215}$		$\frac{1}{15309}$	$\frac{1}{4}$ minut. nondum	
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{92}$		$\frac{1}{5120}$		$\frac{1}{114688}$	nondum 2 secund.	
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{375}$		$\frac{1}{15625}$		$\frac{1}{546875}$	nond. $\frac{1}{2}$ sec.	5
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{648}$		$\frac{1}{38880}$		$\frac{1}{1959552}$	nond. $\frac{1}{9}$ secund.	
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{1029}$		$\frac{1}{84035}$		$\frac{1}{5764801}$		
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{1536}$		$\frac{1}{[1]63840}$				

Si ad 5^{tum} usque gradum, seu usque ad $\frac{y^5}{5}$ procedas, error erit minor quam $\frac{y^7}{7}$.

6 *Nebenrechnungen:*

1959|552	~~2~~9
6|000	~~1~~1~~7~~54 ~~÷~~ 9
11754	~~1~~2~~9~~6

3–6 *rechte Spalte erg. L*

4 $\frac{1}{92}$: Leibniz übernimmt den falschen Wert aus N. 24 S. 2 Z. 2.

Si $y \sqcap BC$ sit minor quam $\frac{1}{3}AB$. seu quam $\frac{1}{3}$ posito AB esse 1. et procedatur usque ad $\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$ erit error minor quam $\frac{y^7}{7}$ id est minor quam $\frac{1}{15309}$ radii. Porro radius est ad peripheriam, ut 100,000 ad 628,318 seu $r \sqcap \frac{100,000}{628,318}\pi$. Ergo erit $\frac{y^7}{7}$ (si y, $\frac{1}{4}$)

---

1 f. *Nebenrechnungen und Nebenbetrachtungen:*

$$\begin{array}{r} 3600 \\ 36 \\ \hline 21600 \\ 108 \\ \hline 129600 \end{array}$$

$$\frac{1}{129600} \text{ de} \times \frac{628318}{100000} \sqcap \frac{b}{1}. \quad \frac{\frac{628318}{100000}}{129600} \sqcap \frac{b}{100,000}.$$

$$\frac{628318}{129600} \sqcap \frac{c}{100,000} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \cancel{6}\cancel{8}5 \\ \cancel{1}\cancel{8}\cancel{3}\cancel{9}5 \\ \cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{3}\cancel{1}8 \\ \cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}\cancel{6}\cancel{6}6 \\ \cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}9 \\ 12 \end{array} \; \text{ſ } 56$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 3 \\ \hline 81 \end{array} \quad \begin{array}{r} 81 \\ 3 \\ \hline 243 \end{array} \quad \begin{array}{r} 243 \\ 3 \\ \hline 729 \end{array} \quad \begin{array}{r} 243 \\ 5 \\ \hline \cancel{1}\cancel{2}15 \\ \cancel{3}\cancel{3}3 \end{array} \; \text{ſ } 405 \quad \begin{array}{r} 243 \\ 7 \\ \hline 1601 \end{array} \quad \begin{array}{r} 243 \\ 9 \\ \hline 2187 \\ 7 \\ \hline 15309 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15309 \\ 6 \\ \hline 91854 \end{array} \quad \begin{array}{r} 406 \\ 15 \\ \hline 391 \end{array}$$

$$\frac{391}{1251} \sqcap \frac{b}{100,000}$$

---

3 $\frac{1}{4}$: Richtig wäre $\frac{1}{3}$. 23 $\frac{391}{1251}$: Im Nenner müsste 1215 stehen. Leibniz rechnet mit dem falschen Wert weiter.

$\sqcap\ \dfrac{100,0|00}{628,318[,,\ \frown]153|0\cancel{9}}\pi.$ vel $\dfrac{100\pi}{628,318,,\ \frown 15}\ \sqcap\ \dfrac{10\pi}{314109,\frown 3}$ vel $\sqcap\ \dfrac{1}{31411,3}\ \sqcap\ \dfrac{1}{94233}.$ vel error ergo minor quam $\dfrac{1}{90,000}$ circumferentiae.

$$\begin{array}{r} 7 \\ \cancel{3}\,\cancel{8}\,8 \\ \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{5}\,\cancel{1} \\ \cancel{3}\,\cancel{9}\,\cancel{1} \end{array} \quad \text{ƒ}\ 3\,\frac{78}{391} \qquad \begin{array}{r} \cancel{1} \\ \cancel{6} \\ \cancel{1}\,\cancel{7}\,\cancel{1} \\ \cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{6}\,\cancel{2} \\ \cancel{1}\,\cancel{5}\,\cancel{2}\,\cancel{8}\,\cancel{3} \\ \cancel{3}\,\cancel{6}\,\cancel{7}\,\cancel{9}\,\cancel{8}\,\cancel{5}\ \underline{|-5} \\ \cancel{3}\,\cancel{9}\,\cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,0 \\ \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{5}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1} \\ \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{5}\,\cancel{5}\,\cancel{5}\,\cancel{5} \\ \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{2}\,\cancel{2} \\ \cancel{1}\,\cancel{1} \end{array} \quad \text{ƒ}\ 31255 - \frac{5}{1251}$$

$$\frac{628318}{31255}\ \sqcap\ \frac{b}{100000}$$

$$\begin{array}{r} \times\ \ 628381, \\ 1296\,00 \\ \hline 3770286\,00 \\ 5655429 \\ 1256762 \\ 628381 \\ \hline \cancel{8}\,\cancel{1}\,\cancel{4}\,\cancel{3}\,\cancel{8}\,\cancel{1}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,\cancel{6}\,00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{1}\,1\,8 \\ \cancel{2}\,\cancel{2}\,\cancel{0} \\ \cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{9} \\ \cancel{1}\,\cancel{8}\,\cancel{9}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,1\,0 \\ \cancel{2}\,\cancel{9}\,\cancel{0}\,\cancel{1}\,\cancel{5}\,\cancel{9}\,\cancel{2}\,2 \\ \cancel{8}\,\cancel{1}\,\cancel{4}\,\cancel{3}\,\cancel{8}\,\cancel{1}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,600 \\ \cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{5}\,\cancel{5}\,\cancel{5}\,\cancel{5} \\ \cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{5}\,\cancel{5}\,\cancel{5} \\ \cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{2} \\ \cancel{3}\,\cancel{1} \end{array} \quad \text{ƒ}\ 2605$$

---

1 $\dfrac{10\pi}{314109,\frown 3}$: Der erste Faktor im Nenner müsste 314159 lauten. Leibniz rechnet mit dem fehlerhaften Wert weiter, der jedoch die Abschätzung nicht beeinträchtigt. 15 628381: Richtig wäre 628318; Leibniz übernimmt den falschen Wert in N. 33.

Scrupulus secundus est $\frac{1}{360,\ 360}$ seu $\frac{1}{129600}$ peripheriae. Ergo si tangens sit $\frac{1}{3}$ radii, aut paulo minus, error erit unius secundi cum triente, circiter.

Si tangens sit $\frac{1}{4}$ radii aut minor, error erit minor quam $\frac{1}{114688}$. Ideo minor quam $\frac{100,|000}{114{,}688,\quad 628|318}\pi.\ \frac{50}{57344;\ 628} \sqcap \frac{25}{28672,\ \frac{628}{100}}$ seu $\frac{1}{28{,}672,\ 24}$ seu si ab initio pro 114688 scribamus 100,000 erit error minor quam $\frac{1}{628318}$. $\begin{array}{l}\cancel{2}6\\ \cancel{6}\cancel{2}8318 \mathrel{\cancel{-}} 4\\ \cancel{1}\cancel{2}9600\end{array}$ etc. Erit ergo error minor quam $\frac{1}{4}$ scrupuli secundi.

Si itaque velis procedere ad surdesolidum sitque tangens minor 3^{tia} parte radii, error minor erit quam $1\frac{1}{3}$ secund. Si sit minor quarta, erit error longe infra secund.

---

1 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 36000\\ 36\\ \hline 216000\\ 108\\ \hline 1296000 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cancel{3}3\\ \cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}6|000 \mathrel{\cancel{-}} 14\\ \cancel{9}\cancel{9}0 \end{array}$$

3 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{l} 1\,5\\ \cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}6 \mathrel{\cancel{-}} 11\\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{4}4\\ 1\,1 \end{array}$$

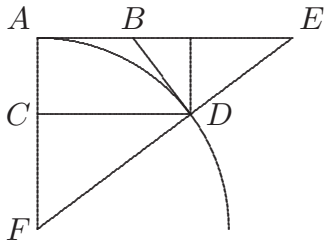
---

1 $\frac{1}{360,\ 360}$: Im Nenner müsste $360 \cdot 3600$ stehen. Der Fehler beeinträchtigt die Abschätzungen bis S. 309 Z. 2. 5 $\mathrel{\cancel{-}}$ 4: Der Fehler in der abgebrochenen Divisionsrechnung wirkt sich nicht aus.

Si vero cubo velimus esse contenti, tunc: Si Tangens sit $\frac{1}{3}$ error erit $2\frac{1}{2}$ minuti. Si tangens sit $\frac{1}{4}$ error erit minor quam $\frac{2}{3}$ minuti. Si tangens sit minor $\frac{1}{5}$, error erit circiter $\frac{1}{5}$ minuti.

Cum Tangens est 1. (posito radio 1) arcus est 45 grad. ejus dimidium est 22 $\frac{1}{2}$ grad. cujus tangens inter $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Ejus $\frac{1}{3}$ est 15 grad. cujus tangens inter $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Si trianguli latera sint 3. 4. 5. sola bisectione pervenitur ad tangentem qui sit triens, est enim arcus 36 grad. 52 min. et tangens $\frac{3}{4}$. Si bisecetur fiet 18 gr. 26 minut. et tangens erit $\frac{1}{3}$. Si quadrisecetur arcus qualiscunque sit, tunc error erit circiter $\frac{1}{5}$ minuti. Videamus quis orietur calculus pro quadrisectione: ac primum pro bisectione[:]

[*Erster Ansatz*]



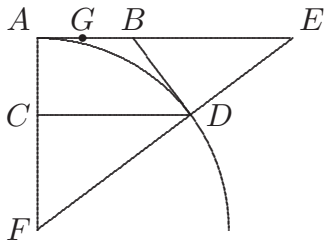
[*Fig. 2a*]

$AC \sqcap x$. $AB \sqcap y$ erit $x \sqcap \frac{2ay^2}{a^2+y^2}$ et $+a^2x \sqcap 2ay^2 - y^2x$. seu $\frac{a^2x}{2a-x} \sqcap y^2$. $CD \sqcap \sqrt{2ax-x^2}$. et $\frac{a-x \sqcap FC}{a \sqcap FA} \sqcap \frac{\varphi \sqcap CD}{AE \sqcap \theta}$ et $\theta \sqcap \frac{a\varphi}{a-x}$ seu $\theta^2 \sqcap \frac{2a^2x-ax^2}{a-x} \sqcap$

1–3 Si . . . minuti: Die Abschätzungen hat Leibniz aus N. 26 S. 300 Z. 4–9 übernommen; er verwendet sie auch in S. 314 Z. 8–11. 11 *Fig. 2a*: Aus Gründen der Übersichtlichkeit hat Leibniz in den Figuren 2a und 2b den Tangens AE größer gezeichnet als den Radius AF.

$\dfrac{a^2x}{a-x}+x$. Pro x pone ejus valorem, fiet $\theta^2 \sqcap \dfrac{2ay^2}{a^2+y^2, a-\dfrac{2ay^2}{a^2+y^2}}+\dfrac{2ay^2}{a^2+y^2}$ seu $\dfrac{2ay^2, a^2+y^2,, +2ay^2, a^3-ay^2}{a^2+y^2, a^3-ay^2} \sqcap \dfrac{2a^3y^2\boxed{+2ay^4}+2a^4y^2\boxed{-2ay^4}}{\dots}$, seu $\dfrac{4y^2}{a^4-y^4}$.

[*Zweiter Ansatz*]



[*Fig. 2b*]

$x \sqcap \dfrac{2ay^2}{a^2+y^2}$. $AF \sqcap a$. $AB \sqcap y$. $CD \sqcap \sqrt{2ax-x^2}$. $FC \sqcap a-x$. $AE \sqcap \theta$. fiet $\dfrac{AE}{CD} \sqcap \dfrac{AF}{CF}$. et $AE \sqcap \dfrac{AF, CD}{CF}$. et $AE^2 \sqcap \theta^2 \sqcap \dfrac{a^2, \overline{2ax-x^2}}{a^2-2ax+x^2}$. Pro $2ax-x^2$, substituendo ejus valorem, explicata x per y. fiet: $\sqrt{2ax-x^2} \sqcap \dfrac{2a^2y}{a^2+y^2}$. et $a-x \sqcap a-\dfrac{2ay^2}{a^2+y^2}$ seu $a-x \sqcap \dfrac{a^3+ay^2-2ay^2}{a^2+y^2} \sqcap \dfrac{a^3-ay^2}{a^2+y^2}$. Ergo pro $\theta \sqcap \dfrac{a\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$ ponemus: $a \frown \dfrac{2a^2y}{a^2+y^2} \smile \dfrac{a^3-ay^2}{a^2+y^2}$ et $\theta \sqcap \dfrac{2a^2y}{a^2-y^2}$ et $-y^2\theta+\theta a^2 \sqcap 2a^2y$. vel $y^2\theta+2a^2y \sqcap \theta a^2$. vel $y^2+\dfrac{2a^2}{\theta}y+\dfrac{a^4}{\theta^2} \sqcap a^2+\dfrac{a^4}{\theta^2}$ et $y \sqcap \dfrac{a\sqrt{\theta^2+a^2}-a^2}{\theta}$.

Et pro $y \sqcap AB$, ponendo $z \sqcap AG$, et pro θ ponendo y, fiet $z \sqcap \dfrac{a\sqrt{y^2+a^2}-a^2}{y}$. Est autem $y^2+a^2 \sqcap \dfrac{\theta a^2}{2y+\theta}$ et $2y+\theta \sqcap \dfrac{2a\sqrt{\theta^2+a^2}-2a^2+\theta^2}{\theta}$. Ergo $y^2+a^2 \sqcap$

2 *Darunter:* Error calculi. Verte.

$\dfrac{\theta^2 a^2}{2a\sqrt{\theta^2+a^2}-2a^2+\theta^2}$. Ergo $z \sqcap \dfrac{a^2\theta^2\sqrt{\dfrac{1}{2a\sqrt{\theta^2+a^2}-2a^2+\theta^2}}-a^2}{a\sqrt{\theta^2+a^2}-a^2}$. Sed haec alias accuratius:

$$\theta \sqcap \frac{2a^2y}{a^2-y^2}.\ y \sqcap \frac{2a^2z}{a^2-z^2} \text{ et } y^2 \sqcap \frac{4a^4z^2}{a^4-2a^2z^2+z^4}. \text{ Ergo } \theta \sqcap \frac{2a^2y}{a+y,a-y}.$$

$$\theta \sqcap \frac{2a^2,2a^2z}{a+z,a-z,,a+\dfrac{2a^2z}{a+z,a-z},a-\dfrac{2a^2z}{a+z,a-z}} \text{ sive}$$

$$\theta \sqcap \frac{2a^2,2a^2z,a+z,a-z}{a,\overline{a+z,a-z},,+2a^2z,,,a,\overline{a+z,a-z},,-2a^2z}.$$

$$\theta \sqcap \frac{2a^2 2a^2z}{a^2-z^2,,a^2-\dfrac{4a^4z^2}{\boxed{2}\overline{a^2-z^2}}} \sqcap \frac{4a^4z,a^2-z^2}{a^2\boxed{2}\overline{a^2-z^2},-4a^4z^2}.$$

$$\frac{y}{1}-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}. \text{ seu } y,\frown 1-\frac{y^2}{3}+\frac{y^4}{5}. \text{ seu } y,,,1,,-y^2,\overline{\frac{1}{3}-\frac{y^2}{5}}.$$

Sit radius unitas habeaturque tangens anguli qui quaeritur in fractione quantum opus est accurata, et, quod commodissimum decimali. Ejusdem tangentis quaeratur quadratum. Hoc posito a fractione $\frac{1}{3}$ seu a triente radii subtrahatur quinta pars quadrati tangentis. Residuum multiplicetur per praedictum quadratum tangentis; factus a radio subtrahatur; Residuum per tangentem multiplicatum dabit Numerum quo si dividas circumferentiam circuli secundum Ludolphi numeros expressam seu numerum 628318. Quotiens dabit rationem arcus ad Circumferentiam tam exacte, ut si tangens sit minor [*bricht ab*]

$$\frac{y}{1}\ \underbrace{-\frac{y^3}{3a^2}+\frac{y^5}{5a^4}}_{-\frac{y^3}{a^4}\frown\frac{a^2}{3}-\frac{y^2}{5}}.$$ Sit radius $a \sqcap 100,000$. tangens ... A $\frac{100,000,00,000}{3}$ auferatur

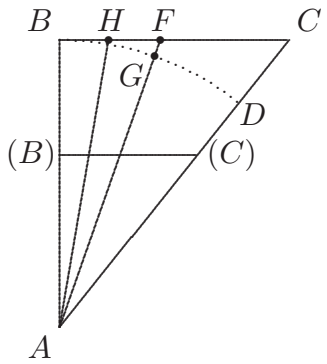
1 $z \sqcap$: Auf der rechten Seite müsste vor der Wurzel im Zähler $a^2\theta$ stehen; das Versehen wirkt sich nicht aus.

quinta pars quadrati tangentis residuum multiplicetur per ipsum tangentis cubum, et dividatur per 100,000,,00,000,,00,000,,00,000. factus subtrahatur ab [*bricht ab*]

[*Dritter Ansatz*]

In calculo Trigonometrico, vel ex datis lateribus anguli investigantur, vel ex datis angulis et uno latere reliqua. De priore nunc tantum dicam alterum separatim alias explicabo.

Varietas praxeos cujus fundamenta dedi, oritur vel (1) ab exactitudine quam quaerimus vel (2) a datis quae habemus, vel (3) a regula qua volumus uti. Quod attinet e x a c t i t u d i n e m quam quaerimus, fieri potest, ut velimus errorem minorem secundo, vel certe non multo majorem, ut si sit minor quam $1\frac{1}{3}$ secundi. Sed et fieri potest, ut contenti simus si licet error sit circiter duodecim secundorum: sive quintae partis minuti; imo et si modo minutum dimidium non excedat; denique nonnunquam satis habebimus si intra unum minutum vel duo triave consistat error.



[*Fig. 2c*]

1 tangentis qvadratum *L ändert Hrsg.* 4 investigantur, *(1)* vel magnam qvaerimus exactitudinem; exempli causa, ut error sit minor $1\frac{1}{3}$ secund. vel mediocrem *(2)* vel *L* 9 qvaerimus, *(1)* ea vel magna est vel mediocris, vel exigua. Magna ut si desideremus ut error sit non multo major secundo, ut si sit minor qvam $1\frac{1}{3}$ *(2)* fieri *L*

5 alias: vgl. N. 51 prop. XLVIII u. L.

Quod data attinet quae habemus, tunc rem omnem nunc quidem ad unum reduco casum, Trianguli rectanguli ABC, in quo ex datis lateribus anguli quaeruntur. Considerabimus autem tantum latera circa rectum AB. BC hoc loco; omisso tertio AC, hypotenusa. Ac primum danda opera est, ut initio inquisitiones nostras ita moderemus, quo in triangulo ABC ad cujus angulorum inventionem tandem problema reductum est; latera AB. BC. notabilem habeant differentiam; ut si unum alterius triplum quadruplumve sit longe facilior erit operatio nostra, quam si parum differant. Certum est autem saepe ab initio nos eligere posse, datisque problematis varie uti, modo admoneamur.

Triangulo autem dato ad simplicissimos terminos reducto, examinandum est, an ratio laterum AB, BC, valde accedat ad rationem aequalitatis, vel an latera sibi valde sint propinqua; tunc enim pro triangulo dato aliud necessario substituendum est, in quo Unum latus alterius sit triplum quadruplumve. Quod semper obtinebimus angulum aliquem trianguli dati, semel aut ad summum bis; bisecando.

Regula autem pro bisectione anguli per calculum nobis utilem haec est: Sit triangulum ABC. Majus latus circa rectum AB, sumatur pro radio; et jamque centro A, radio AB describatur arcus BD. Erit alterum latus BC, hujus arcus BD, vel anguli BAC, tangens; bisectus sit angulus vel arcus in G. Quaeritur qualis futura sit longitudo rectae BF. ex datis rectis AB. BC. AC. Respondeo fore BF ad BA ut (DC,) differentia inter AC et AB, est ad BC. Eodem modo ex inventa BF. (adeoque et FA) inveniri posset BH, si ipsa BF nondum esset satis parva, angulusque BAF rursus bisecari deberet, fieret enim BH ad BA, ut (GF) differentia inter AF et AB, est ad BF. Nunquam autem in nostra methodo ultra duplicem bisectionem progredi necesse erit. Invento jam angulo BAF habebitur et ejus duplus; et invento angulo BAH. ejus quadruplus BAC.

8 f. admoneamur. *(1)* qvaliscunqve autem horum laterum differentia aut ratio sit; ante omnia videndum est, an non forte communem habeant divisorem, aut exactum, aut exacto propinqvum. ita enim divisione per communem divisorem facta, AB reducemus ad A(B) et BC ad (B)(C) et triangulum ABC ad triangulum A(B)(C) Constat autem eundem esse angulum trianguli ABC, qvi est trianguli A(B)(C). Unde posteriore potius utemur, qvippe numeris simplicioribus constante. *(a)* Potest etiam aliter nonnunquam pro Triangulo proposito substitui aliud qvod resolutionem facilius patiatur, sed hoc nunc exponere proli *(b)* Qvodsi pro Triangulo dato aliud tractabilius substituere commode possimus aliqvando, tunc scilicet cum in ipso autem triangulo dato latera AB et BC, exiguam nimis habeant differentiam *(2)* Triangulo *L* 13 f. bisecando. *(1)* Ut si ponatur *(a)* AB esse ut 4, BC ut 3; AC *(b)* CB esse 3 BA 4. AC 5. bisecando angulum BAC, *(2)* Regula *L* 14 anguli *(1)* haec est *nicht gestr.* *(2)* per *L*

D a t i s ipsis problematis jam consideratis Duas exponam Regulas, quarum posterior priore exactior est: prior ita habet:

Radius AB semper intelligatur esse unitas; et tangens BC (radio minor) fractio aliqua erit; quae numeris quantumlicet simplicibus est exprimenda. Quadratum hujus fractionis per ternarium divisum, auferatur ab unitate; residuum multiplicetur per fractionem ipsam. Proveniet numerus, cujus ratio ad peripheriam in numeris Ludolphi expressam, (exempli causa si radius sit 1. erit peripheria $\frac{628318}{100,000}$) dabit rationem arcus BD. ad peripheriam adeoque quantitatem anguli BAC. Ubi quidem si BC. sit minor quam $\frac{1}{3}$ AB, erit error minor quam $2\frac{1}{2}$ minut. Si BC sit [minor quam] $\frac{1}{4}AB$, erit error minor quam $\frac{2}{3}$ minut. Si BC sit minor $\frac{1}{5}AB$. error erit minor quam $\frac{1}{5}$ minut. et si BC sit minor quam $\frac{1}{8}AB$, error erit circiter dimidium secundi.

Altera regula priore multo exactior, haec est. Posito semper radio AB, unitate, et fractione tangentem BC radio minorem exprimente; Ejusdem fractionis quadratae pars quinta auferatur ab $\frac{1}{3}$. Residuum multiplicetur per ipsam fractionem quadratam. Productum auferatur ab 1. Residuum per ipsam fractionem primam multiplicatum dabit numerum; cujus ratio ad Circumferentiam Ludolphi numeris ex dato radio, unitate; expressa dividatur eritque quotiens ratio arcus BD, ad peripheriam, seu anguli quantitas. Haec regula mire exacta est. Nam si BC, sit minor quam $\frac{1}{3}AB$, erit error minor quam $1\frac{1}{3}$ Secundi. Et si BC sit minor quam $\frac{1}{4}AB$, erit error circiter quarta pars secundi.

Ex his facile quivis judicare poterit in praxi, qua praeparatione aut regula uti debeat pro exactitudine quam desiderat, aut labore quem impendere paratus est. In difficillimo casu, ubi Tangens BC prope aequalis radio AB, adhibita quadrisectione anguli, seu

6 ipsam *(1)* Per productum dividatur *(2)* proveniet L 8 peripheriam *(1)* seu numerum graduum minutorum et secundorum. *(2)* adeoqve L 8 f. sit | minor qvam *erg.* | $\frac{1}{3}$ L 11 erit *(1)* minor qvam dimidium secundum *(2)* circiter L 19 error *(1)* minor *(2)* circiter L

8–11 Ubi ... secundi: s. o. Erl. zu S. 309 Z. 1–3.

repetita bisectione, tunc per priorem quidem regulam error sit minor quam $\frac{4}{5}$ unius minuti primi; per posteriorem vero minor quam $\frac{1}{6}$ unius secundi. Quod cum in difficillimo casu contingat, ubi error est maximus, judicari potest, quantulus in aliis futurus sit error. Si BC, sit minor $\frac{3}{4}AB$. tunc sola bisectione anguli adhibita, secundum priorem quidem regulam error erit circiter $2\frac{1}{2}$ minut. Per posteriorem error erit circiter unius secundi cum triente seu $1\frac{1}{3}$ sec. Si vero BC. sit minor $\frac{1}{2}AB$, tunc sola bisectione adhibita per priorem quidem regulam error erit circiter dimidii minuti; per posteriorem vero nondum dimidii secundi. Si BC sit minor $\frac{1}{3}AB$; tunc sine ulla bisectione facta, per priorem quidem regulam error erit minor $2\frac{1}{2}$ minuti, per posteriorem vero minor quam $1\frac{1}{3}$ secundi. Adhibita autem bisectione per priorem quidem regulam error erit minor quam decima pars minuti; per posteriorem vero; erit minor minuto tertio. Si BC sit minor quam $\frac{1}{4}AB$, tunc sine ulla bisectione per priorem regulam, error erit circiter $\frac{2}{3}$ minuti, per posteriorem vero erit minor quam quarta pars minuti. Unde ad sequentia nulla amplius bisectione opus esse patet; et si quidem BC sit minor quam $\frac{1}{5}AB$, tunc priore regula error erit circiter quintae partis minuti, ac proinde in plerisque casibus sequentibus regula prior sufficiet.

Quare ut omnia in unum colligamus: Si quidem Tangens BC non sit multo minor quam AB, opus est quadrisectione anguli; si BC sit minor dimidia AB, sufficit bisectio. Si BC sit minor quam $\frac{1}{3}AB$, tunc regula posterior sufficit sine ulla anguli sectione,

1 qvam *(1)* duodecim secundorum; per posteriorem vero minor qvam minuti secundi pars trigesima *dazu am Rand*: Errores calculi pro posteriore regula error semper decuplicandus *(2)* $\frac{4}{5}$ *L* 4 sit *(1)* circiter *(2)* minor *L* 5 erit *(1)* minor *(2)* circiter $2\frac{1}{2}$ *L* 6 sit *(1)* circiter *(2)* minor $\frac{1}{2}$ *L* 14 f. erit *(1)* minor qvam unius *(2)* circiter *L* 17 BC *(1)* sit major qvam $\frac{3}{4}$ *(2)* non *L*

prior autem cum bisectione. Si BC sit minor quam $\frac{1}{5}AB$ tunc etiam prior sufficit sine bisectione. Varia autem compendia praxis ipsa docebit.

Contra pro inventione laterum ex datis angulis et uno latere, geminas alias regulas, non minus faciles habeo, quas alias explicabo.

4 alias: vgl. N. 51 prop. XLVIII u. L.

28. QUADRATURAE CIRCULI ARITHMETICAE PARS SECUNDA [Juni – Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 99–108. 5 Bog. 2°. 17 S. auf Bl. 99–107 r°. Textfolge Bl. 103–104, 101–102, 99–100, 105–107 r°. Auf Bl. 107 v°–108 N. 29, N. 30 u. N. 31. Cc 2, Nr. 1102, 1338, 1339, 1489

Datierungsgründe: N. 28 setzt N. 20 voraus, wie mehrere Verweise belegen, und ist selbst Vorlage für den größten Teil der zweiten Hälfte von N. 51. Die letzte Proposition und das zugehörige Scholium von N. 28 (= S. 348 Z. 19 – S. 355 Z. 9) sind nach N. 18_1 und N. 19 entstanden (s. dort). Auf S. 352 Z. 7 bezeichnet Leibniz rekursiv definierte Folgen als „series substitutrices“, ebenso in Ergänzungen auf zwei Handschriften vom 26. Juni 1676 (VII, 3 N. 60 S. 757 u. VII, 5 N. 84 S. 559), während er sonst dafür „series replicatae“ verwendet. Nach dem Schluss von N. 28 wurden sukzessive N. 29, N. 30 und N. 31 auf den Bogen Bl. 107–108 geschrieben. Für prop. XLIII–XLVIII von N. 51 gibt es keine Vorstufen in N. 28, diese werden im Wesentlichen in N. 31, N. 34 u. N. 35 erarbeitet. Das Scholium (= S. 347 Z. 19 – S. 348 Z. 18) zur Vorstufe von prop. L ist vermutlich nach der Studie N. 27, dat. 29. Juni 1676, entstanden.

In omni curva Analytica simplice, si abscissa aequalis sit parametro ordinata ejus abscissae eidem aequalis erit.

Sit curva Analytica simplex $1C2C$. Ajo si abscissa $A2B$ aequetur parametro p, ejus ordinatam $2B2C$ eidem aequari.

Si lateri recto p. aequalis abscissa AP erit et ejus ordinata PR ipsi AP aequalis.

---

15 f. *Am Rand:* $v \sqcap \frac{y^e}{p^{e-1}}$. $v^3 \sqcap y^2p$. $\frac{v}{p} \sqcap \frac{y^3p^{-1}}{v^{3-1}}$. $v^2y \sqcap p^3$.

19 f. *Darüber, am Rand:* artic. ...

15–18 In ... aeqvari *gestr. und wieder gültig gemacht L*

---

17 Sit curva: Leibniz bezieht sich im Folgenden auf die fig. 6–8 (= Fig. 8–10) in N. 20 S. 237 Z. 4 bis S. 238 Z. 1.

Nam si exempli causa ordinatae sint ut cubi abscissarum; erit quilibet cubus abscissae aequalis rectangulo solido sub ordinata et quadrato lateris recti constantis, ergo et cubus abscissae, ad quadratum lateris recti applicatus sive per quadratum lateris recti divisus, aequalis erit ordinatae. Ergo si abscissa sit latus rectum cubus lateris recti divisus per quadratum lateris dabit pro ordinata latus rectum. Idemque est in caeteris curvis. Hinc rectangulum APR est quadratum lateris recti. At rectangulum APR est ad rectangulum $A1B1C$ in composita ratione AP ad $A1B$ et PR ad $1B1C$, id est AP cub. ad $A1B$ cub., id est in ratione AP quadratoquad. ad $A1B$ quadratoquad. unitate semper ad exponentem, hoc loco 3. accedente adeoque generaliter in ratione AP ad $A1B$ multiplicata secundum numerum $e+1$. Porro rectangulum isoparallelum, $A1B1C$ est ad inscriptum Trilineum $A1B1CA$, ut $\omega+e$ ad ω. per prop. praeced. Porro in propositione praesenti ω semper est 1. quia ordinatae, quarum exponens ω sunt, ad nullam potentiam assurgunt neque enim ipsarum potentias aliquas, sed ipsasmet esse diximus in ratione potentiarum ab abscissis ergo ratio $\omega+e$ ad ω erit ratio $1+e$ ad 1. Ergo rectangulum isoparallelum erit ad Trilineum inscriptum, ut $1+e$ ad 1. Ergo Rectangulum APR, id est per artic. 1. quadratum lateris recti est ad Trilineum $A1B1CA$ in composita ratione $1+e$ ad 1 et ratione lateris recti AP ad altitudinem $A1B$ multiplicata secundum numerum $e+1$. Unde in parabola communi, ubi e valet 2 ratio

4 f. *Am Rand:* Non habemus opus PR nisi in media figura.

1 erit *(1)* qvaelibet ordinata *(2)* | qvaelibet *ändert Hrsg.* | cubus *L* 9 f. adeoqve ... e + 1 *erg. L* 16 rectangulum inscriptum *L ändert Hrsg.* 16 Trilineum isoparallelum *L ändert Hrsg.* 20 e + 1. *(1)* id est *(2)* Corollar. Si Latus rectum sumatur pro mensura sive unitate ordinatae parabolae vel Paraboloeidum rationalium, erunt qvadrata, Cubi, qvadrato-qvadrata etc abscissarum; et summa omnium qvadratorum, seu omnium ordinatarum qvae sunt ut qvadrata abscissarum, | id est area Trilinei Parabolici communis *erg.* | erit triens cubi altitudinis | seu maximae abscissae *erg.* |; summa omnium Cuborum | vel area Trilinei parabolici cubici *erg.* | erit qvarta pars qvadrato-qvadrati altitudinis et ita porro generaliter, area Trilinei Paraboloeidalis rationalis A1B1CA erit $\frac{\overline{\mathrm{A1B}}^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}$. seu potentia altitudinis vel abscissae ultimae A1B cuius exponens e+1

12 per prop. praeced.: s. N. 20 prop. 19. 17 per artic. 1.: Z. 6.

quadrati lateris recti ad trilineum composita est ex ratione tripla, et ipsarum AP ad $A1B$ triplicata.

Trilineum $A1B1CA$ Parabolae quadraticae, cujus ordinatae sunt ut quadrata abscissarum, aequatur $\frac{\text{cub. } A1B}{3AP}$.

Parabolae Cubicae Trilineum, aequatur $\frac{\text{quadrato-quad. } A1B \text{ seu } \boxed{4}\, A1B}{4 \text{ quad. } AP, \text{seu } 4\,\boxed{2}\, AP}$.

Trilineum Parabolicae quadrato-quadraticae aequatur $\frac{\boxed{5}\, A1B}{5\,\boxed{3}\, AP}$. seu potentiae quintae ab $A1B$ divisae per quintuplum cubi ab AP. et generaliter Trilineum Paraboloeidale rationale ubi non potentiae ordinatarum, sed ipsae ordinatae sunt proportionales potentiis abscissarum exponentem habentibus e, posito latere recto AP, altitudine trilinei $A1B$ aequabitur: $\frac{\boxed{e+1}\, A1B}{e+1, \boxed{e-1}\, AP}$.

Hoc adeo facile est, ex praemissis, ut uno tantum exemplo calculandi modum ostendi sufficiat, unde caeterorum omnium generalis ratio apparebit: Sint ipsae BC ordinatae proportionales quadratis abscissarum AB, tunc e valebit 2 et erit quad. ab AP ad trilineum $A1B1CA$ in ratione composita ex tripla et ipsius AP ad $A1B$ triplicata, seu erit ut triplus cubus ab AP ad cubum ab $A1B$. Ergo communi recta AP ducta in quadratum et trilineum, fiet ex quadrato cubus, ex trilineo cylinder ejus, et cubus AP erit ad cylindrum sub AP, basi trilineo, ut triplus Cubus ab AP ad Cubum ab $A1B$, ergo Cylinder

---

11–17 *Am Rand:* Corollarium: Si sint figurae quarum ordinatae [*bricht ab*]

numerum e exponentem dignitatis abscissarum ordinatis proportionalium, excedit unitate; divisa per numerum e + 1 Hoc ita manifestum est, ut uno tantum alterove modo calculandi modum ostendi sufficiat, qvi simul rationem generalem indicabit. sint primum ipsae BC, ut qvadrata ipsarum AB; | et e valebit 2. et *erg.* | per prop. praeced. erit qvad ab AP ad Trilin A1B1CA in ratione composita ex tripla, et ratione AP ad A1B triplicata seu triplum qvadr. AB erit ad Trilin. A1B1CA ut cub AP ad cub A1B, si AP sit unitas, unus verbi gratia, etiam cub AP erit unitas, unus scilicet pes cubicus, et qvadr. AB, erit unitas, scilicet pes qvadratus. itaque 3 erit ad Trilin. A1BCA, ut 1 ad cub A1B. adeoque Trilineum A1BCA aequabitur $\frac{\text{cub. A1B}}{3}$ vel si reddere velis unitatem servandae homogeneorum legis causa, $\frac{\text{cub. A1B}}{3 \text{ qvad. AP}}$. Si sit Parabola Cubica, Trilineum *(3)* Unde *L* 7 qvintuplum qvadrato-qvadrati *L ändert Hrsg.* 16 f. cylindrum *(1)* trilinei *(a)* cuius *(b)* cuius altitudo *(aa)* A1P *(bb)* AP *(2)* sub AP | in *gestr.* | | basin trilineum *ändert Hrsg.* |, ut *L*

Trilinei aequalis trienti Cubi ab $A1B$, et applicato utroqve solido ad rectam AP, fiet Trilineum parabolae quadraticae, $A1B1CA$ aequal. $\frac{\text{cub. } A1B}{3AP}$. Similis ratiocinatio instituta in universum, tantum e adhibendo in locum 2. dabit Trilineum Paraboloeidale rationale quodcunque aequale $\frac{\boxed{e+1}\,A1B}{e+1,\ \boxed{e-1}\,AP}$.

5 Scholium.

Poteramus hoc solo circa curvas Analyticas rationales simplices theoremate contenti esse cum quo Paraboloeidum rationalium dimensio exhibetur si praeter quadraturam Circuli Arithmeticam nihil dare constituissemus; sed quoniam non illa tantum sed et caeterae omnes a nobis hactenus datae imo pene dixerim et ab aliis proditae ex eodem
10 fonte (prop. 7) sane omnium hactenus apertorum uberrimo fluunt: Indulsimus nonnihil foecunditati nostrorum principiorum, ut appareat quanta ex quantulis duci possint. Ridiculum etiam videbatur casus singulares efferre ac demonstrare velle, cum eadem opera iisdem pene verbis generalissima theoremata condi possent. Praeterea Quadraturae figurarum Analyticarum simplicium, non satis aut generaliter aut distincte demonstratae
15 prostabant. Cavalerius non nisi ad paucas quasdam sua methodo pervenerat. Fermatius cum generalem omnium potestatum in numeris invenisset Summam hinc ad dimensiones omnium paraboloeidum, sed rationalium tantum, quas hac novissima propositione attigimus, pervenire potuit. Primus, quod sciam Wallisius, generalem omnium figurarum analyticarum, simplicium directarum pariter et reciprocarum invenit dimensionem. Ne-
20 que enim credo quisquam ante ipsum hujusmodi Parabolae quam suo ille jure semicubi-

4 *Am Rand:* Hic tabula scribenda earum quadraturarum.

7 cum ... exhibetur *erg. L* 9 imo ... proditae *erg. L* 10 (prop. 7) *erg. L*

10 prop. 7: vgl. N. 20. 15 pervenerat: B. Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, 1647, S. 243–319. 16 invenisset: vgl. den Brief von Fermat an Mersenne von Februar/März 1642, tlw. gedr. in M. Mersenne, *Tractatus mechanicus*, 1644, praefatio, § IV, Bl. a1 v° – a2 r° (*FO* I S. 195–198; Mersenne, *Correspondance* XI, S. 55–58). 19 invenit: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 64 u. 102–107, S. 52 f. u. 76–84 (*WO* I S. 395 u. 408–412).

calem appellavit quadraturam dederat, in qua scilicet quadrata ordinatarum sunt ut cubi abscissarum; idque supra vires simplicis indivisibilium Methodi est, qualem Cavalerius publicarat. Et reciprocae etiam quae rationales sunt peculiares, patiuntur difficultates. Qualis est Antiparabola, in qua ordinatae sunt ut quadrata abscissarum reciproce, quam tamen et R. P. Berthet e Soc. Jesu propriis meditationibus felici observatione quadravit. Caeterum plerique alii non partes quaslibet harum figurarum, sed eas tantum metiebantur quibus rectangulum circumscriptum aut quadratum ut portionem $APR1CA$, cum ordinata scilicet PR et abscissa AP lateri recto et inter se aequales sunt. Quemadmodum ex R. P. Fabri *Synopsi Geometrica* videri potest; qui partem hujus argumenti (circa Paraboloeides rationales quadratis inscriptas) eleganter ac succincte tractavit. Praeterea plurima sola inductione ingenuosa quidem et autore Wallisio digna, sed quam tamen demonstratione muniri, intererat profecto Geometriae. Eam vero nos, ut nihil aliorum laboribus detrahamus, ex nostris quoque principiis generalem admodum et plenam consecuti sumus.

Nunc ad ipsam paulatim Circuli Quadraturam accedimus.

---

15 *Nebenbetrachtung, in anderer Tinte:* $\frac{1}{1+t^2} \sqcap 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8$
$\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$ etc.

Sit $t \sqcap f + h$. fiet $\frac{1}{1+f^2+2fh+h^2}$. Sit $1+f^2$ aequ. l et fiet $\frac{1}{1+t^2} \sqcap \frac{1}{l+2fh+h^2}$, sive aequ. $\frac{1}{l} - \frac{2fh+h^2}{l^2}, + \frac{4f^2h^2+4fh^3+h^4}{l^3} - \frac{8f^3h^3+12f^2h^4+6fh^5+h^6}{l^4}$ etc. et

$$\int \frac{1}{1+t^2} \sqcap \frac{h}{l} - \frac{2fh^2}{2l^2} - \frac{h^3}{3l^2} + \frac{4f^2h^3}{3l^3} + \frac{4fh^4}{4l^3} + \frac{h^5}{5l^3} - \frac{6fh^6}{6l^4} - \frac{h^7}{7l^4} - \frac{8f^3h^4}{4l^4} - \frac{12f^2h^5}{5l^4} \text{ [etc.]}$$

5 f. qvadravit. *(1)* Attamen Wallisius pariter ac pleriqve *(2)* Caeterum *L* 8 scilicet AR et abscissa AB *L ändert Hrsg.* 16 $+t^4 \mid -t^5 + t^6$ *ändert Hrsg.* | *L* 17 $-\frac{t^3}{3} \mid + \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{6}$ *ändert Hrsg.* | etc. *L*

---

3 publicarat: B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635. 5 quadravit: Bertet legte Leibniz seine Methode in einem Gespräch am 9. Februar 1676 dar; s. III, 1 N. 76. 10 tractavit: H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 242–274.

Prop. . . .

Diameter est ad sinum versum in duplicata ratione secantis arcus dimidii ad tangentem arcus integri.

Prop.

Maximus terminus progressionis Geometricae in infinitum decrescentis, est proportione medius inter maximam summam et maximam differentiam vel quod idem est: Summa Progressionis Geometricae in infinitum decrescentis est ad terminum primum, ut terminus primus ad differentiam primi a secundo.

---

ubi $h.$ et f arbitrariae modo $f+h$ sit aeq. datae $t.$ (et $1+f^2 \sqcap l.$). Ergo possunt sic assumi ut sit $2fh+h^2$ multo minor quam $1+f^2$. Et tunc celerrime appropinquabitur efficique poterit ut sufficiat adhiberi $\frac{h}{l} - \frac{2fh^2}{2l^2} - \frac{1-4f^2}{3l^3}h^3$ ad exactitudinem qvantumlibet.

$f^2+2hf+h^2 \sqcap \frac{1+f^2}{100} + f^2. \ \frac{1}{100}. \ \frac{1}{10000}. \ \frac{1}{1000000}.$

$\frac{2fh+h^2}{1+f^2} \sqcap \frac{1}{100}$. Ergo fiet $2fh100+h^2100 \sqcap 1+f^2$ et $100f^2+2fh100+h^2100 \sqcap 101f^2+1$ et $10f+10h \sqcap \sqrt{101f^2+1}$ et $h \sqcap \sqrt{101f^2+1}-10f,, \smile 10.$

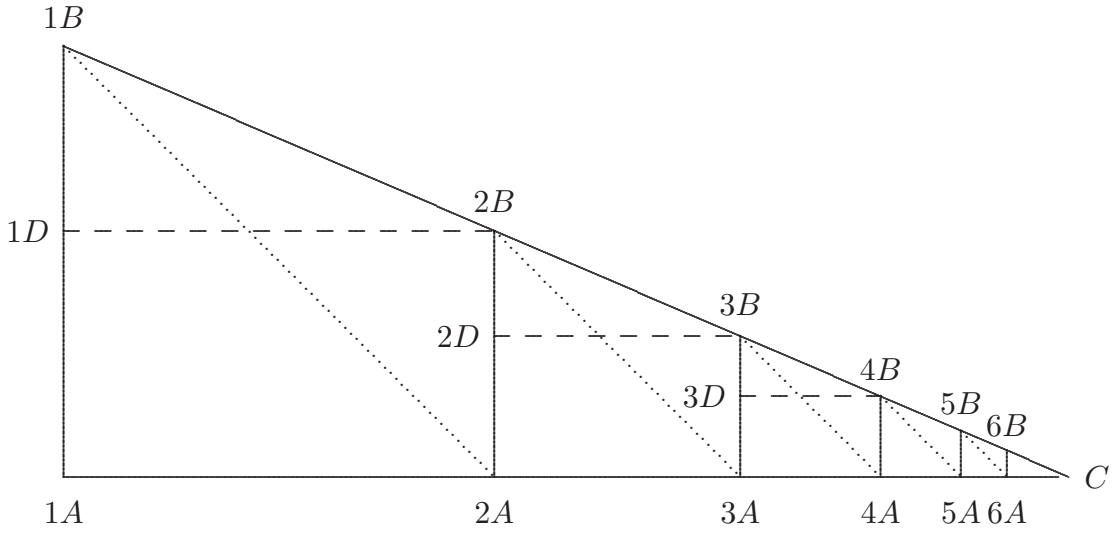
Unde patet facile h in rationalibus assumi posse talem, ut fiat minor quam $\frac{1}{100}$ quod quaerimus.

Nota rectius jungentur $1+2fh$.

2–5 tangentem *(1)* describendum *(2)* arcus integri | Prop. *gestr. erg. Hrsg.* | *(a)* Summa Terminorum Progressionis Geometrice decrescentis in infinitum, est ad primum, ut primus ad differentiam primi a secundo *darunter:* exscribenda demonstratio *(b)* Summa Terminorum Progressionis Geometricae in infinitum decrescentis e *(c)* Primus *(d)* Maximus *L*

---

3 arcus integri: Richtig wäre arcus dimidii. Leibniz übernimmt den Fehler zunächst in N. 51, prop. XXVII, und korrigiert ihn dort (s. die Variante zu S. 592 Z. 10).



[*Fig. 1*]

Variae hujus Theorematis prostant demonstrationes apud Geometras, ex quibus illam selegi quae rem quodammodo oculis subjicit. Rectae $1A2A3A$ ad angulos rectos insi-

2 *(1)* Qvantitates A B C D E etc 0 differentiae f g h l etc 0 *(2)* Sint termini progressionis Geometricae continuae in infinitum decrescentis ab A. usqve ad 0. Est A ad B ut B ad C. Ergo et A − B, sive f, ad B − C sive g, ut A ad B. *(a)* et Differentiae ergo f. g. h. l. etc. terminis A. B. C. D. etc proportionales sunt; f ad A *(b)* qvar⟨e⟩ etiam f ad A ut g ad B. *(aa)* et ita h ad C *(bb)* et h ad C, et l ad D, etc. qvare et f + g + h + l etc. 0 ad A + B + C + D + E etc 0, ut f ad A. Ergo et Summa differentiarum ad Summam terminorum, ut f ad A Est autem Summa differentiarum, A per C o r o l l. p r o p. ... *(b)* Et ita de caeteris Ergo et summa Differentiae ergo progressionis geometricae terminis proportionales sunt; A ad f, ut B ad g. *(aa)* ut C ad h. *(bb)* et B ad g ut C ad h etc. Ergo et Summa Terminorum, (A + B + C + D etc 0.) est ad Summam differentiarum (f + g + h etc 0) | ut *(aaa)* prima differentia ad primum terminum *(bbb)* primus terminus ad primam differentiam seu *erg.* | ut f ad A. at Summa differentiarum est ipse primus terminus A per prop. ... coroll. Ergo Summa terminorum est ad A ut A ad f. Qvod asserebatur. *(3)* Variae *L*

2 demonstrationes: vgl. z. B. Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. II, prop. LXXXIII, S. 99 f. 9 f. per C o r o l l. p r o p. ...: Leibniz bezieht sich auf das gestrichene Korollar in N. 20 S. 185 Z. 33 – S. 186 Z. 30.

stat $1A1B$ progressionis cujusdam Geometricae in infinitum decrescentis terminus maximus; unde ducatur $1B2A$, angulo semirecto, et ex $2A$ erigatur perpendicularis $2A2B$, progressionis ejusdem terminus secundus. Juncta $1B2B$ producatur dum ipsi $1A2A$ productae occurrat in C. Ajo rectam $1AC$ esse seriei geometricae $1A1B$, $2A2B$ etc. in infinitum decrescentis summam, quam eamque patet esse ad $1D2B$ (sive $1A2A$, vel $1A1B$) terminum primum ut $1A1B$, idem terminus primus ad $1D1B$, differentiam inter $1A1B$, et $2A2B$, terminos scilicet primum et secundum: Quod facile ostenditur, ducantur $2B3A$, $3B4A$, $4B5A$ etc. parallelae ipsi $1B2A$, itemque ducantur $3A3B$, $4A4B$ etc. parallelae ipsi $1A1B$. ac denique ipsae $2D3B$, $3D4B$ etc. parallelae et aequales ipsis $2A3A$, $3A4A$ etc. Ob angulos $3A2B2A$, $4A3B3A$ etc. seminormales, ipsae $2A3A$ (vel $2D3B$) ipsis $2B2A$, aequales sunt. Et ita de caeteris. Porro quoniam $1B1D$ est ad $2B2D$ ut ($1D2B$, sive) $1A1B$, ad ($2D3B$ sive) $2A2B$ eodemque modo $2B2D$ ad $3B3D$ ut $2A2B$ ad $3A3B$ etc. erunt differentiae quantitatum, nempe ipsae $1B1D$, $2B2D$, $3B3D$ etc. quantitatibus $1A1B$, $2A2B$, $3A3B$ etc. proportionales, adeoque quantitates hae sive lineae progressionis Geometricae sunt. Porro ipsis aequales sunt quantitates $1A2A$, $2A3A$, $3A4A$; etc. quarum summa est recta $1AC$, ergo et recta $1AC$, omnium rectarum progressionis Geometricae decrescentis, $1A1B$, $2A2B$, $3A3B$ etc. summa erit. Quod asserebatur.

Prop.:

Iisdem positis Recta FG dimidiata $\langle\!-\!\rangle$ est: $\frac{\boxed{2}BF}{\boxed{1}AB} - \frac{\boxed{4}BF}{\boxed{3}AB} + \frac{\boxed{6}BF}{\boxed{5}AB} - \frac{\boxed{8}BF}{\boxed{7}AB}$ etc. vel Recta FG ordinata conjugata figurae segmentorum Circuli aequalis est

10 f. Ob ... caeteris. *erg. L* 19 f. Iisdem ... vel *erg. L*

4 Ajo: vgl. *a. a. O.*, lib. II, prop. LXXXI, S. 98 f. 19 Iisdem positis: Gemeint ist S. 322 Z. 2 f.; vgl. N. 51 prop. XXVII u. XXVIII, insbesondere S. 593 Z. 6. 19 Recta FG: Die nicht aufgefundene zugehörige Figur (vgl. N. 22 Fig. 2 S. 267 Z. 4 u. N. 51 fig. 9 S. 545 Z. 4) dürfte mindestens folgende

duplo summae ex rectis infinitis ts, rq, pa, etc. posito Ft, Fs, Fr, Fq, Fp, Fa, etc.

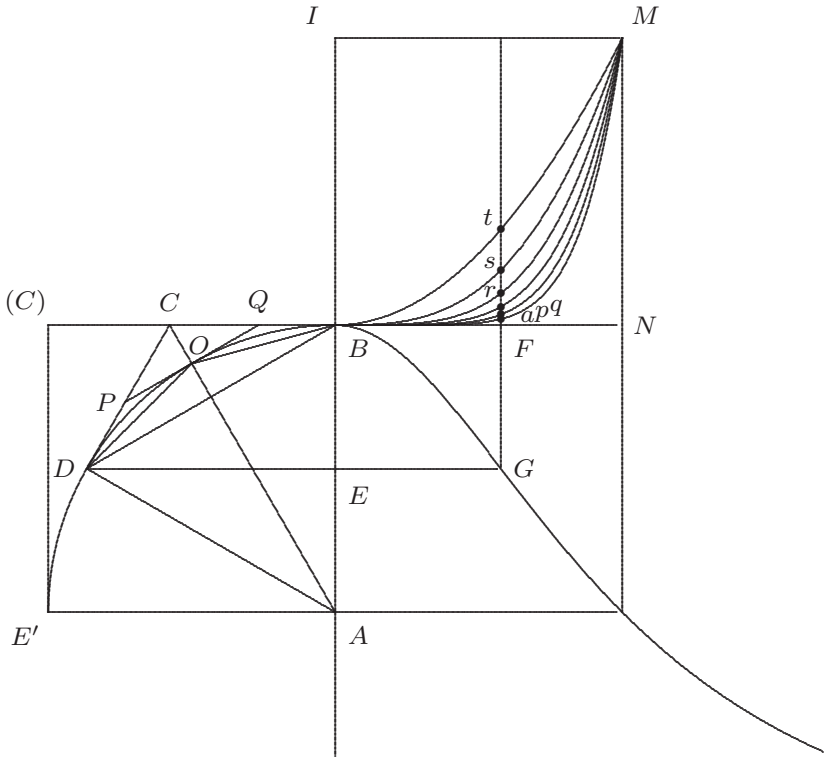
---

1 *Nebenbetrachtung:* $\overbrace{\frac{y^2}{a} - \frac{y^4}{a^3}}^{ts} + \overbrace{\frac{y^6}{a^5} - \frac{y^8}{a^7}}^{rq}$ etc. $\frac{ts}{rq} \sqcap \frac{y^4}{a^4}$.

$$\frac{\frac{y^2}{a} - \frac{y^4}{a^3}}{\frac{y^2}{a} - \frac{y^4}{a^3}\text{,,} - \text{“}\frac{y^6}{a^5} - \frac{y^8}{a^7}} \sqcap \frac{1}{1 - \frac{y^4}{a^4}} \sqcap \frac{a^4}{a^4 - y^4}.$$

1 duplo summae ex *erg. L*

Elemente enthalten haben, wie sich aus weiteren Verweisen ergibt:



3 $\sqcap \frac{y^4}{a^4}$: Richtig wäre $\frac{a^4}{y^4}$. Dasselbe Versehen unterläuft Leibniz in S. 326 Z. 11, er rechnet jedoch richtig weiter.

esse ordinatas a parte concava ad curvas BtM, parabolam quadraticam seu gradus 2^{di}, BsM quadratoquadraticam seu gradus quarti, BrM, Quadrato-Cubicam seu gradus sexti; BqM, gradus octavi, BpM gradus decimi; BaM gradus duodecimi; etc. quae latere recto AB vel BN, axe BI vertice B intra quadratum $IBNM$ describuntur.

Nam ex naturis harum Parabolarum supra explicatis

$$\begin{array}{cccccccc} Ft \text{ est} & Fs \text{ est} & Fr \text{ est} & Fq \text{ est} & Fp \text{ est} & Fa \text{ est} & & \\ \dfrac{\boxed{2}\,BF}{\boxed{1}\,AB} & \dfrac{\boxed{4}\,BF}{\boxed{3}\,AB} & \dfrac{\boxed{6}\,BF}{\boxed{5}\,AB} & \dfrac{\boxed{8}\,BF}{\boxed{7}\,AB} & \dfrac{\boxed{10}\,BF}{\boxed{9}\,AB} & \dfrac{\boxed{12}\,BF}{\boxed{11}\,AB} & \text{etc.} & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} \text{Ergo } ts \text{ est} & & & rq & & pa & & \\ \dfrac{\boxed{2}\,BF}{\boxed{1}\,AB} - \dfrac{\boxed{4}\,BF}{\boxed{3}\,AB}, & \dots & - & \dots & \dots & - & \dots & \text{etc.} \end{array}$$

Unde patet esse et ts ad rq et rq ad pa ut $\boxed{4}\,BF$ ad $\boxed{4}\,AB$ adeoque $ts.\,rq.\,pa.$ etc. progressionis geometricae in ratione $\boxed{4}\,AB$ ad $\boxed{4}\,BF$ decrescente, quia AB major quam BF. Hinc per prop. ... $ts - rq$ est ad ts ut ts ad summam, $ts + rq + pa$ etc., ts ad ts, ut $\boxed{4}\,AB$

10 f. etc. *(1)* Unde patet esse ts. rq. pa etc. progressionis Geometricae, in ratione $\boxed{2}$AB ad $\boxed{2}$BF, sive in duplicata ratione AB ad BF *(a)* Ergo per prop. ... earum summa in infinitum *(b)* adeoqve progressio erit decrescens, qvia AB major est qvam BF. Hinc | per prop. ... *erg.* | summa omnium | rectarum *erg.* | ts, rq, pa, etc erit *(aa)* ad earum differentiam *(bb)* ad earum terminum primum ts, | id est ut 1 ad $1 - \frac{\boxed{4}\mathrm{BF}}{\boxed{4}\mathrm{AB}}$ sive ut $\boxed{4}$AB ad $\boxed{4}$AB − $\boxed{4}$BF est autem $\boxed{4}$AB − $\boxed{4}$BF, idem qvod $\boxed{2}$AB − $\boxed{2}$BF, duct. in $\boxed{2}$AB + $\boxed{2}$BF. Ergo erit summa, ts+rq+pa, ad ts *erg.* | ut ipse terminus primus ts, ad differentiam inter ts et rq. Est autem ts ad ts − rq. ut $\frac{\boxed{2}\mathrm{BF}}{\boxed{1}\mathrm{AB}} - \frac{\boxed{4}\mathrm{BF}}{\boxed{3}\mathrm{AB}}$, ad $\frac{\boxed{2}\mathrm{BF}}{\boxed{1}\mathrm{AB}} - \frac{\boxed{4}\mathrm{BF}}{\boxed{3}\mathrm{AB}}$,, demto $\frac{\boxed{6}\mathrm{BF}}{\boxed{5}\mathrm{AB}} - \frac{\boxed{8}\mathrm{BF}}{\boxed{7}\mathrm{AB}}$ Ergo ts + rq + pa, etc. | V *erg.* | idem est qvod | summa *erg.* | Ft + Fr + Fp etc | X *erg.* | demta summa Fs + Fq + Fa etc | − Z *erg.* | Sunt autem tam illae qvam hae progressionis Geometricae *(aaa)* decrescentis, in ratione *(bbb)* nam Ft est ad Fr et Fr ad Fp, ut qvadr. ab AB. ad qvadr. a BF *(aaaa)* Fs Fq Fq Fa *(bbbb)* unde progressio est *(cccc)* unde progressio est decrescens, qvia qvadr. AB, maius qvadrato BF. Ergo *(aaaaa)* summa Ft + Fr +Fp etc. *(bbbbb)* summa, X est ad Ft, ut Ft ad Ft − Fr. per prop. ... sive X est aeqval $\frac{\boxed{2}\mathrm{Ft}}{\mathrm{Ft} - \mathrm{Fr}}$ eodem modo: Z est ad F *(2)* Unde *L* 11 et ... adeoqve *erg. L* 12 f. BF. *(1)* Hinc | per prop. ... *erg.* | Summa omnium est ad primum ts, ut ts ad ts − rq. *(a)* est autem rq ad ts ut $\boxed{2}$BF ad $\boxed{2}$AB *(aa)* seu rq aeqval ts in *(bb)* et rq *(cc)* sive ut ts, in $\boxed{2}$AB, ad ts in $\boxed{2}$AB − rq in $\boxed{2}$AB *(b)* | est autem *nicht gestr.* | *(c)* sive ts − rq *(2)* Hinc *L*

13 per prop. ... : s. o. S. 322 Z. 4–8.

ad $\boxed{4}AB$, et rq ad ts ut $\langle\boxed{4}\rangle BF$ ad $\boxed{4}AB$. Ergo $ts - rq$ ad ts, ut $\boxed{4}AB - \boxed{4}BF$ ad $\boxed{4}AB$. Quae ratio est composita ex rationibus BF^2 ad Σ in AB, et $AB^2 - BF^2$ ad AB^2. Eodem ergo modo et ts erit ad summam, quam vocabimus Σ eodemque modo erit et rectangulum ts in AB, ad rectangulum Σ in AB. Est autem ts aequal. $\dfrac{\boxed{2}BF}{\boxed{1}AB} - \dfrac{\boxed{4}BF}{\boxed{3}AB}$ vel ts, AB aeq. $\dfrac{\boxed{2}AB \text{ in } \boxed{2}BF, -\boxed{4}BF}{\boxed{2}AB}$, sive rectangulum ts, AB est ad quad. BF in ratione $\boxed{2}AB - \boxed{2}BF$ ad AB^2. Ergo ratio rectanguli ts in AB ad rectang. Σ in AB est composita ex rationibus BF^2 ad Σ in AB, et $AB^2 - BF^2$ ad $\boxed{2}AB$. At eandem supra invenimus compositam ex rationibus $AB^2 + BF^2$ ad AB^2, et $AB^2 - BF^2$ ad BF^2. Ergo rationes BF^2 ad Σ in AB, et $AB^2 + BF^2$ ad AB^2 sunt aequales. Ergo erit Σ in AB, ad AB^2, seu Σ ad AB ut BF^2 ad $AB^2 + BF^2$, sed dimidia FG. etiam est ad AB ut BF^2 est ad $AB^2 + BF^2$. Ipsa FG nam per praeced. est ad duplum AB sive ad BH ut $\boxed{2}BC$

5–7 *Nebenrechnungen:*

$$\frac{ts, AB}{\boxed{2}BF} \sqcap \frac{\boxed{2}AB - \boxed{2}BF}{\boxed{2}AB}. \quad \frac{ts, AB}{\Sigma, AB} \sqcap \frac{\dfrac{\boxed{2}AB - BF^2}{\boxed{2}AB}, BF^2}{\Sigma, AB}.$$

2 $\boxed{4}$AB *(1)* haec ergo eadem qvae ts ad summam *(2)* Haec ergo ut ts ad summam *(a)* seu ut ratio ts ad AB, est ad rationem summae ad AB. Ratio autem ts ad AB, est $\boxed{2}$ ——— *(b)* seu ut $\frac{\text{ts}}{\text{AB}}$ ad $\frac{\text{summ.}}{\text{AB}}$: id est ut $\frac{\boxed{2}\text{BF}}{\boxed{2}\text{AB}} - \frac{\boxed{4}\text{BF}}{\boxed{4}\text{AB}}$ ad $\frac{\text{summ}}{\text{AB}}$ seu ut $\frac{\boxed{2}\text{BF, in } \boxed{2}\text{AB},, - \boxed{4}\text{BF}}{\boxed{4}\text{AB}}$ seu ut $\frac{\boxed{2}\text{BF, in } \boxed{2}\text{AB} - \boxed{4}\text{BF}}{\boxed{4}\text{AB}}$ *daneben*: $\frac{\text{ts, in AB}}{\Sigma \text{ in AB}} \sqcap \frac{\frac{\text{BF}^2, \text{AB}^2 - \text{BF}^2}{\boxed{2}\text{AB}}}{}$ *(3)* id est *(4)* Qvae *L* 3 f. eodemqve ... Σ in AB *erg. L*

11 per praeced.: s. o. S. 322 Z. 1–3.

sive $\boxed{2}BF$ est ad $\boxed{2}AC$, sive ad $\boxed{2}AB + \boxed{2}BF$ sive ad $\boxed{2}AB + \boxed{2}BC$. Ergo dimidia FG est aeq. Σ. summae infinitarum rectarum $ts.\,rq.\,pa.$

[Prop.]

„Spatii Trilinei $BFGB$, quod complemento est ipsi $BEGB$, figurae segmentorum „circuli, dimidium sive per ... Trilineum $DCBOD$ aequale est summae hujus seriei „infinitae decrescentis $\dfrac{\boxed{3}BF}{3\boxed{1}AB} - \dfrac{\boxed{5}BF}{5\boxed{3}AB} + \dfrac{\boxed{7}BF}{7\boxed{5}AB} - \dfrac{\boxed{9}BF}{9\boxed{7}AB}$ etc.

Nam per prop. praeced. ordinata ejus FG, duplum est hujus seriei infinitae decrescentis

$$\frac{\boxed{2}BF}{\boxed{1}AB} - \frac{\boxed{4}BF}{\boxed{3}AB} + \frac{\boxed{6}BF}{\boxed{5}AB} - \frac{\boxed{8}BF}{\boxed{7}AB} \text{ etc.}$$

seu Rectis: $Ft - Fs + Fr - Fq$ etc.

Ergo per methodum indivisibilium ad modum prop. 6. demonstratam et summa omnium FG, id est spatium $BFGB$ erit aequale duplo summae omnium Ft sive Trilineo $BFtB$; cujus area per: ... $\dfrac{\boxed{3}BF}{3\boxed{1}AB}$ demta summa omnium Fs sive demto trilineo $BFsB$ cujus area per ... eandem est $\dfrac{\boxed{5}BF}{5\boxed{3}AB}$; addita summa omnium Fr sive addito trilineo $BFrB$, demta rursus summa omnium Fq, seu demto Trilineo; et ita porro. Quorum omnium trilineorum areae ex eadem prop. habentur. Quales serie in propositione posita expressimus. Ergo spatium $BFGB$. erit duplum hujus seriei, in propositione expressae

$$\frac{\boxed{3}BF}{3\boxed{1}AB} - \frac{\boxed{5}BF}{5\boxed{3}AB} + \text{etc.} - \text{etc.}$$

---

6 *Am Rand:* $\boxed{1}AB$ idem quod AB.

18 *Am Rand:* $\dfrac{2ay^2}{a^2+y^2} \frown y$

11 per ... prop. *(1)* 6 *(2)* | 7. *ändert Hrsg.* | demonstratam *erg. L* 13 cuius ... $\dfrac{\boxed{3}\mathrm{BF}}{3\boxed{1}\mathrm{AB}}$ *erg. L* 16 f. qvales ... expressimus *erg. L*

---

5 per ... : s. N. 20 S. 208 Z. 17 – S. 209 Z. 2. 13 per: ... : s. N. 20 prop. 20.

Prop. ...

Si a dimidio rectangulo sub sinu verso arcus integri et tangente semiarcus comprehenso; auferatur summa seriei decrescentis sequentis

$$\frac{\boxed{3}\,BF}{3\boxed{1}\,AB} - \frac{\boxed{5}\,BF}{5\boxed{3}\,AB} + \frac{\boxed{7}\,BF}{7\boxed{5}\,AB} - \frac{\boxed{9}\,BF}{9\boxed{7}\,AB} \text{ etc.}$$

in qua AB radius, BF tangens semiarcus[,] restabit segmentum circuli arcu integro proposito et recta comprehensum. Oportet autem arcum integrum non esse majorem quadrante.

Nam in figura eadem, si a dimidio rectangulo $BEGF$, (: sub BE, sinu verso arcus integri BOD, et BC, tangente arcus dimidii BO, comprehenso :) id est si a triangulo DCB, auferatur trilineum $DCBO$, id est per praeced. summa seriei infinitae in prop. expressa posita tantum BC, pro aequali BF, restabit utique segmentum $DBOD$. Oportet autem arcum BOD non esse majorem quadrante BDE' quia oportet ipsam BF, sive BC non esse radio AB, majorem, alioqui series non foret decrescens, quod tamen propositio postulat. Nam si D incideret in E', foret $B(C)$ aequalis BA.

Scholium

Servit hoc theorema ad segmentum a circulo aut segmento dato abscindendum, quod ad residuum vel totum rationem habeat datam, ita ut error sit quantumlibet parvus. Quod alioqui difficillimum esset, aut certe prolixum. Sunt tamen in eo negotio compendia quae hoc loco exponere nimis prolixum foret.

Prop. ...

„Si radius circuli sit AB, et arcus propositi BO, tangens sit BC, erit magnitudo „arcus aequalis huic seriei

„ $$\frac{\boxed{1}\,BC}{1\boxed{0}\,AB} - \frac{\boxed{3}\,BC}{3\boxed{2}\,AB} + \frac{\boxed{5}\,BC}{5\boxed{4}\,AB} - \frac{\boxed{7}\,BC}{7\boxed{6}\,AB} + \frac{\boxed{9}\,BC}{9\boxed{8}\,AB} - \frac{\boxed{11}\,BC}{11\boxed{10}\,AB} \text{ etc.}$$

11 posita ... BF *erg. L* 18 Qvod ... prolixum *erg. L*

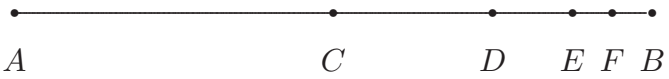
12 BDE': Leibniz bezeichnet zwei verschiedene Punkte mit E; zur besseren Unterscheidung wird für den Endpunkt des Viertelkreisbogens E' verwendet.

Hoc theorema totius tractationis palmarium et per se pulcherrimum est. Tantum ante demonstrationem praemoneo $\frac{\boxed{1}\,BC}{1\,\boxed{0}\,AB}$, idem esse quod $\frac{BC}{1}$, priore autem modo expressi, ut constantia seriei inde ab initio appareret. Exponentes enim potestatum Numeratoris (quibus aequales sunt numeri Nominatoris), sunt numeri impares deinceps ab unitate; Exponentes potestatum Nominatoris sunt numeri pares deinceps a 0. Sensus autem est si in Numero qui magnitudinem BC tangentis, exprimit dematur cubus per triplum quadratum radii divisus; addatur ejusdem surdesolidus per quintuplum quadrato-quadratum radii divisus, etc. prodire numerum exprimentem ipsam longitudinem arcus. Demonstratio ex praecedentibus facilis est. A trapezio circumscripto $ABCD$, id est a rectangulo CBA sive AB in BC, auferatur Trilineum $DCBOD$ restabit sector $ABOD$, qui ad radium AB applicatus (sive per radium divisus) dabit (ex Archimede) arcum BO dimidium arcus BD. Ex area autem Trilinei $DCBOD$ prop. ... inventa, patet rectangulum AB in DC, demto Trilineo, esse:

$$AB,\ \text{in}\ BC,\ \underbrace{-\frac{\boxed{3}\,BC}{3\,\boxed{1}\,AB}+\frac{\boxed{5}\,BC}{5\,\boxed{3}\,AB}-\frac{\boxed{7}\,BC}{7\,\boxed{5}\,AB}\ \text{etc.}}_{\text{seu}\ -\ \text{Trilin.}\ DCBOD.}$$

Quo valore ad AB applicato, sive per AB diviso, prodibit pro arcu BO, ex dato AB radio et BC tangente valor $BC-\frac{\boxed{3}\,BC}{3\,\boxed{2}\,AB}+\frac{\boxed{5}\,BC}{5\,\boxed{4}\,AB}$ etc. Quod erat demonstrandum.

Scholium



[*Fig. 2*]

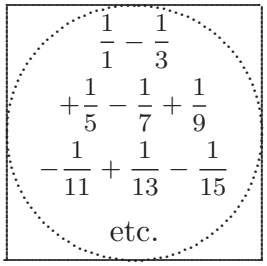
Series longitudine infinitas esse quantitates veras ac saepe magnitudine finitas, patet exemplo serierum longitudine infinitarum progressionis Geometricae decrescentis, quas numero cuidam magnitudine finito aequari, apud Geometras est in confesso, sed et si quis lineam rectam aliquam continuo bisecet et postremam partem bissectae rectae rursus

11 dabit: vgl. ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*, prop. I. 12 prop. ... : s. o. S. 328 Z. 3–6.

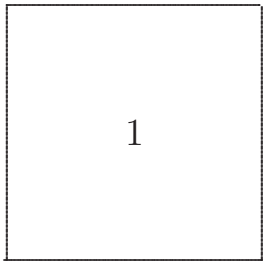
bisecet, idemque faciat quamdiu-libet, is facile ipse perspiciet, lineae AB dimidium AC, parte ejus quarta CD et octava DE, et decima sexta EF etc. auctum, ipsi lineae integrae aequiparari debere. Certe neque unquam linea excedetur, et defectus ostendetur quolibet assignabili errore esse minor; adeoque error erit nullus. Nostra autem seriei infinitae arcui circuli aequalis demonstratio Summa Seriei geometricae progressionis nititur. Satis est quidem seriem eousque produci posse, ut differentia ejus ab arcu Circuli, sit qualibet data magnitudine minor. Sed praestat tamen aequationem habere quam appropinquationem; tum quod aequatio una eademque appropinquationes exhibet infinitas, magis magisque exactas; uno semper eodemque modo compositas, ut qui unam teneat, omnes teneat; tum quod ope aequationis (transcendentis licet sive infinitae) calculi analytici institui possunt circa magnitudines, quae hactenus creditae sunt Calculo non subjectae. Quorum quam late patet usus, ostendere alterius operae est.

Prop. ...

„Circulus est ad Quadratum circumscriptum, sive arcus Quadrantis ad Diametrum, „ut $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. ad unitatem.



[*Fig. 3a*]

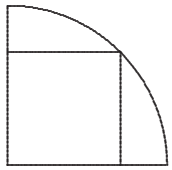


[*Fig. 3b*]

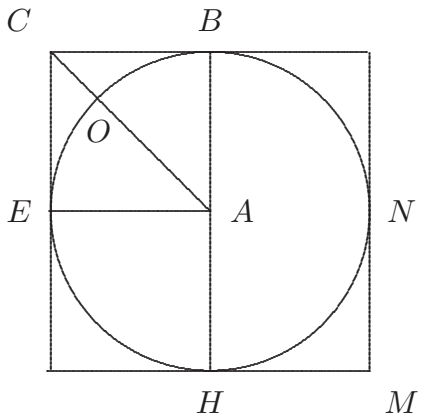
Sit arcus BO octava pars circumferentiae circuli, erit tangens ejus BC aequalis radio AB. Ergo in prop. ... pro BC ponendo AB, arcus BO erit, $\frac{AB}{1} - \frac{AB}{3} + \frac{AB}{5} - \frac{AB}{7} +$

9 uno ... omnes teneat; *erg. L* 15–17 unitatem. | Unde seqvitur Qvadrato posito 1. Circulum fore differentiam duarum serierum infinitarum progressionis harmonicae *erg. u. gestr.* | Sit *L*

18 prop. ... : s. o. S. 329 Z. 20–23.



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

$\frac{AB}{9} - \frac{AB}{11}$ etc. sive $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. est ad 1. ut arcus octantis est ad radium AB, sive ut arcus quadrantis BC, est ad diametrum HB sive denique ex inventis Archimedeis, ut Circulus $EBNH$ est ad CM quadratum circumscriptum. Q. E. D.

5 Scholium.

Ecce veram denique in Numeris Circuli quadraturam, qua nescio an simplicior dari possit, quaeve mentem afficiat magis. Hactenus appropinquationes tantum proditae sunt; aequatio vera, exactaque, nemini quod sciam visa, qualis vero ista est, quamvis infinita

4 circumscriptum. *(1)* Qvoniam | ex inventis Archimedeis *erg.* | circulus est rectangulum sub radio et semicircumferentia, id est sub (duplo radio sive) diametro, et (dimidia semicircumferentia sive) arcu qvadrantis; rectangulum autem sub diametro et arcu qvadrantis est ad qvadratum diametri, sive circumscriptum, ut arcus qvadrantis ad diametrum. Ergo et circulus EBNH est ad Qvadratum circumscriptum CM ut arcus qvadrantis BE ad diametrum HB, sive ut arcus octantis BO ad radium BA, sive | per artic. 1. *erg.* | ut $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. ad 1. Qvod erat demonstrandum. *(2)* Q. E. D. *L* 8 visa, *(1)* primus omnium Vice Comes Brounker, vir doctrina et dignitate illustris, Regiae in Anglia Societatis praeses, huic similem dedit *(a)* Hyperbolae *(b)* Hyperbolicae portionis qvadraturam, qvae Circulo integro qvodammodo respondet. Circulum ipsum, irrationalibus qvantitatibus impeditum *(aa)* Wallisius artem docuit *(bb)* Eqvidem aut impossibile est una aeqvatione finita qvadam formula Circuli magnitudinem exprimi, *(2)* qvalis *L*

3 ex inventis: vgl. ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*, prop. I. 13 f. per artic. 1: vgl. N. 51 prop. XXXV S. 603 Z. 9–13. 16 dedit: W. BROUNCKER, *The squaring of the hyperbola*. In: *Philosophical Transactions*, Bd III Nr. 34 vom 23. April/3. Mai 1668, S. 645–649.

sit, tota enim satis cognita est; et simplicissima progressione constantem uno velut ictu mens pervadit. Equidem posteritati sine certa demonstratione praejudicari non debet. Sunt tamen egregii viri qui de meliore desperant, ex quo hanc videre. Alii ita judicant; si qua unquam sperari possit quadratura vera, non aliunde facilius quam hinc petendam. Praesertim cum aliarum serierum infinitarum, huic simillimarum summa absolute haberi possit, ut infra dicam.

Corollarium 1.

„Posito Quadrato diametri 1. Circulus est differentia duarum serierum progressionis „harmonicae $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}$ etc. et $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}$ etc.

Harum duarum serierum differentiam esse patet, nam est $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ etc. Tantum ostendendum duas illas series singulas esse harmonicas. Id vero ex eo ostenditur, quod termini sunt fracti, quorum numerator constans, scilicet unitas; nominatores autem progressionis arithmeticae 1. 5. 9. 13. sive 3. 7. 11. 15. ubi differentiae semper eaedem, scilicet 4. Generaliter autem series fractionum hujusmodi, harmonica est, et tribus quibuslibet terminis assumtis, differentiae intermediae sunt in ratione extremorum, exempli gratia $\frac{1}{1}-\frac{1}{5}$ est ad $\frac{1}{5}-\frac{1}{9}$ ut $\frac{1}{1}$ ad $\frac{1}{9}$. Sint enim tres fractiones numeratorem habentes unitatem, nominatores vero arithmeticae progressionis: a. $a+b$. $a+2b$. fractiones erunt

14 est, *(1)* qvod sic ostendo, sint termini: $\frac{1}{\mathrm{a}} \cdot \frac{1}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} \cdot \frac{1}{\mathrm{a}+2\mathrm{b}}$, qvorum numerator 1. nominatores a. a + b. a + 2b. progressionis *(a)* harmonicae *(b)* arithmeticae; ajo *(aa)* esse differentias $\frac{1}{\mathrm{a}}-\frac{1}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}$ et $\frac{1}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}-\frac{1}{\mathrm{a}+2\mathrm{b}}$, ut $\frac{1}{\mathrm{a}}$ ad $\frac{1}{\mathrm{a}+2\mathrm{b}}$ differentiam duorum terminorum proximorum sibi contiguorum esse ad differentiam duorum ultimi ex his duobus a proximo, *(cc)* seriem ipsam esse harmonicam et esse differentias intermedias $\frac{1}{\mathrm{a}}-\frac{1}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}$, et $\frac{1}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}-\frac{1}{\mathrm{a}+2}$ terminis extremis | $\frac{1}{\mathrm{a}}$ et $\frac{1}{\mathrm{a}+2\mathrm{b}}$ *erg.* | proportionales. et *(aaa)* differentia *(bbb)* tribus qvibuslibet assum *(ccc)* sint ⟨in⟩ *(2)* et *L*

3 viri: vgl. Tschirnhaus an Oldenburg, 1. September 1676, III, 1 N. 92 S. 593 f. 3 Alii: Gemeint ist wohl u. a. Huygens; vgl. III, 1 N. 40. 6 infra: s. u. S. 342 Z. 8–16.

$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{a+2b}$. Ajo esse: $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}$ ad $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b}$ ut $\frac{1}{a}$ ad $\frac{1}{a+2b}$. Nam $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}$ est $\frac{b}{a \text{ in } \overline{a+b}}$ et $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b}$, est $\frac{b}{\overline{a+b}, \text{in } \overline{a+2b}}$. At $\frac{b}{a \text{ in } \overline{a+b}}$ est ad $\frac{b}{\overline{a+b} \text{ in } \overline{a+2b}}$ ut $\frac{1}{a}$ ad $\frac{1}{a+2b}$. ut asserueramus.

Corollarium secundum.

Circulus est ad Quadratum inscriptum sive [semi]circumferentia ad diametrum

ut series $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195}$ etc.

$$\boxed{\text{seu series} \quad \frac{1}{\boxed{2}\overline{2,1} - 1} + \frac{1}{\boxed{2}\overline{2,3} - 1} + \frac{1}{\boxed{2}\overline{2,5} - 1} + \frac{1}{\boxed{2}\overline{2,7} - 1} \text{ etc.}}$$

seu series $\frac{1}{\overline{4 \text{ in } 1} - 1} + \frac{1}{\overline{4 \text{ in } 9} - 1} + \frac{1}{\overline{4 \text{ in } 25} - 1} + \frac{1}{\overline{4 \text{ in } 49} - 1}$ etc. ad $\frac{1}{4}$

seu ut fractiones a quadratis duplorum imparium unitate minutis

$\frac{1}{4-1} + \frac{1}{36-1}[+]\frac{1}{100-1}$ etc. ad $\frac{1}{4}$

fractionem a quadrato impariter parium primi scilicet binarii

seu ut $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{9-\frac{1}{4}} + \frac{1}{25-\frac{1}{4}} + \frac{1}{49-\frac{1}{4}}$ etc. ad 1.

Circulus enim est ad quadratum circumscriptum

$$\text{ut } \underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{3}}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{7}}_{\frac{2}{35}} + \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{11}}_{\frac{2}{99}} \text{ etc.}$$

id est ut mox ostendam artic. 2. ut etc. ad 1.

15 artic. 2. *erg. L*

15 artic. 2.: s. u. S. 335 Z. 4 – S. 336 Z. 5; die hier ergänzte Abschnittszählung hat Leibniz in N. 51 in der entsprechenden prop. XXXV ab S. 603 Z. 9 durchgeführt.

Ergo ad dimidium quadratum circumscriptum, sive ad quadratum inscriptum erit ut $\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}$ etc. ad $\frac{1}{2}$ seu ut $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. ad $\frac{1}{4}$.

Superest ut ostendam numeros provenientes esse 3. 35. 99. 195. quales dixi.

Numeri 1. 3. 5. 7. 9. etc. sunt pares 0. 2. 4. 6. 8. etc. aucti unitate. Numeros ipsos 0 vel 1 vel 2 vel 3 etc. appellemus N. pares 0 vel 2 vel 4 vel 6, $2N$. Erit $2N+1$. numerus impar seu 1 vel 3 vel 5 vel 7 vel 9 etc.: et $2N+3$ erit impar proxime sequens 3 vel 5 vel 7 vel 9 vel 11. Adeoque generaliter $\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+3}$ erit $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ vel $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$. Jam $\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+3}$ est $\frac{2N+3,\,-2N-1}{2N+1,\text{ in }2N+3}$ seu $\frac{2}{4N^2+8N+3}$ seu $\frac{2}{4N^2+8N+4,\,-1}$. Est autem $4N^2+8N+4$, quadratum a $2N+2$. id est posito ut dixi

N esse	0 vel 1 vel 2 vel 3
erit $2N+2$	2 vel 4 vel 6 vel 8 etc.
quadrati	4 etc.

Numeros autem esse quales diximus ita demonstrabitur: Quia quaeritur $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. patet nominatorem ejus a quo subtrahitur, ut 1. 5. 9. esse semper duplum paris, 0. 2. 4. auctum unitate, ut 1. est $\overline{2,0}+1$. et 5 est $\overline{2,2}+1$. et 9 est $\overline{2,4}+1$. etc. Contra nominatorem subtrahendi, 3. 7. 11. esse semper duplum imparis 1. 3. 5. auctum unitate. Numerus 0. vel 1. vel 2. vel 3. etc. vocetur generaliter N. et erit par, $2N$. et impar erit $2N+1$. Duplum paris auctum unitate erit $4N+1$ et duplum imparis

---

2 *Nebenrechnung:* $\dfrac{\frac{2}{3}\ \frac{2}{35}\ \text{etc.}}{1}\sqcap\dfrac{\text{quadrans}}{2\text{ rad.}}.\ \dfrac{\frac{4}{3}\ \frac{4}{[3]5}}{\frac{1}{4}}\sqcap\dfrac{\text{quad.}}{\text{rad.}}.$

12 f. 4 | etc. *erg. Hrsg.* | *(1)* Sit Numerus impar N. erit impar seqvens N + 2. *(2)* Numeri impares sunt: *(a)* 0 + 1 vel 0 + 3 vel 0 + 4 etc. *(b)* 1. 1+2 1+2+2 etc. *(c)* 1 1+2 $1+\overline{2,2}$ $1+\overline{3,2}$. $1+\overline{4,2}$ etc. Pro $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc scribamus: $\underbrace{\frac{1}{1+\overline{0,2}}-\frac{1}{1+\overline{1,2}}}_{\underline{1+\overline{1,2}-1}}+\frac{1}{1+\overline{2,2}}-\frac{1}{1+\overline{3,2}}+\frac{1}{1+\overline{4,2}}-\frac{1}{1+\overline{5,2}}$ etc *(3)* Numeros L

auctum unitate erit $4N+3$. Ergo pro $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ vel $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ scribemus generaliter $\frac{1}{4N+1}-\frac{1}{4N+3}$ sive $\frac{4N+3-4N-1}{4N+1 \text{ in } 4N+3}$ vel $\frac{2}{16N^2+16N+3}$ vel $\frac{2}{16N^2+16N+4,-1}$. Est autem $16N^2+16N+4$. quadratum a $4N+2$, sive ab impari (: quem $2N+1$ esse diximus :) duplicato. Id ergo unitate minutum, dabit $16N^2+16N+3$ id est nominatores quaesitos 3 si N sit 0, et 35 si N sit 1. et 99 si N sit 2. etc.

Propositio.

Summa Seriei infinitae $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. est $\frac{1}{2}$.

Numeri autem sunt 3. 15. 35. 63. 99. Quadrati parium Unitate minuti.

Series	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	etc.	sit	A.
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{63}$	etc.	sit	B.
	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{63}$	etc.	erit	$2B$.

A serie A. auferatur series $2B$, singuli termini a singulis respondentibus, restabit series $A-2B$, ut si ab 1. auferas $\frac{2}{3}$ restabit $\frac{1}{3}$. et si ab $\frac{1}{3}$ auferas $\frac{2}{15}$ restabit $\frac{1}{5}$ et si ab $\frac{1}{5}$ auferas $\frac{2}{35}$ restabit $\frac{1}{7}$ etc. idque semper futurum ut numeri ipsius A. ordine redeant, generaliter demonstrari potest, adhibita formula Analytica ad modum Coroll. 2. prop. praecedentis. Quod in re facili, ut verbis parcam, omitto.

Ergo	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	etc.	erit	$A-2B$.
Sed	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	etc.	est etiam	$A-1$.

Habebitur ergo aequalitas inter $A-2B$ et $A-1$, sive ablato utrinque A, inter $2B$ et 1. sive inter B et $\frac{1}{2}$.

6 f. Propositio. *(1)* Summa *(2)* Unitas est summa seriei infinitae $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. cuius terminorum Numerator unitas, Nominatores vero, Qvadrati Unitate majores minuti unitate $4-1$, $9-1$, $16-1$ etc. *(3)* Summa L 14–16 idqve ... omitto *erg. L*

Ergo, B sive $\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{63}$ [etc.] valebit $\frac{1}{2}$. Quod erat demonstrandum.

Scholium

Res satis mira videtur; seriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. summam iniri posse, eamque esse $\frac{1}{2}$. Seriem autem ex ipsa per saltus excerptam $\frac{1}{3}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{99}$ etc. exprimere magnitudinem Circuli, cujus quadratum inscriptum valet $\frac{1}{4}$ quemadmodum ostensum est corollario secundo propositionis praecedentis.

Propositio ...

„Summa Seriei infinitae, $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$ etc. est 2. Numeri autem „1. 3. 6. 10. 15. 21. 28 etc. sunt Trigonales.

Series $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ etc. sit A.

$\frac{1}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}$ etc. sit $2B$.

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{20}$ etc. erit B.

A serie A. auferatur series B[,] singuli termini a singulis respondentibus, restabit series $A-B$ ut si ab 1. auferas $\frac{1}{2}$, restabit $\frac{1}{2}$. Si ab $\frac{1}{2}$ auferas $\frac{1}{6}$ restabit $\frac{1}{3}$. Si ab $\frac{1}{3}$

7 f. Propositio ... *(1)* „Summa Seriei infinitae, $\frac{1}{8}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{80}\ \frac{1}{120}$ etc. *(a)* est *(b)* valet *(c)* est $\frac{1}{4}$ Numeri autem 8. 24. 48. 80. 120. sunt Qvadrati imparium Unitate minuti Et Summa Seriei infinitae $\frac{1}{3}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{63}\ \frac{1}{80}\ \frac{1}{99}\ \frac{1}{120}$ etc. est $\frac{3}{4}$ Numeri autem 3. 8. 15. 24 etc. sunt Qvadrati Numerorum tam parium, qvam imparium, Unitate minuti

Pars prior ita demonstrabitur ad modum praecedentis, iisdem prope verbis: *(aa)* Series $\frac{1}{8}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{80}$ etc. sit A *(bb)* Series $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{8}$ etc. sit A Series $\frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$ *(2)* „Summa L

auferas $\frac{1}{12}$ restabit $\frac{1}{4}$. idque semper futurum esse, ut numeri ipsius A ordine redeant, generaliter demonstrari potest, adhibita formula Analytica ad modum corollarii prop. ... quod in re facili, ut verbis parcam, omitto.

Ergo $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ etc. erit $A - B$.

Sed $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ etc. est etiam $A - 1$.

Habetur ergo aequalitas inter $A - B$ et $A - 1$. sive ablato utrinque A, inter B et 1. Adeoque et inter $2B$ et 2.

Ergo, $2B$ sive $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}$ etc. valebit 2.

Quod erat demonstrandum.

337,13 f. *Nebenbetrachtungen:*

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqcap \frac{2}{6} \sqcap \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{1} - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{12}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{20}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{30}$

$\frac{1}{6}$

---

2 f. corollarii prop. ... : s. o. S. 335 Z. 4 – S. 336 Z. 5.

Prop. . . .

Sit Triangulum Harmonicum seu cujus numeri sunt Reciproci

	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	etc.
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	etc.	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	etc.		
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	etc.			
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	etc.				
	$\frac{1}{6}$	etc.					
	etc.						
	Naturalium	Trigonalium	Pyramidalium	Trigono-trigonalium	Trigono-pyramidalium	Pyramido-pyramidalium	Trigono-trigono-trigonalium
erunt,	$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	etc.

summae serierum in infinitum productarum.

Imo et in finitis. Sint termini quotcunque continui ex aliqua serie ut Trigonalium, vel Pyramidalium, etc. Reciprocorum sumti ut, $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$. quorum quaeritur Summa.

3–11 *Daneben:* continuanda longius Tabula:

13–340,4 *Nebenrechnungen:* $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$. $\frac{13}{30} + \frac{2}{30} \sqcap \frac{15}{30}$.

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$. $\frac{16}{60} + \frac{4}{60} \sqcap \frac{20}{60} \sqcap \frac{1}{3}$.

Sumantur ex Serie praecedenti termini duo, unus $\frac{1}{2}$ aeque altus ac $\frac{1}{3}$ primus assumtus alter $\frac{1}{6}$ proxime inferior ipso $\frac{1}{15}$ novissime assumto. Horum duorum numerorum $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$ per $\frac{2}{1}$. (numerum seriei infinitae summam exprimentem,) multiplicatorum differentia, $\frac{2}{3}$ aequatur summae assumtorum, $\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}$.

Explicatio.

Eadem opera et centeni Termini ex quacunque serie sumti, se continuo insequentes, duabus tantum brevissimis operationibus, una scilicet subtractione, unaque multiplicatione in unum possunt addi quod alioqui vix multarum horarum Spatio, et incredibili labore fieret. Nec Tabula opus est, ad numeros qui a se invicem subtrahendi sunt inveniendos; nota est enim Arithmeticis ratio fractionum nostrarum denominatores, id est Numeros, ut quidam vocant figuratos, sine Tabula inveniendi. Demonstratio eadem prorsus qua duae praecedentes ratione nullo negotio fieri potest. Unde in re praesertim non nisi obiter incidente, verbis parco.

Triangulum hoc voco Harmonicum, quemadmodum Clarissimus quondam Geometra Blasius Pascalius, suum inscripsit Arithmeticum. Quod iisdem constat numeris, sed integris. Utque series prima apud ipsum est numerorum progressionis Arithmeticae, 1. 2. 3. 4. 5. etc. ita prima series nostra, quae illi reciproca est, $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ etc. est progressionis harmonicae. Utque numeri Arithmetici continuo replicati per additionem faciunt Triangulares, et hi eodem modo replicati pyramidales; etc. ita Numeri Harmonici seu Arithmeticorum reciproci subtractione continuo replicati, faciunt Triangularium Reciprocos, et hi eodem modo Reciprocos Pyramidalium. In Triangulo Arithmetico Pascalii ope seriei sequentis inveniri potest summa terminorum quotcunque, seriei praecedentis; in nostro Harmonico, ope seriei praecedentis, invenitur summa ipsa sequentis. In Pascalii

8 f. qvod ... fieret *erg. L*

14 Harmonicum: vgl. VII, 3 N. 30 u. N. 53. 15 Arithmeticum: Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 (*PO* III S. 433–593); Leibniz hat in seinem Handexemplar die vor S. 1 eingebundene Tafel mit dem arithmetischen Dreieck mit Marginalien versehen.

Triangulo nullius seriei in infinitum productae summa dari potest, cum ipsa sit infinita. In nostro omnium serierum infinitarum summa dari potest finita, excepta prima. Caeterum Pascalii Triangulum cum in integris consistat, praerogativam tantum habet primitatis temporis. At fractiones in nostro simplices usque adeo leges servare res profecto mira est. Quantae enim operae sit alioquin multas diversorum denominatorum fractiones in unam addere summam, norunt qui aliquem calculi usum habent. Exempli causa:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}$. facit $\frac{3}{2}$, minus $\frac{1}{36}$ per $\frac{3}{2}$, seu $\frac{3}{2}-\frac{1}{24}$ seu $\frac{35}{24}$.

Cujus veritatem si quis experiri volet sentiet quam difficulter fractiones tractentur.

Porro multae hic et praeclarae de Triangulo Harmonico propositiones condi possent, quae facile materiam justi tractatus darent si scripturirem. Late enim patet ejus usus, et ad quadraturas, et calculum ejus quod interest in se replicati, et ad combinationes, et ad aleam, et quas vocant partitiones, porrigitur. Vir celeberrimus Christianus Hugenius cum circa aleam et incerti aestimationes versaretur, deprehendit seriem Reciprocorum trigonalium, seu $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ etc. mira quadam ratione esse ex [reciprocis] Geometricae progressionis duplae $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$ etc. formatam, cujus summa cum sit 2. ut notum est, invenit etiam seriei infinitae reciprocorum trigonalium summam esse 2. Hanc vero summam cum mihi aliquot ab hinc annis indagandam proposuisset, felici inquisitione usus, alia plane methodo ad idem perveni, sed quae hoc haberet praecipuum, ut ad Pyramidales quoque et, ut verbo dicam, totum triangulum Harmonicum aperiret viam.

Propositio ...

Summa seriei infinitae, $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}$ etc. est $\frac{1}{4}$ et Summa seriei infinitae $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}$ etc. est $\frac{3}{4}$. Sunt autem numeri,

3 f. consistat, *(1)* non est adeo difficile, et *(a)* primiti *(b)* praerogativam tantum habet primitatis temporis. *(c)* nisi qvod *(2)* credibilius erat Pa *(3)* | praerogativam ... temporis. *erg. Hrsg.* | At *L*

13 deprehendit: vgl. *HO* XIV S. 144–150. 18 perveni: vgl. VII, 3 N. 1 u. N. 2.

8. 24. 48. 80. etc. quadrati imparium unitate minuti; et numeri 3. 8. 15. 24. 35. 48. 63. 80. etc. quadrati tam parium quam imparium eadem unitate minuti.

Nam $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ etc. est 2. per prop. ... Ergo dividendo omnia per 8, $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}$ etc. est $\frac{1}{4}$. Quae prior est propositionis hujus pars.

Jam $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. est $\frac{2}{4}$ per prop. ... Ergo addendo has duas series fiet $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}$ etc. aequal. $\frac{3}{4}$. Quae est propositionis hujus pars altera.

Propositio

$$\begin{array}{lcccccccccccl}
\text{I} & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{15} & + & \frac{1}{24} & + & \frac{1}{35} & + & \frac{1}{48} & \text{etc.} \\
\text{II} & \frac{1}{3} & & & & \frac{1}{15} & & & & \frac{1}{35} & & & \text{etc.} \\
\text{III} & & & \frac{1}{8} & & & & \frac{1}{24} & & & & \frac{1}{48} & \text{etc.} \\
\text{IV} & \frac{1}{3} & & & & & & & & \frac{1}{35} & & & \text{etc.} \\
\text{V} & & & \frac{1}{8} & & & & & & & & \frac{1}{48} & \text{etc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
\frac{1}{63} & + & \frac{1}{80} & + & \frac{1}{99} & + & \frac{1}{120} & \text{etc.} & & & & & \\
\frac{1}{63} & & & & \frac{1}{99} & & & \text{etc.} & & & & & \\
& & \frac{1}{80} & & & & \frac{1}{120} & \text{etc.} & & & & & \\
& & & & \frac{1}{99} & & & \text{etc.} & & & & & \\
& & & & & & \frac{1}{120} & \text{etc.} & & & & &
\end{array}$$

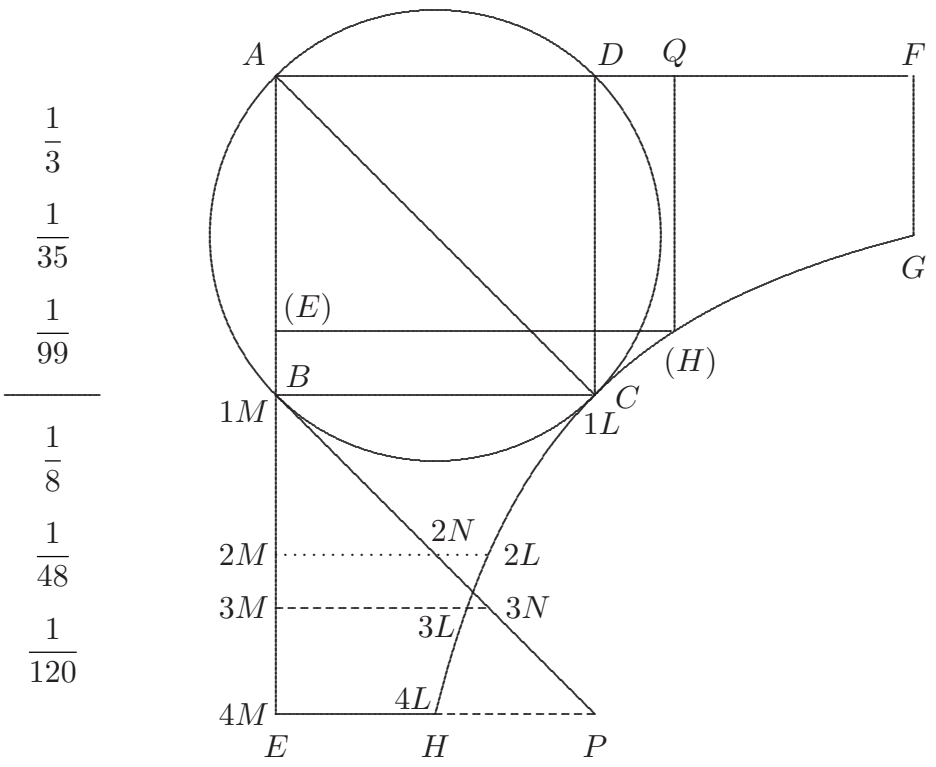
aequal. $\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{4}\\ \frac{2}{4}\\ \frac{1}{4}\end{array}\right.$ exprimit

aream $\left\{\begin{array}{l}\text{Circuli}\\ \\ \text{Hyperbolae}\end{array}\right\}$ cujus Quadratum inscriptum, $\frac{1}{4}$.

7 f. altera. *(1)* Scholium. His ita positis pulchras qvasdam consonantias libet contemplari *(2)* Propositio *L*

3 per prop. ... : s. o. S. 337 Z. 7–9. 5 per prop. ... : s. o. S. 336 Z. 6–8.

Pars propositionis 1 et 3. patet ex prop. praecedenti. Pars 2. ex prop. ... pars 4 ex coroll. 2. prop. ... Superest ut quintam et ultimam de Hyperbola ostendamus. Ut consensus Circuli et Hyperbolae non inelegans clarius appareat, figuram inspiciamus.



[*Fig. 6*]

Sit Hyperbola aequilatera GCH, cujus centrum A. vertex C. potentia seu quadratum inscriptum, $ABCD$. Circa idem quadratum inscriptum descriptus sit Circulus. Hoc quadratum sit $\frac{1}{4}$. Erit Circulus, $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ etc. per coroll. 2. prop. ... Et Spatium Hyperbolicum Circulo quodammodo respondens, $CBEHC$ erit $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$ etc. Quod facile ostendi potest. AM est $AB + BM$. Et AML rectang. aequale quadrato $ABCD$ ex

1 ex prop. ... : s. o. S. 336 Z. 6–8. 2 ex coroll. 2. prop. ... : s. o. S. 334 Z. 4–12. 7 per coroll. 2. prop. ... : s. o. S. 334 Z. 4–12.

natura Hyperbolae adeoque AM in ML est $\boxed{2}AB$ et ML est $\dfrac{\boxed{2}AB}{AM}$. seu est $\dfrac{\boxed{2}AB}{AB+BM}$. sive ML est $AB -, BM - \dfrac{\boxed{2}BM}{AB} + \dfrac{\boxed{3}BM}{\boxed{2}AB} - \dfrac{\boxed{4}BM}{\boxed{3}AB}$ etc. (per regulam inveniendi summas progressionum Geometricarum decrescentium, supra prop. ...). Summa autem omnium ML est: Summa omnium AB applicatarum ad BE, id est $\underbrace{\text{rectang. } AB \text{ in } BE}$ demta summa omnium BM, seu semiquadrato ultimae, BE, sive $\underbrace{\dfrac{\boxed{2}BE}{2}}$, addita summa omnium $\dfrac{\boxed{2}BM}{\boxed{2}AB}$, seu $\underbrace{\dfrac{\boxed{3}BE}{3\boxed{2}AB}}$, demta summa omnium $\dfrac{\boxed{3}BM}{\boxed{2}AB}$, seu demto $\underbrace{\dfrac{\boxed{4}BE}{4\boxed{2}AB}}$, etc. id est quia BE est aeq. AB. fiet summa omnium ML a BC, usque ad EH, seu area spatii $CBEHC$, aequalis

$$\underbrace{\frac{\boxed{2}AB}{1} - \frac{\boxed{2}AB}{2}} + \underbrace{\frac{\boxed{2}AB}{3} - \frac{\boxed{2}AB}{4}} + \underbrace{\frac{\boxed{2}AB}{5} - \frac{\boxed{2}AB}{6}}$$

sive $\dfrac{\boxed{2}AB}{2}$ $\dfrac{\boxed{2}AB}{12}$ $\dfrac{\boxed{2}AB}{30}$

sive, quia posuimus $\boxed{2}AB$ esse $\dfrac{1}{4}$ ideo erit Area Spatii $CBEHC$

$\dfrac{1}{8}$ $\dfrac{1}{48}$ $\dfrac{1}{120}$ etc.

Propositio:

„Si sit quantitas A aequalis seriei decrescenti, $b-c+d-e+f-g+h$ etc. in infinitum,

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{„Erit} & b & \text{major} \\ \text{„} & b-c & \text{minor} \\ \text{„} & b-c+d & \text{major} \\ \text{„} & b-c+d-e & \text{minor} \\ & \text{etc.} & \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{quam } A\text{, ita ut differentia} \\ \text{sit minor quam}\end{array} \left\{\begin{array}{l} c \\ d \\ e \\ f \\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

3 supra prop. ... : s. o. S. 322 Z. 4–8.

„Et generaliter decrescentis alternis, addditionibus et subtractionibus formatae por-
„tio terminata per additionem erit summa seriei major, at portio terminata per nega-
„tionem erit summa minor; differentia autem inter portionem assumtam et summam
„integram seu error erit semper minor termino seriei portionum proxime sequente.

$c + e + g$ etc. est majus quam $d + f + h$ etc. Quia cum series decrescat erit d minor quam c. et f quam e. etc. Ipsi b demendum est $c + e + g$ etc. addendum $d + f + h$ etc. ut fiat aequale ipsi A. ex hypothesi, ergo plus ei adimendum est quam addendum ut fiat aequale ipsi A. At si cui plus demendum quam addendum, ut alicui aequale fiat, id eo majus est. Ergo b. est majus quam A. Eodem modo demonstrabitur et $b - c + d$ et $b - c + d - e + f$ et ita caeteras portiones similes esse majores quam A.

Contra $d + f + h$ etc. est majus quam $e + g + l$ etc. quia d majus quam e, et f quam g, et h quam l etc. Ipsi $b - c$ addendum $d + f + h$ etc. demendum $e + g + l$ etc. ut fiat aequale ipsi A. Plus ergo ei addendum quam adimendum, ut fiat A, ergo $b - c$ est minus quam A. Eodem modo demonstrabitur etiam $b - c + d - e$. et $b - c + d - e + f - g$. et caeteras portiones similes esse minores quam A.

Hinc jam demonstro porro differentiam inter b et A esse minorem quam c. Nam b est majus quam A, et A est majus quam $b - c$ ut ostendimus. Ergo differentia inter extrema b et $b - c$, id est ipsa c, erit minor differentia, b extremi ab A medio. Eodem modo demonstrabitur differentiam inter A et $b - c$ esse minorem quam d. Nam $b - c$ est minor quam A, et A est minor quam $b - c + d$ ut ostendimus, ergo differentia inter extrema $b - c$ et $b - c + d$, id est d. erit minor differentia mediorum $b - c$ et A.

1 generaliter *(1)* si series terminetur *(2)* portio seriei terminata per *(a)* affirmativum seu signo + aff *(b)* additionem erit major, terminata per negationem *(aa)* minor *(bb)* erit summa minor; differentia autem erit semper minor termino proxime sequente *(3)* decrescentis *L* 16 + f − l *L ändert Hrsg.*

Corollarium:

Ergo posito radio r. tangente t, et arcu a, qui non sit major octante, erit

$$\left.\begin{array}{rl} +\ t & \text{major} \\ +\ t - \dfrac{t^3}{3r^2} & \text{minor} \\ +\ t - \dfrac{t^3}{3r^2} + \dfrac{t^5}{5r^4} & \text{major} \\ +\ t - \dfrac{t^3}{3r^2} + \dfrac{t^5}{5r^4} - \dfrac{t^7}{7r^6} & \text{minor} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{quam } a\text{, ita ut differentia} \\ \\ \text{sit minor quam} \\ \\ \end{array} \left\{\begin{array}{c} \dfrac{t^3}{3r^2} \\ \dfrac{t^5}{5r^4} \\ \dfrac{t^7}{7r^6} \\ \dfrac{t^9}{9r^8} \end{array}\right.$$

Quoniam per prop. ... $a \sqcap \dfrac{t}{1} - \dfrac{t^3}{3r^2} + \dfrac{t^5}{5r^4} - \dfrac{t^7}{7r^6} + \dfrac{t^9}{9r^8}$ etc. t est minor quam r. hinc series est decrescens.

Propositio

Magnitudinem arcus circuli invenire in numeris rationalibus quantumlibet vero propinquis, modo tangens et radius in numeris sint dati.

Ponatur radii longitudo exprimi per Unitatem, tunc omnes ejus potentiae exprimentur per unitatem.

Si arcus est major octante circumferentiae, resecetur ab eo octans quoties fieri potest, et residui arcus qui octante major non est, mensura quaeri potest ita ut error sit minor dato. Addatur ejus magnitudini inventae, inventa octantium resectarum magni-

8 decrescens | Scholium Hinc seqvitur posse arcus magnitudinem inveniri in numeris rationalibus qvantumlibet vero propinqvi *gestr.* | *L* 10 rationalibus *erg. L* 11 modo *(1)* tangens in numeris *(2)* tangentis relatio ad radium sit data *(3)* tangens | arcus *gestr.* | et *L* 11 f. dati. *(1)* Si arcus est minor octante circumferentiae, erit BC (vide fig ...) seu t, minor qvam AB seu r *(a)* adeoqve series arcus, a, magnitudinem exprimens erit decrescens, $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{}$ *(b)* ponatur radii longitudo exprimi per unitatem, et numerus magnitudinem ipsius t. *(aa)* unitate minoris *(bb)* radio minoris exprimens, erit unitate minor sive fractio. adeoqve potentiae ipsius numeri t, erunt qvo gradu altiores, hoc valore minores Et series $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11}$ etc aeqval. a. erit decrescens *(2)* ponatur *L* 15 f. ita ... dato *erg. L*

7 per prop. ... : s. o. S. 329 Z. 1–4.

tudo. (: Octantis enim magnitudo minus differens a vera quovis errore proposito, ex his etiam inveniri potest, cum octans octante major non sit. :) Et habebitur area arcus totius. Superest, ut ostendam arcus octante non majoris haberi posse mensuram, cujus differentia a vera sit minor ullo numero proposito. Quod ita fiet, ostensum est, Corollario propositionis praecedentis, posse quantitatem a, seu arcus BO, inveniri, in numeris rationalibus, (: modo tangens BC [vel] t et radius AB [vel] r. in numeris rationalibus sint dati :) differentem a vera minus quam $\frac{t^3}{3r^2}$ vel $\frac{t^5}{5r^4}$ vel $\frac{t^7}{7r^6}$ vel $\frac{t^9}{9r^8}$ etc. At numero quantulocunque proposito semper aliquis horum ipso adhuc minor, inveniri potest, nam etsi (in casu quo hi numeri maximi sunt, minimeque decrescunt) esset t aequalis r. et ambae unitati, forent numeri hi iidem cum istis $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{9}$ etc. Nullus autem numerus assumi potest tam parvus, quin aliquis ex infinita horum serie reperiri possit, ipso ad huc minor; nam ponatur numerus assumtus esse utcunque parvus, erit parvus ob magnitudinem nominatoris in fractione ipsum exprimente; et alius cujus numerator sit unitas, nominator vero aliquis imparium ipsius assumti nominatore major, qualis potest esse aliquis ex his $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{9}$ etc. utique ipso minor erit. Cum ergo error quantumlibet parvus reddi possit in eo casu quo errores $\frac{t^3}{3r^2}$ vel $\frac{t^5}{5r^4}$ vel $\frac{t^7}{7r^6}$ maximi sunt, seu cum t vel BC aequatur ipsi AB vel r. id est in octante; id multo magis fiet eo casu, quo t est minor quam r.

Scholium

Compendia autem aliqua adhibenda, ut subito et commode quantum satis est, accedamus ad veram magnitudinem, exponendi locus erit in appendice de Trigonometria sine Tabulis absolvenda. Nunc illud breviter admonere suffecerit; si arcus sit quantum satis est, parvus, seu si tangens multo minor radio, in tertiis quartisve terminis tuto subsisti posse, ut si BC sit non major parte decima radii AB.

1 f. magnitudo | *(1)* Similis *(2)* minus ... etiam *erg.* | inveniri *L*

5 arcus BO: vgl. S. 324 Z. 19 Erl. 20 Compendia: vgl. N. 27. 24 parte decima: vgl. N. 24 Teil 2.

tunc si r, ejusque potentiae sint 1. t, sit $\frac{1}{10}$. tunc $\frac{t^7}{7r^6}$ erit $\frac{1}{70,000,000}$. Unde si ponatur arcus BO seu a, esse $\frac{1}{10} - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4}$ erit magnitudo proveniens major vera, sed $\frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500,000}$ excessus erit minor, quam $\frac{t^7}{7r^6}$, seu minor quam $\frac{1}{70,000,000}$. Unde facile erit invenire angulos Trianguli rectanguli ABC ex datis lateribus, AB, BC, ut si AB sit 1. BC sit $\frac{1}{10}$. (seu si AB sit ad BC ut 10 ad 1) arcus BO, angulum BAC exprimentis longitudo habebitur statim in numeris tam prope, ut error sit minor quam $\frac{1}{70,000,000}$ ipsius AB. Quod si jam circumferentiae magnitudo etiam in numeris assumatur, qualis scilicet jam a Ludolpho exhibita est, et ex his nostris longe facilius strui potuisset, arcus BO ratio ad eam, anguli magnitudinem dabit, ita ut error sit scrupulo secundo multo minor. Sed hoc exemplum declarandi tantum causa adjeci. Uno autem trianguli angulo BAC, habito, et alter BCA habetur; cum simul compositi faciant rectum. Eandem ob causam alteruter eorum semper erit semirecto non major. Eum ergo assumi consultum est, pro angulis Trianguli ex datis lateribus inveniendis. Quodsi tamen uterque eorum sit semirectus, seu si etiam minor a semirecto parum differat, utile est unam aut si magnam exactitudinem desideramus, repetitam anguli bisectionem adhiberi, et dimidium angulum ex suo tangente in numeris dato investigari, cujus duplus erit quaesitus. Sed haec in Appendice de Trigonometria sine Tabulis absolvenda, fusius explicabuntur.

Propositio ...

Impossibile est, Quadraturam Circuli ejusque partium Analyticam universalem, seu, magnitudinem arcus ex data tangente, generaliter invenire; per expressionem, quae

21 invenire; *(1)* qvae transcendens non sit, sive qvae aeqvatione finita ordinaria *(2)* per *L*
21–349,1 qvae *(1)* non transcendens, sed *(a)* communis *(b)* communis *(2)* finita *L*

9 exhibita: LUDOLPH van Ceulen, *Vanden Circkel*, 1596. 10 error ... minor: vgl. N. 27 S. 314 Z. 12–19. 17 in Appendice: vgl. N. 51 prop. L S. 658 Z. 20.

finita, communisque formae, adeoque perfectioris sit generis quam haec nostra, qua diximus posito tangente t. radio r, arcu a, esse a aequalem $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \frac{t^{11}}{11r^{10}}$ etc.

Haec propositio velut Coronis erit contemplationis hujus nostrae. Eam vero ita demonstrabimus. Ponatur si fieri potest, relatio inter arcum tangentemque finita quadam aequatione communis formae esse expressa, quae necessario erit $ct + ma$ I aequal. b. vel $ct + dt^2 + eta + na^2 + ma$ II aeq. b. vel $ct + dt^2 + eta + ft^3 + gt^2a + hta^2 + pa^3 + na^2 + ma$ III aequal. b. et ita porro, si scilicet in quolibet gradu formula generalis exhibeatur, ad quam speciales semper poterunt, reduci, literas determinatas b. c. d. e. f. etc. pro aequationis specialis propositae numeris cognitis (radio pro unitate assumto) cum suis signis substituendo, aut etiam aliquas harum literarum, quarum termini scilicet in speciali deficiunt, nihilo aequales ponendo. Ut si sit aequatio specialis $3t + 4t^2 - 6t^3 - t^2a + 5a$ aeq. 10. Hanc cum tertia comparando fiet c aeq. 3. et d aeq. 4. et e aeq. 0. et f aeq. $-$ 6. et g aeq. $-$ 1. et h aeq. 0. et p aeq. 0. et n aeq. 0. et m aeq. 5. et b aeq. 10. Idem qualibet speciali fieri potest, modo generali ejusdem gradus comparetur. His positis jam aliqua aequationum ejusmodi generalium certi gradus assumatur. Verbi gratia aequatio III exprimens relationem inter arcum a, et ejus tangentem, t. Ponamus radium AB, seu tangentem t, sive BC esse cognitas, et jam postulari, ut arcus BO, sive angulus BAO, in data ratione secetur, verbi gratia in partes undecim aequales; ajo id hujus aequationis III. ope fieri posse. Quaeritur enim tantum tangens arcus illius, qui sit hujus arcus BO, pars undecima. Ea

5 si fieri potest *erg. L* 6 expressa, *(1)* qvae *(2)* in qva ut *(3)* a aeq. cognitae b. vel $a^2 + ca$ aeq b. vel $a^3 + da^2 + ca$ aeq. b. vel $a^4 + ea^3 + da^2 + ca$ aeq b. aliaqve altior qvaecunqve modo finita: Ponantur numeri, b. c. d. e. etc esse cogniti, *(a)* ex ipsis scilicet *(b)* numeri scilicet vel qvantitates ex t. r. cognitis formatae; a autem arcus qvaesitus, sit qvantitas incognita aeqvationis ad gradum qvadraticum, aut cubicum, aliumve altiorem, ascendens. Qvoniam ergo aliqvam eiusmodi aeqvationum *(aa)* sufficere non id *(bb)* ex hypothesi ad arcum qvemlibet ex data tangente inveniendum sufficit, ideo sumamus in exemplum unam ex illis, ut $a^3 + da^2 + ca$ aeqval. b. itaqve *(aaa)* Sectio a *(bbb)* inventio arcus ex dato tangente, erit problema solidum *(4)* qvae sit *(5)* qvae *L* 9 f. pro ... propositae *erg. L* 20–350,1 ea ... sectus *erg. L*

17 radium AB: s. S. 324 Z. 19 Erl.

enim reperta utique et angulus in undecim partes erit sectus. Arcum qui arcus a, dati pars undecima sit vocemus $\frac{a}{11}$, et tangentem arcus a, vocemus θ. Itaque cum ex hypothesi aequatio III generalem exprimat relationem arcus cujuslibet ad suam tangentem; exprimet etiam relationem inter $\frac{a}{11}$ et θ. Ergo in aequatione III. pro a. substituamus $\frac{a}{11}$. et pro f substituamus θ. et pro aequatione III. habebimus sequentem:

$$c\theta + d\theta^2 + \frac{e\theta a}{11} + f\theta^3 + \frac{g\theta^2 a}{11} + \frac{h\theta a^2}{11 \text{ in } 11} + \frac{pa^3}{11 \text{ in } 11 \text{ in } 11} + \frac{na^2}{11 \text{ in } 11} + \frac{ma}{11} \text{ aeq. } b.$$

cujus ope inveniri poterit incognita θ. tangens scilicet arcus qui dati sit pars undecima. Quoniam autem incognita θ, in ista aequatione non assurgit ultra Cubum, problema erit cubicum tantum, adeoque angulum aliquem in undecim partes secare erit problema cubicum et eodem modo pro 11. substituendo alium numerum quemcunque, sectio anguli, secundum numerum quemcunque problema erit cubicum tantum, quod est absurdum, constat enim ex Vietae Sectionibus angularibus, et notum est analyticis, pro anguli in partes sectione secundum numeros primos semper altiore magis magisque opus esse aequatione ut Anguli bisectionem esse problema planum, anguli trisectionem esse problema solidum sive cubicum, anguli quinquesectionem esse problema sursolidum; et ita porro in infinitum. Impossibile est ergo generalem anguli sectionem esse problema ullius gradus determinati finiti, cum, ut dixi, aliud semper aliudque sit, pro alio atque alio partium, in quas secandus est angulus, numero. Itaque si aequatio III. fuisset alia quaecunque altior illa quam expressimus, modo certa determinata ac finita, in qua t. vel θ. assurrexisset ad gradum altiorem finitum ac determinatum, quemcunque; semper ostendi posset, eam non sufficere sectioni anguli in partes, tot, quot numerus aliquis primus major exponente maximae in aequatione potentiae ipsius t, vel θ habet unitates. Adeoque non potest generalem exprimere relationem inter arcum et tangentem. Ac proinde Quadratura analytica universalis Circuli, ejusque partium, quae sit communis formae, adeoque perfectioris generis quam nostra est, impossibilis erit. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Hanc propositionem ejusque demonstrationem analyticis claram esse confido. Aliis ne scripta quidem esto. Nam si in lineis exhibenda esset ejus demonstratio ingenti apparatu

12 constat: In Fr. Viète, *Ad angulares sectiones theoremata*, 1615 (*VO* S. 287–304), wird gezeigt, dass Winkelteilungen mit Gleichungen entsprechenden Grades durchgeführt werden können. Die Unmöglichkeit der allgemeinen Winkelteilung wurde erst im 19. Jh. bewiesen.

opus foret. Porro Quadratura Circuli universalis cujuslibet scilicet partis, sectoris aut segmenti multo majoris est momenti quam particularis, certae portionis aut etiam circuli totius tantum. Nam haec exiguis limitibus continetur, at universalis, qualis nostra est, rem exhibet ipsa Quadratura Circuli per se multo utique praestantiorem, trigonometriam scilicet sine Tabulis absolvendam. Quod inter utilissima Geometrarum inventa censeri debet. Cum non sit in nostra potestate, tabulas aut etiam instrumenta jam elaborata ac numeris signata per terras ac maria circumferre. Regulam autem, facilem ac pulchram, quivis facile animo circumgestat.

Hic locus erit dicendi aliquid de Viri acutissimi Jacobi Gregorii Abredonensis Scoti ratiocinatione, qua ne unum quidem circuli sectorem geometrice designabilem, quadrari posse, demonstrare conatus est. Vim argumenti paucis complectar. Inde ostendam qua in parte mihi non satisfaciat. Sit sector: $ABOD$, (fig. ...) quem vocemus S. Polygonum ei circumscriptum $ADCB$. sit A. Polygonum aliud proxime minus circumscriptum, $ADPQB$, sit C. et adhuc minus sit E, et hoc quoque minus aliud, G, etc. Similiter sit polygonum ABD inscriptum eidem sectori, quod vocemus B. Polygonum aliud proxime majus inscriptum, $ADOB$, sit D et adhuc majus sit F, et hoc quoque majus aliud H. etc. Patet ultimum seu minimum polygonum circumscriptum ultimo seu maximo inscripto, adeoque sectori ipsi coincidere, et hoc ille vocat S e r i e m c o n v e r g e n t e m. Invenit autem hujus seriei convergentis hanc esse naturam, ut si duo quidam termini diversarum serierum

13 *Am Rand:*

A	B
C	D
E	F
G	H
etc.	etc.
S	S

1 f. cuiuslibet ... segmenti *erg. L* 17 maximo circumscripto *L ändert Hrsg.*

6 f. tabulas ... circumferre: vgl. N. 39 S. 429 Z. 12. 10 ratiocinatione: vgl. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, insbesondere prop. XI, S. 25–29. 12 fig. ... : s. S. 324 Z. 19 Erl.

respondentes sint $\quad a \quad b$

proxime sequentes duo sint $\quad \sqrt{ab} \quad \dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$

ut $\quad A \qquad B$

unde ita stabit series: $\begin{cases} C \text{ aeq. } \sqrt{AB} \quad \text{et} \quad D \text{ aeq. } \dfrac{2AB}{A+\sqrt{AB}} \\ E \text{ aeq. } \sqrt{CD}. \qquad F \text{ aeq. } \dfrac{2CD}{C+\sqrt{CD}} \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$

Quales ego series etiam cum non sunt convergentes, appellare soleo, substitutrices.

Quadratura ergo Sectoris huc redit, ut inveniatur seriei convergentis terminatio. Hanc vero ostendit haberi, si possit inveniri quantitas eodem modo formata ex terminis duobus, quo ex terminis sequentibus. Ut si alia facta hypothesi termini duo priores sint $a.$ $b.$ posteriores vero essent $\dfrac{a+b}{2}$ $\dfrac{2ab}{a+b}$ inveniri potest formula eodem modo facta ex $a.$ et $b.$ quo fit ex $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{2ab}{a+b}$. et talis est formula ab. Nam si ducas a, in $b.$ habebis $ab.$ et si ducas $\dfrac{a+b}{2}$ in $\dfrac{2ab}{a+b}$ habebis etiam ab. Tali autem formula impetrata caetera ita absolvuntur. Quoniam A in B dat idem quod C in D, seu $\dfrac{A+B}{2}$ in $\dfrac{2AB}{A+B}$. etiam $C.$ in $D.$ dabit idem quod E in F seu quod $\dfrac{C+D}{2}$ in $\dfrac{2CD}{C+D}$. Ergo A in B, idem est quod E in F. Et ita generaliter A in B, aequale duobus quibuslibet terminis in se duc-

---

10 *Am Rand:*

A	B
C aeq. $\dfrac{A+B}{2}$	D aeq. $\dfrac{2AB}{A+B}$
E aeq. $\dfrac{C+D}{2}$	F aeq. $\dfrac{2CD}{C+D}$
etc.	etc.
T	T

---

7 substitutrices: vgl. VII, 3 N. 60 S. 757.

tis. Ergo A in B aequale et duobus ultimis in se ductis, seu T in T seu quadrato ab T ergo $\boxed{2}T$ aeq. A in B. et T aeq. $\sqrt{A \text{ in } B}$. Inventa ergo terminatio seriei in eo casu quo duobus terminis positis a. b. duo sequentes sunt $\frac{a+b}{2}$. $\frac{2ab}{a+b}$. Unde facile intelligi potest, ut ad nostrum casum redeamus[,] si positis duobus terminis a. b. posteriores sint $\sqrt{ab}$. $\frac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$ possetque reperiri formula eodem modo formata ex his duobus quo ex ipsis a. b. habitum iri sectorem seu seriei terminationem. His positis ostendere suscipit Gregorius non posse reperiri formulam ullam eodem modo compositam ex a. b. quo ex his duobus $\sqrt{ab}$. $\frac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$ utcunque addendo subtrahendo multiplicando dividendo et extrahendo radices, aut aequationes formando ipsae inter se jungantur. Hoc posito concludit quoniam talis formula inveniri non potest, ergo nec seriei terminatio. Ergo nec sector, expressione scilicet analytica ex quinque operationibus deducta, finita. Et hoc est argumentum totius libelli sane ingeniosissimi quem de *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* inscripsit. Haec autem omnia pulcherrima sunt, ad ea usque quae tribus novissimis lineis expressi. Ubi vero mirari subit tanti ingenii Virum, quodammodo in ratiocinandi forma peccasse, ut agnoscamus tandem aliquando, quam non omnino inutilis res sit, Logica. Nimirum propositione libelli decima, problema ponit et solvit, ex data quantitate [rectius dixisset formula] eodem modo composita a duobus terminis convergentibus cujuscunque seriei convergentis; quo componitur ex terminis convergentibus ejusdem seriei immediate sequentibus; seriei propositae terminationem invenire. Ubi concludit his verbis: *et proinde ad inveniendam cujuscunque seriei convergentis terminationem opus est solummodo invenire quantitatem* [formulam analyticam] *eodem modo compositam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus secundis*. Et hoc recte. Sed, non inde concludere debet, r e c i p r o c a m ; si non possit dari hujusmodi formula analytica, non posse dari terminationem Seriei convergentis. Id tamen facit ille. Nam statim subjicit propositionem 11. Dico inquit Sectorem Circuli etc. non componi analytice ex triangulo inscripto et trapezio circumscripto. Hoc vero ut probet,

26 triangulo et trapezio circumscriptis *L ändert Hrsg.*

16–21 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz. 19 verbis: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, S. 24. 25 inquit: vgl. *a. a. O.*, S. 25.

tantum probat, non posse dari formulam analyticam eodem modo ex a. et b. quo ex $\sqrt{ab}$ et $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$ compositam. Ponit ergo tacite, si non detur hujusmodi formula, non posse dari terminationem. Et hinc, inquit evidens est quod sector non componatur analytice ex triangulo inscripto et trapezio circumscripto. At consequentiam istam probare ne conatur quidem, usque adeo claram credidit. Ego vero qui minime admittendam arbitror, ad enervandam demonstrationem, negare satis haberem, nam quamdiu non demonstrabitur; nec theorema erit demonstratum. Sed liberalius agendum est, nam et videre mihi videor, quod in errorem duxerit acutissimum Virum, et rationes dubitandi habeo graves, et ipsi ut arbitror Gregorio si in vivis esset, non displicituras. Itaque sic ille ratiocinatus esse videtur; si datur Sectoris magnitudo seu seriei polygonorum terminatio, analytica, datur quantitas analytica eodem modo composita ex triangulo et trapezio quo ex duobus polygonis proxime sequentibus. Et hoc concedo. At vero (perget) demonstratum est, non dari talem quantitatem; Nego me id demonstratum agnoscere. Imo vero inquiet, demonstratum est, quoniam ostendimus non posse dari formulam analyticam ex a. et b. formatam, eodem modo quo ex $\sqrt{ab}$. $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. Concedo. Si ergo non datur talis formula analytice composita; non datur quantitas analytica per hanc formulam significata. Potest enim fieri ut quantitas sit analytica et nota, verbi gratia numerus; formula autem secundum quam illa eodem modo componitur ex terminis duobus primis quo ex duobus secundis poterit esse ignota et non analytica. Quoniam certum est quantitatem analyticam ex aliis analyticis modo etiam non-analytico, transcendenti ut per series infinitas, aut aequationes transcendentes posse componi. Fieri ergo poterit, ut quantitas eodem modo ex duabus composita sit analytica, modus componendi sit non analyticus, quod postremum tantum Gregorius demonstravit. Et si quis det mihi numerum ut 3, et duos alios 5 et 6. rursusque duos alios 9 et 11; dicatque mihi fingi posse aliquem operandi modum, secundum quem ita tractando 5 et 6, ut 9 et 11, tam ex illis duobus quam ex his duobus idem prodeat, nempe 3, non ideo potero modum illum tractandi sive formulam analyticam secundum quam 3 eodem modo prodit ex 5 et 6, quo ex 9 et 11, divinare; imo forte nullus est nume-

23–355,3 Et ... rationes *erg. L*

3 inquit: vgl. *a. a. O.*, S. 27. 12 perget: vgl. *a. a. O.*, S. 28 f.

rus de quo non possit aliquis esse modus nobis ignotus, quo prodeat ex 5 et 6. ut ex 9 et 11, tametsi fieri possit ut iste modus sit non-analyticus sed transcendens, procedens forte per logarithmos, et series infinitas, aliosque id genus intractabiles calculandi rationes. Ad absolvendam ergo demonstrationem impossibilitatis Quadraturae ullius sectoris Circuli analyticae; opus est solvi hoc problema, ex data quantitate eodem modo ex duobus A et B quo ex duobus C et D composita, invenire modum seu formulam analyticam, non transcendentem sed ordinariam, secundum quam eodem modo componitur. Quod qui vel in universum, vel in hoc certe casu praestabit; is omne punctum feret, tandemque Geometras ab inutili cura liberabit.

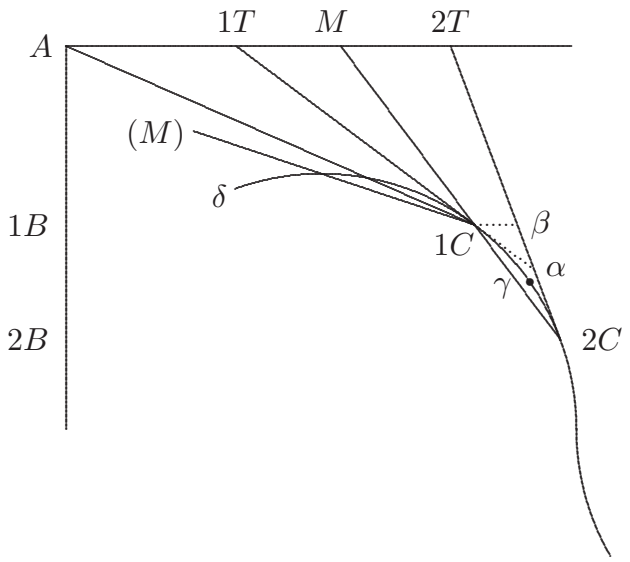
6 f. non ... ordinariam *erg. L*

29. AD PROP. 6.

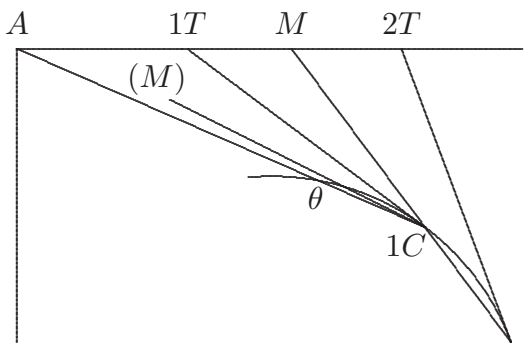
[Juni – Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 107–108. 1 Bog. 2°. $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 107 v° oben. Auf dem übrigen Bogen der Schluss von N. 28 sowie N. 30 u. N. 31.
Cc 2, Nr. 1103 B tlw.

Datierungsgründe: s. N. 28.



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

Curvae $1C2C$ ad easdem partes cavae tangentes $.C.T$ occurrunt rectae $A1T2T$. Juncta $1C2C$, chorda, producta, occurrat eidem rectae in M. Punctum M cadet inter puncta $1T$. $2T$. modo curva non habeat puncta reversionis inter extrema sua puncta posita, seu modo nulla tangentium sit ipsi $1T2T$ parallela.

Punctum $1C$ sit propius rectae $1T2T$. punctum $2C$ remotius. Producta $1T1C$, ipsi $2T2C$ occurrat in α. et ex puncto $1C$, ipsi $1T2T$. parallela occurrat ipsi $2T2C$ in puncto β. Ipsa $2T2C$ major est quam ipsa $2T\alpha$. Nam ex puncto $1C$, ad rectam $2T2C$, duae ducuntur rectae, una $1C\alpha$, altera $1C2C$. ex quibus prior est extra curvam, $1C2C$, cum sit portio tangentis, posterior cum sit chorda sive inscripta, tota est intra curvam; cum hae tres lineae $1C\alpha$ recta; $1C\gamma 2C$ curva, $1C2C$ recta, tendant omnes deorsum, sive recedant a recta $[A1T2T,]$ $1T1C$ est intra $\delta 1C$ curvam, et $1CM$ rectam, (: nam si possibile esset $1CM$ infra curvam et rectam $1C1T$ esse, ut in $1C(M)_{[,]}$ ab angulo contactus (qui omni rectilineo minor est) $1T1C\delta$ posset auferri rectilineus $1T1C(M)$:). Ergo ipsa $M1C$ est super ipsam $1T1C$, contra ergo $1C2C$, erit infra $1C\alpha$, adeoque punctum α supra punctum $[2C]$.

13 1T1C(M) :) *(1)* est ergo M remotius ab A qvam 1T. *(a)* cumqve recta 2CM ipsam 1 *(b)* porro *(c)* cum ergo, recta 2CM ipsam *(2)* est autem *(3)* Ergo 1T1C est inter curvae portio *(4)* porro recta A1C, necessario portionem ad 1C pertinentem, | θ1C *erg.* | habet intra curvam, alioqvi eam non s⟨ecet⟩ At A1C est infra 1C1T ex constructione *(5)* Ergo *L* 14 1T1C, *(1)* (jam ex constructione ipsa 1T1C est supra ipsam A1C, ergo 1T1C est intra ipsas A1C et M1C, adeoqve punctum 1T cadit inter puncta A et M.) *(2)* contra *L*

1 Curvae: vgl. N. 20 S. 191 Z. 1–3 sowie die zugehörigen Varianten.

30. DE RETORTA ET SEGMENTO CYCLOIDALI
[Juni – Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 107–108. 1 Bog. 2°. Haupttext: 10 Z. auf Bl. 108 r° oben. Nebenbetrachtungen: $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 107 v° unten. Auf dem übrigen Bogen der Schluss von N. 28 sowie N. 29 u. N. 31.
Cc 2, Nr. 1103 A tlw., 1103 B tlw.

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück wurde nach N. 29 und vor N. 31 auf den Bogen geschrieben. Die Überlegung dürfte aus einer Bemerkung im Beweis von N. 20 prop. 11 S. S. 216 Z. 4 f. hervorgegangen sein. Leibniz wollte sie offenbar als Korollar zur vorhergehenden Proposition ausarbeiten, hat den Beweis jedoch abgebrochen und auch später beim entsprechenden Abschnitt in N. 51 prop. XIII darauf verzichtet. Ähnliche Flächenzerlegungen bei der Zykloide wie in den Nebenbetrachtungen führt Leibniz in einer Notiz in *De Quadratrice*, dat. Juni 1676, VII, 5 N. 86 S. 573 f., durch.

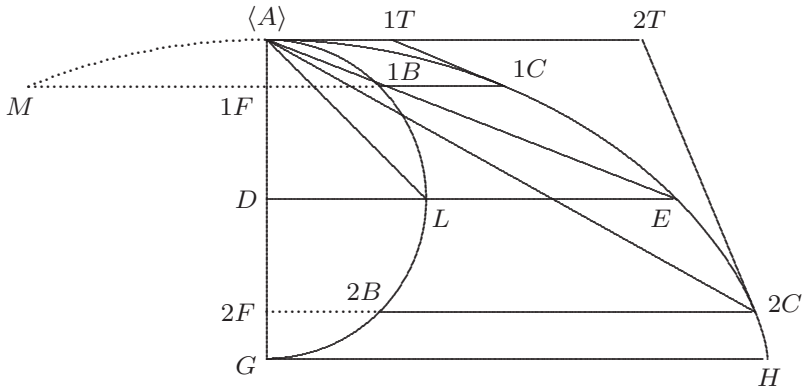
Retorta $A1BLE1CA$ posito $A1BL$ vel LE. esse arcum quadrantis aequatur duplo segmento Cycloidali $AE1CA$.

Patet ex propositione, cujus exemplum est tantum. Sed aliam praeterea demonstrationem valde simplicem ascribere non abs re visum est.

13 | Corollarium: *gestr.* | Retorta A1BLE1CA | abscissa secta basi parallela per centrum transeunte *erg. u. gestr.* | | posito ... qvadrantis *erg.* | aeqvatur *L* 16–359,1 est. *(1)* nam praesertim cum solis spatiorum in partes finitas ac designabiles Sectionibus peragatur, qvod est *(a)* simplicissimum *(b)* simplicius demonstrandi genus, qvam *(2)* Triang. *L*

---

13 Retorta: vgl. N. 20 prop. 10 u. 11 sowie fig. 4:



15 aliam: vgl. N. 51 prop. XIII, speziell die Variante zu S. 552 Z. 2 – S. 553 Z. 1.

Triang. ALE + segm. cycloid. $AE1CA$ aequalis spatio $ALE1CA$.

Segm. Circ. $AL1BA$ + Retort. Cycl. $A1BLE1CA$ aequal. eidem spatio $ALE1CA$.

Ergo Triang. ALE + segm. cycl. $AE1CA$ aequal. segm. Circ. $AL1BA$ + Retort. Cycloid.

Triang. ALE aequal. quadranti $ADL1BA$. 5

1–5 *Nebenbetrachtungen:*

$A\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A} + ALE \boxed{+ADL}$ ($\sqcap$ $AD\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}$) $\sqcap$ $\overset{\frown}{A}L\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}$ $\boxed{+A\overset{\frown}{L}\overset{\frown}{A}}$ $\boxed{+ADL}$.

ADL $\boxed{+A\overset{\frown}{L}\overset{\frown}{A}}$

Ergo $ADL \sqcap \overset{\frown}{A}L\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A} - A\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}$.

$\overset{\frown}{A}L\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}$ $\boxed{+A\overset{\frown}{L}\overset{\frown}{A}}$ $- ALE \sqcap A\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}$.

$- ADL$ $\boxed{-A\overset{\frown}{L}\overset{\frown}{A}}$

$A1BA + A1BE1CA \sqcap AE1CA$.

$A1BE1CA + 1BLE1B \sqcap A1BLE1CA$.

$A1BA + ALE - 1BLE \sqcap AL[A]$

$ALE + AE1CA - AL1BA \sqcap A1BLE1CA$

$A1BEA + A1BA \sqcap AE1CA$

$A1BEA + 1BLE \sqcap A1BLE$

7 *(1)* $\mathrm{ALE} + \mathrm{A\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}} - \mathrm{A\overset{\frown}{L}\overset{\frown}{A}} \sqcap \mathrm{\overset{\frown}{A}L\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}}$ $\mathrm{AD\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}} - \mathrm{ADL} - \mathrm{A\overset{\frown}{L}\overset{\frown}{A}} \sqcap \mathrm{\overset{\frown}{A}L\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}}$ *(a)* | Ergo $\mathrm{AD\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}} \sqcap$ $\mathrm{2ADL} + \mathrm{2ALA}$ $\mathrm{2ADL} + \mathrm{2A\overset{\frown}{L}\overset{\frown}{A}}$

ALE $+\mathrm{A\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}}+\mathrm{ADL}$ *nicht gestr.* | *(b)* | $\mathrm{AD\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}} \sqcap \mathrm{A\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}}+ \mathrm{ALE} + \mathrm{ADL}$ $\mathrm{AD\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}} \sqcap \mathrm{\overset{\frown}{A}L\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}}+\mathrm{A\overset{\frown}{L}\overset{\frown}{A}}+\mathrm{ADL}$.

Ergo $\mathrm{A\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}} + \mathrm{2ADL} + \mathrm{A\overset{\frown}{L}\overset{\frown}{A}} \sqcap \mathrm{\overset{\frown}{A}L\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}} \sqcap \mathrm{2A\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}}$ *nicht gestr.* | *(2)* $\mathrm{A\overset{\frown}{E}\overset{\frown}{A}}$ L

---

12 $A1BA$: Leibniz verwechselt wiederholt den Punkt $1B$ mit dem Schnittpunkt des Kreisbogens $\overset{\frown}{AL}$ und der Geraden AE.

31. AD SECTIONIS CONICAE CUJUSLIBET CENTRUM ASSIGNABILE HABENTIS QUADRATURAM GENERALEM

[Juni – Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 107–108. 1 Bog. 2°. Ca 1 $\frac{3}{4}$ S. auf Bl. 108 r° unten und auf Bl. 108 v°. Auf dem übrigen Bogen der Schluss von N. 28 sowie N. 29 u. N. 30. Cc 2, Nr. 1103 A tlw.

Datierungsgründe: N. 31 wurde zuletzt auf den Bogen geschrieben. Die Überlegungen von Teil 3 sind in prop. XLIII von N. 51 eingegangen.

[*Teil 1*]

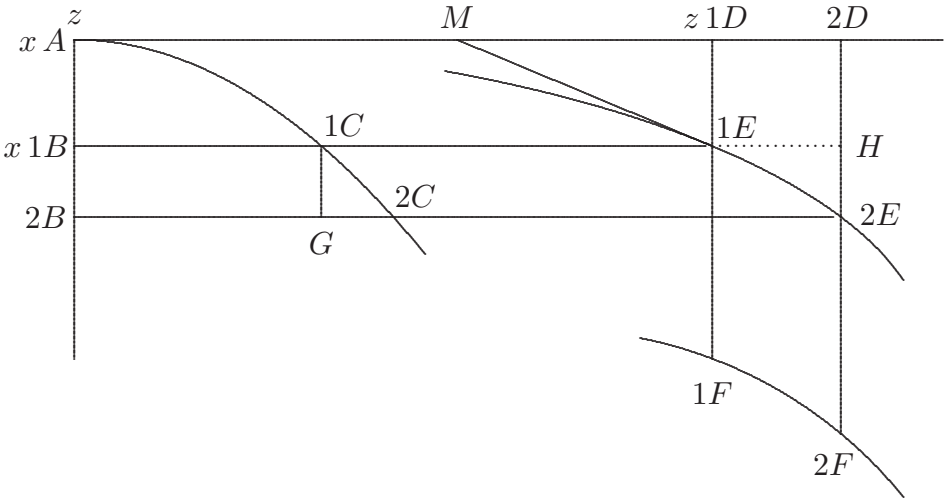
$x \;\; x^2 \;\; x^3$ etc. $\sqcap \dfrac{x}{1-x}$. $x^3+x^4+x^5 \sqcap \dfrac{x^3}{1-x}$. Sit $x \sqcap \dfrac{1}{\xi}$ erit $\dfrac{x^3}{1-x} \sqcap \dfrac{\frac{1}{\xi^3}}{1-\frac{1}{\xi}} \sqcap \dfrac{1}{\xi^3-\xi^2}$.

$d\,\overline{\dfrac{x}{1}\;\dfrac{x^5}{5}\;\dfrac{x^9}{9}\;\dfrac{x^{13}}{13}} \sqcap x\,.\,x^4\,.\,x^8\,.\,x^{12} \sqcap \dfrac{x}{1-x^3} \sqcap y$. et $y-x^3y \sqcap x$. et $x^3 \sqcap \dfrac{y-x}{y} \sqcap 1-\dfrac{x}{y}$ et $x^2 \sqcap d\dfrac{x}{y}$.

---

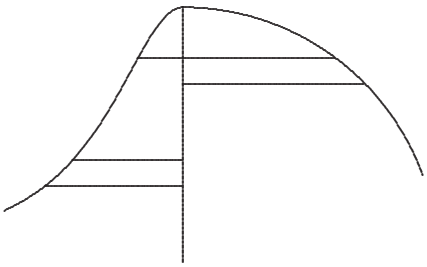
11 $\sqcap x\,.\,x^4\,.\,x^8\,.\,x^{12}$: Richtig wäre $1+x^4+x^8+x^{12}$ etc. $= \dfrac{1}{1-x^4}$. Konsequent gerechnet müsste die letzte Gleichung $3x^2 = -d\dfrac{x}{y}$ lauten.

[*Teil 2*]



[*Fig. 1*]

$AB \sqcap x\,[\sqcap]\,DE$. $BC \sqcap y$. $AD \sqcap z$. $DF \sqcap v$. $1B2B \sqcap d\overline{x} \sqcap H2E$. $1D2D \sqcap d\overline{z} \sqcap 1EH$. $vd\overline{z} \sqcap yd\overline{x}$. $\dfrac{BC \sqcap y}{DF \sqcap v} \sqcap \dfrac{d\overline{z}}{d\overline{x}} \sqcap \dfrac{MD}{DE}$.



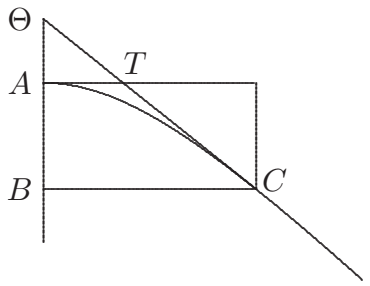
[*Fig. 2*]

Generalissima transformationum ratio per calculum haec est: si scilicet quaeramus ut singula rectangula singulis sint aequalia: $vd\overline{z} \sqcap yd\overline{x}$ posita relatione inter y et x data. Eritque arbitraria v et z. Quod ut appareat magis; sumatur deforis ω. Datur aequatio exprimens relationem inter y et x. Sit aequatio in qua literae ω. v. z. y. x. Quoniam 5 sunt literae opus est quatuor aequationibus, ut valor duarum quarumlibet per se invicem

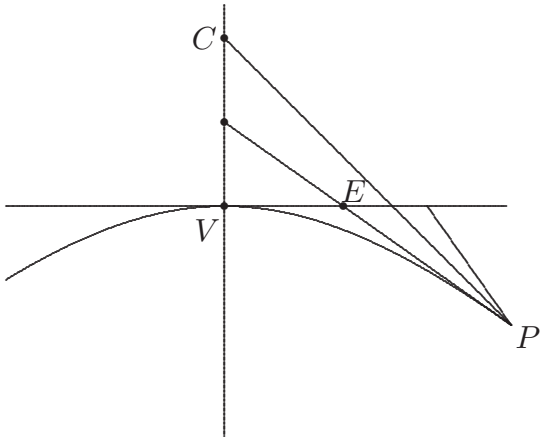
4 $\dfrac{\mathrm{BC} \sqcap \mathrm{v}}{\mathrm{DF} \sqcap \mathrm{y}} \sqcap \dfrac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}}{\mathrm{d}\overline{\mathrm{z}}} \sqcap \dfrac{\mathrm{MD}}{\mathrm{DE}}$ *L ändert Hrsg.*

inveniri possit. Datur autem jam una, ergo tres aequationes pro arbitrio supponere licet. Et literas ordine tollendo habebuntur aequationes, una in qua solae supersint ω et v altera in qua solae supersint ω et z. tertia in qua solae supersint ω et y, quarta in qua solae supersint ω et x. Ope hujus in qua solae ω et z. invenies $d\overline{z}$ et hujus in qua solae x et ω. invenies $d\overline{x}$. Hinc oritur et nova aequatio inter $yd\overline{z}$ et $yd\overline{x}$, itaque nimis multas assumsimus, et proinde tantum pro arbitrio assumi possunt duae quoniam jam una data est ex relatione inter x et v, et alia ex aequatione inter $vd\overline{z}$. et $yd\overline{x}$. Ista autem $d\overline{z}$ novissima uti non licet nisi usque ad finem, itaque tribus tantum uti licet aequationibus una data et duabus assumtis, hinc necesse est ut aequationes assumtae non nisi $y^2 \overset{(1)}{\sqcap} ax$ data. $b\omega + cy \boxed{+dv} + ez + fx \overset{(2)}{\sqcap} 0$. $m\omega + ny \boxed{+pv} + qz + rx \overset{(3)}{\sqcap} 0$ et $vd\overline{z} \sqcap yd\overline{x}$. Non sit v in ulla priorum sed ex prioribus inventis invenietur. Ope aequationis 1. tolletur x vel y ex 2. et 3. Ope aeq. 2. tolletur y vel x vel z. ex 3. nam ω non tollenda. Ergo in aeq. 3. pro literis 4. restabunt duae, nempe ω, et una praeterea cujus habetur valor ex data ω, cujus valore ubique substituto, habebitur x, valor caeterarum ex data ω, seu y et x et z singulatim valor ex sola ω habebitur. Ergo et $d\overline{x}$ et $d\overline{z}$.

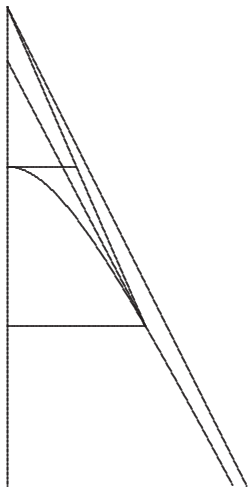
[*Teil 3*]



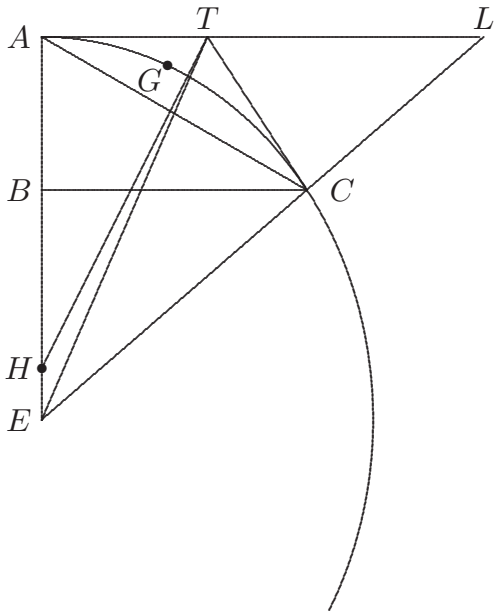
[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]



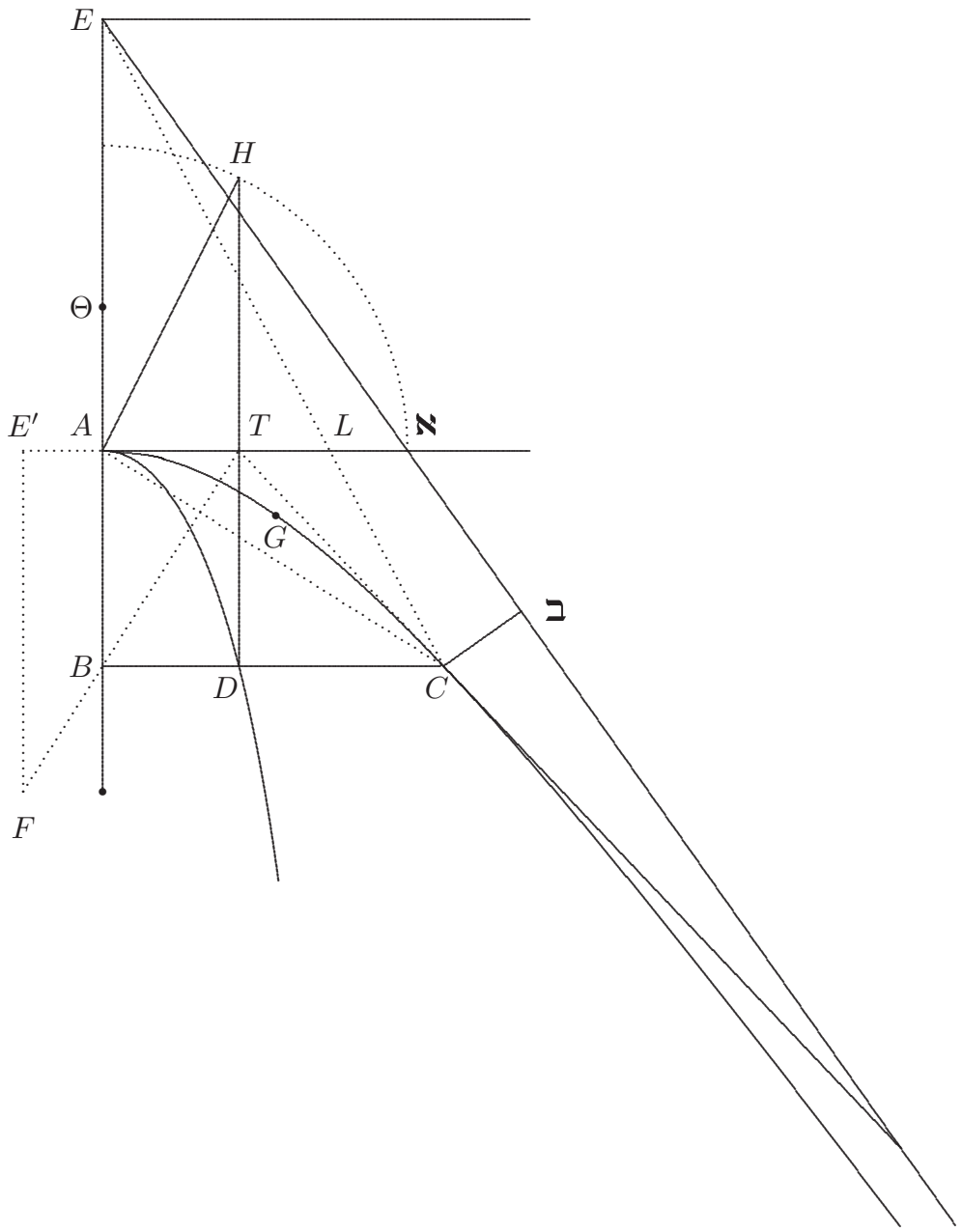
[*Fig. 5*]



[*Fig. 6*]

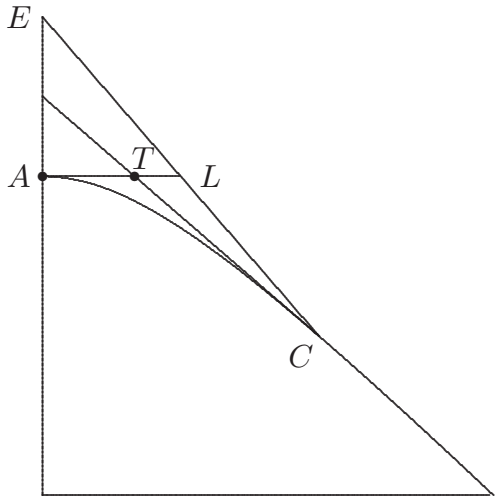
1–364,1 *Zu Fig. 6 u. 7:* D mutando in E.

1–364,1 *Fig. 6 ... Fig. 7*: Leibniz hatte in beiden Figuren und im zugehörigen Text den Punkt E ursprünglich mit D bezeichnet und dies nachträglich geändert. Für den bereits vorher mit E bezeichneten Punkt in Fig. 7 wird zur Vermeidung von Verwechslungen die Bezeichnung E' verwendet. In der Vorlage zu Fig. 7 hat Leibniz die Strecke ΘT gestrichen und FB nicht als Verlängerung der Strecke BT, sondern der Strecke BL eingezeichnet.



[*Fig. 7*]

1 *Nebenbetrachtung:* $E'F \sqcap BC \sqcap y$. $\dfrac{AT}{AB \sqcap x} \sqcap \dfrac{TE'}{E'F \sqcap y}$. Ergo $TE' \sqcap a$. Ecce modum elegantem latus rectum independenter ab aliis per tangentes seu organice inveniendi.



[*Fig. 8*]

$2ax \dotplus \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$. Ergo $\cancel{2}at \dotplus \frac{a}{q}\cancel{2}xt \sqcap \cancel{2}y^2 \sqcap 2ax \dotplus \frac{a}{q}x^2$ et $t \sqcap \frac{2ax \dotplus \frac{a}{q}x^2}{a \dotplus \frac{a}{q}x} \sqcap \frac{ax}{a \dotplus \frac{a}{q}x}$ $+ x \sqcap B\Theta$. et $\frac{ax}{a \dotplus \frac{a}{q}x} \sqcap A\Theta$. $\frac{A\Theta}{AT} \sqcap \frac{t}{y}$. seu $AT \sqcap \frac{yA\Theta}{t \sqcap \frac{y^2}{a \dotplus \frac{a}{q}x}}$. Ergo $AT \sqcap \frac{A\Theta, a \dotplus \frac{a}{q}x}{y}$ $\sqcap \frac{ax}{y}$.

In Circulo Ellipsi et Hyperbola AT est ad AB, ut dimidium latus rectum est ad BC. 5 $AT \sqcap \frac{ax}{\sqrt{2ax \dotplus \frac{a}{q}x^2}} \sqcap z$. Erit $\frac{a^2x^2}{2ax \dotplus \frac{a}{q}x^2} \sqcap z^2$. et $\frac{a^2x}{2a \dotplus \frac{a}{q}x} \sqcap z^2$. et $a^2x \sqcap 2az^2 \dotplus \frac{a}{q}xz^2$. et $x \sqcap \frac{2\cancel{a}z^2}{a^{\cancel{2}} \dotplus \frac{\cancel{a}}{q}z^2}$ [$\sqcap$] $\frac{2qz^2}{aq \dotplus z^2}$ et $\frac{x}{2} \sqcap z^2 \dotplus \frac{1}{q}z^4 + \frac{1}{q^2}z^6 \dotplus \frac{1}{q^3}z^8$ [etc.] et $\frac{1}{2}\int \overline{x}$ seu Spat.

---

6 *Nebenbetrachtung:* $zy \sqcap ax$. et $\frac{2q \dotplus x}{q} \sqcap \frac{y^2}{ax}$. $\frac{z^2}{a^2} \sqcap \frac{x^2}{y^2}$. $\frac{2qa \dotplus ax}{qx} \sqcap \frac{y^2}{x^2} \sqcap \frac{a^2}{z^2}$.

7 *Nebenbetrachtung:* $\frac{c}{b+x} \sqcap \frac{c}{b} - \frac{cx}{b^2} + \frac{cx^2}{b^3}$

$ATCA \sqcap \frac{z^3}{3} \dagger \frac{1}{5q}z^5 + \frac{1}{7q^2}z^7 \dagger \frac{1}{9q^3}z^9$ etc. Spatio diviso per q. et posito $aq \sqcap 1$. erit: $\frac{ATCA}{q} \sqcap \frac{z^3}{3} \dagger \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7}$ etc.

$$\frac{AL}{y \sqcap BC} \sqcap \frac{q}{q \dagger x \sqcap EB} \text{ et } AL \sqcap \frac{qy}{q \dagger x}.$$

[*Erster Ansatz*]

Ergo $TL \sqcap +AL - AT$ Ellips. $\dagger AL \dagger AT$. Jam in Hyperbola $\dagger$ significat $+$. et $\dagger$ signifi- $-AL + AT$ Hyp.
cat $-$. In Ellipsi contra. Ergo $TL \sqcap \dagger \frac{qy}{q \dagger x} \dagger \frac{ax}{y} \sqcap \frac{\dagger qy^2 \dagger qax + ax^2}{qy \dagger yx}$ et pro $\dagger qy^2$ ponendo ejus valorem fiet $TL \sqcap \frac{\dagger q\,2\,ax\ \boxed{-ax^2}\ \boxed{\dagger qax}\ \boxed{+x^2}}{qy \dagger yx}$. et $\frac{qax}{q \dagger x, y}$ et quia $\frac{x}{y} \sqcap \frac{AT}{a}$ fiet $TL \sqcap \frac{qAT}{q \dagger x}$ et Triangulum $CLT \sqcap \frac{q, AT, x}{2, q \dagger x}$. Triang. $CTA \sqcap \frac{AT, x}{2}$. Triang. $CLA \sqcap CTA - CLT \sqcap \frac{AT, x}{2}$,, $\frown 1 - \frac{q}{q \dagger x}$ seu $CLA \sqcap \frac{AT, x}{2}$, $\frown \frac{q \dagger x \dagger q}{q \dagger x}$.

$EAT \sqcap \frac{qax}{2y}$. $CTA \sqcap \frac{AT, x}{2}$. Ergo componendum est trapezium $EACT$ modo qui Ellipsi et Hyperbolae sit communis, ita ut saltem signis differant. Imo jam video non id agi ut trapezium eodem componatur modo sed ut sector $AECA$, ope Trilinei EAC. Triangulo EAL in Ellipsi subtrahe in Hyperbola adde Triangulum ELT habebis triang. EAT.

---

5 f. *Zu* $TL \sqcap +AL - AT$: Error puto. Generaliter TL aequ. $AL - AT$. $TL \sqcap \frac{qy}{q \dagger x} -$ $-AL + AT$

$$\frac{ax}{y} \text{ aequ. } \frac{qy^2 - aqx \dagger ax^2}{qy \dagger xy}, \text{ sive } \frac{q2ax\ \boxed{\dagger q\frac{a}{q}x^2} - axq\ \boxed{\dagger ax^2}}{qy \dagger xy} \text{ seu } \frac{qax}{q \dagger x, y}.$$

---

5 f. $TL \sqcap +AL - AT$ Ellips.: Auch im Fall der Hyperbel gilt $TL = AL - AT$. Der Fehler beein- $-AL + AT$ Hyp.
trächtigt mit weiteren Versehen die Überlegung bis S. 367 Z. 18. Leibniz erkennt dies und setzt neu an.

$EAL.\ EAT.\ ECT.\ EAC.\ LCT.\ LAC.\ CTAC.\ CTA.\ EBC.\ ABC.$

$$\left.\begin{array}{ll} EAT \sqcap EAL \dagger ELT.\ ECT \sqcap + EAL - EAT - CTL & \text{Ellips.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \ \ldots + \ldots + \ldots & \text{Hyp.} \end{array}\right\}$$

$ECT \sqcap \dagger EAL \dagger EAT \dagger CTL$ vel explicando EAT fiet:

$ECT \sqcap \boxed{\dagger EAL, \dagger EAL} + ELT, \dagger CTL \sqcap ELT \dagger CTL.$

$EAC \sqcap EBC \pm ABC \sqcap EBC \dagger ABC.$

$LAC \sqcap +TAC + CLT$ Ellips. $\sqcap TAC \dagger CLT.$

$\qquad\qquad - CLT$ Hyp.

$EAT \sqcap EAL \dagger ELT.\ ECT \sqcap ELT \dagger CTL.\ EAC \sqcap EBC \dagger ABC.\ LAC \sqcap TAC \dagger CLT.$

Trapezium $EATC \sqcap + EAC + ELT - CTL$ Ellips. $\sqcap EAC + ELT \dagger CTL.$

$\qquad\qquad\qquad\qquad + \ \ldots + \ldots + \ldots$ Hyp.

Quaeritur sector $AECA \sqcap + EAL +$ Trilin. $ATCA - CTL$ Hyp. seu sector

$\qquad\qquad\qquad\qquad + EAL -$ Trilin. $ATCA - CTL$ Ellips.

$AECA \sqcap EAL \dagger ATCA - CTL.$

Est autem $EAL \sqcap qAL.$ et $AL \sqcap \dfrac{qy}{q \dagger x}.$ Ergo Triang. $EAL \sqcap \dfrac{1}{2}\ \dfrac{q^2y}{q \dagger x}$ et $CTL \sqcap \dfrac{1}{2}\ \dfrac{qax^2}{q \dagger x, y}.$ Ergo $EAL - CTL \sqcap \dfrac{1}{2},,\ \dfrac{q^2y^2 - qax^2}{q \dagger x, y}.$ et pro y^2 ponendo valorem, fiet: $\dfrac{1}{2},,\ \dfrac{q^2 2ax \dagger qax^2 - qax^2}{q \dagger x, y} \overset{\text{Hyp.}}{\sqcap} \dfrac{1}{2}\ \dfrac{q^2 2ax}{q \dagger x, y}$ vel $\sqcap \dfrac{1}{2},,\ \dfrac{2q^2ax - 2qax^2}{q + x, y}.$

[*Zweiter Ansatz*]

$AT \sqcap \dfrac{ax}{y} \sqcap z.\ aq \sqcap 1.$ Trilin. $\dfrac{ATCA}{q} \sqcap \dfrac{z^3}{3} \pm \dfrac{z^5}{5} + \dfrac{z^7}{7}$ etc. $AL \sqcap \dfrac{qy}{q \dagger x}.\ TL \sqcap \dfrac{qy}{q \dagger x} - \dfrac{ax}{y} \sqcap \dfrac{qy^2 - qax \dagger ax^2}{q \dagger x, y}$ et quia $qy^2 \sqcap 2aqx \dagger ax^2$, fiet $TL \sqcap \dfrac{aqx}{q \dagger x, y}$ et $CTL \sqcap \dfrac{qax^2}{q \dagger x, y}$ et $EAL \sqcap \dfrac{q^2y}{q \dagger x}.$ et $EAL \dagger CTL \sqcap \dfrac{q^2y^2 \dagger qax^2}{q \dagger x, y} \sqcap \dfrac{q^2 2ax \dagger qax^2 \dagger qax^2}{q \dagger x, y} \sqcap \dfrac{2q^2ax \dagger 2qax^2}{q \dagger x, y}$ et dividendo per $q \dagger x$ fiet $\dfrac{2qax}{y} \sqcap 2qz.$ et dimidium rectangulorum $EAL \dagger CTL$ seu Triang.

$EAL -$ (in Ellips.) $\bigtriangledown CTL$ dat Trapezium $EATC \sqcap EAL \dagger CTL$ aequ. $qz.$

$\quad\ + $ (in Hyp.)

$EAL \sqcap \frac{1}{2}EA, AL.\ \frac{AL}{y} \sqcap \frac{q}{q \dagger x}.\ AL \sqcap \frac{qy}{q \dagger x}.$ et $EAL \sqcap \frac{1}{2}\ \frac{q^2y}{q \dagger x}.\ AT \sqcap \frac{ax}{y}.\ AL \sqcap \frac{qy}{q \dagger x}.$ AL major quam AT, in Ellipsi quamdiu non ultra quadrantem progredimur[,] in Hyperbola quia $A\Theta$ minor quam q. Pro $A\Theta \sqcap \frac{ax}{a + \frac{a}{q}x}$ in Hyp. seu $\frac{qax}{aq + ax}$ quaerendum an minor majorve quam q. Sed patet esse necessario minorem quia $q \sqcap \frac{qax}{ax}$. et $A\Theta \sqcap \frac{qax}{aq + ax}$. Ergo $A\Theta$ minor quam q. Hinc jam ita dicendum:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{In Ellipsi} & \text{sector } AECA \sqcap \text{Triang. } EAL - \text{Trilin. } ATCA - \text{Triang. } CTL. \\ \text{In Hyperbola} & \text{sector } AECA \sqcap \text{Triang. } EAL + \text{Trilin. } ATCA + \text{Triang. } CTL. \end{array}\right\}$$
$$\text{In utraque} \quad \text{sect.} \quad AECA \sqcap \text{Triang. } EAL \dagger \text{ Trilin. } ATCA \dagger \text{ Triang. } CTL.$$

Ergo $EAL \dagger CTL \sqcap \frac{1}{2}\ \frac{q^2y^2 \dagger qax^2 \sqcap q^2 2ax \dagger 2qax^2}{q \dagger x, y} \sqcap \boxed{\frac{1}{2}}\ \frac{2\ qax}{y} \sqcap qz.$ et erit $EAL \dagger CTL \dagger$ Trilin. $\sqcap qz \dagger$ Trilin. $\sqcap$ Sectori. Dividatur sector per q. erit:

$$\frac{\text{Sector}}{q} \sqcap \frac{z}{1} \dagger \frac{z^3}{3aq} + \frac{z^5}{5a^2q^2} \dagger \frac{z^7}{7a^3q^3} + \frac{z^9}{9a^4q^4} \dagger \frac{z^{11}}{11a^5q^5} \text{ etc. ponendo } aq \sqcap 1.$$

Habemus ergo sectionis Conicae cujuslibet centrum assignabile habentis quadraturam generalem.

32. QUADRATURA CIRCULI ET HYPERBOLAE ARITHMETICA. LOGARITHMI

Juli 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 431–432. 1 Bog. 2°. $2\frac{3}{4}$ S. auf Bl. 431 r°–432 r°. Cc 2, Nr. 1485

Julii 1676.

Quadr. circ. et Hyperb. Arithmet. Logarithmi

Paucis logarithmis, v. g. omnium numerorum usque ad 100, datis, fieri possent multiplicationes et divisiones etiam numerorum majorum, ut si sit: 329728 multipl. per 5639. fiet $\underset{a}{32}[\underset{b}{9}] \frown \underset{c}{1000,,+728}$. per $\underset{d}{5} \frown \underset{e}{1000,,+639}$ seu fiet: $ab + c$ per $de + f$. multiplicando: $abde + cde + fab + fc$. Ut inveniatur $abde$, addantur eorum logarithmi sed hic jam deberet ex dato logarithmo investigari facile posse numerus. Quod fiet hoc modo, dividatur logarithmus ex $abde$ per numerum aliquem donec fiat tam parvus, ut reperiatur in Tabula nostra exigua logarithmorum usque ad 100. Quod facillimo negotio fieri potest et tunc quaeratur ejus logarithmi numerus, qui in se toties ductus quot in divisore sunt unitates dabit numerum $abde$. Eodem modo habebitur numerus cde, et fab. et fc. Sed haec curiositatis causa; praxi enim inepta sunt. Sed alia ars melior est; si ope inventae logarithmorum magnitudinis ex dato numero et contra numeri ex dato logarithmo, tunc quaeramus logarithmum numeri. Cum saepe adhibendus est, ducendus in seipsum, extrahenda ex eo radix aliaeque peragendae operationes difficiles, ut dato numero n. erit $l \sqcap \mathfrak{D}\, \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^6}{6}$ etc. et contra ni fallor ex dato logarithmo erit $n \sqcap \odot\, \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} - \frac{l^4}{1,2,3,4}$ etc. ita facile omnia ad magnam satis exactitudinem

6 Julii 1676. *erg. L* 7 quadr. ... Logarithmi *erg. L*

20 f. dato ... etc.: Gleichung $\mathfrak{D}$ gibt den Logarithmus von $1+n$ statt von n wieder. Leibniz benutzt den fehlerhaften Ausdruck im Folgenden und erkennt den Irrtum in S. 370 Z. 20 und S. 372 Z. 2–4.

habebuntur. Inveniatur enim logarithmus ex numero, per regulam ☽. is numerus minuatur vel augeatur, vel etiam multiplicetur aut dividatur; et habebitur logarithmus numeri quaesiti, ex quo per regulam ⊙ vicissim habebitur numerus. Et quoniam exactitudinis causa forte ad n^4, vel l^4, usque progredi opus erit, poterit quodammodo praecedens quasi logarithmus inveniri ad inveniendos sequentes; quod mirum, quaeritur enim logarithmus ipsius n. per regulam ☽. is est $\frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ etc. quaeritur n^3, invenietur ope priorum nam ponatur logarithmus jam inventus esse $\frac{n}{1} - \frac{n^2}{2}$, is multiplicatus per 3. dabit Cubum ergo $\frac{3n}{1} - \frac{3n^2}{2}$ erit logarithmus circiter ab n^3. id est eo nonnihil major tunc videntur novae quaedam oriri posse considerationes: ut si incipias

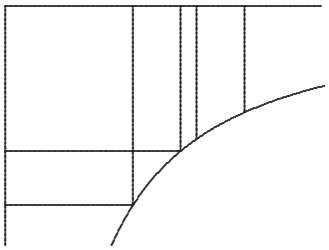
$$
\begin{array}{llll}
l.\ \text{ab } n & \sqcap\ n & l.\ \text{ab } n^2 & \sqcap\ 2n \\
 & \sqcap\ \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} & & \sqcap\ \frac{2n}{1} - \frac{2n^2}{2} \\
 & \sqcap\ \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} & & \sqcap\ \frac{2n}{1} - \frac{2n^2}{2} + \frac{2n^3}{3} \\
 & \sqcap\ \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
l.\ n^3 & \sqcap\ 3n & l.\ n^4 & \sqcap\ 4n \qquad \text{etc.} \\
 & \frac{3n}{1} - \frac{3n^2}{2} & & \frac{4n}{1} - \frac{4n^2}{2} \\
 & \frac{3n}{1} - \frac{3n^2}{2} + \frac{3n^3}{3} & & \frac{4n}{1} - \frac{4n^2}{2} + \frac{4n^3}{3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
l \text{ ab } n & \sqcap\ \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^6}{6} & \sqcap\ \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^6}{6} \\
l \text{ ab } n^2 & \sqcap\ \frac{n^2}{1} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^6}{3} - \frac{n^8}{4} + \frac{n^{10}}{5} - \frac{n^{12}}{6} & \sqcap\ \frac{2n}{1} - \frac{2n^2}{2} + \frac{2n^3}{3} - \frac{2n^4}{4} + \frac{2n^5}{5} - \frac{2n^6}{6} \\
l \text{ ab } n^3 & \sqcap\ \frac{n^3}{1} - \frac{n^6}{2} + \frac{n^9}{3} - \frac{n^{12}}{4} + \frac{n^{15}}{5} - \frac{n^{18}}{6} & \sqcap\ \frac{3n}{1} - \frac{3n^2}{2} + \frac{3n^3}{3} - \frac{3n^4}{4} + \frac{3n^5}{5} - \frac{3n^6}{6}
\end{array}
$$

16 *Darunter:* Error.

7 is ... Cubum: vgl. VII, 5 N. 88 S. 592, dat. Juni 1676.



[*Fig. 1*]

Ex aequationibus tam miris mira possunt duci, adhuc multa:

Ex addito logarithmo n et n^2. fit logarithmus n^3, et ita porro.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \frac{n^5}{5} \\ \\ \quad + \frac{n^2}{1} + \frac{n^3}{1} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^5}{1} \end{array}\right\} \text{ etc. Summa logarithmorum ab omnibus } n \text{ potestatibus,}$$

sed ista sine fine varia, rectius erit considerare differentiam inter logarithmum n^2 et n, dare logarithmum n, differentiam inter logarithmum n^3 et n^2, dare etiam logarithmum ab n.

$$l \text{ ab } n \sqcap \begin{array}{l} \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^6}{6} + \frac{n^7}{7} - \frac{n^8}{8} \\ \quad - \frac{n^2}{1} \qquad + \frac{n^4}{2} \qquad - \frac{n^6}{3} \qquad + \frac{n^8}{4} \end{array}$$

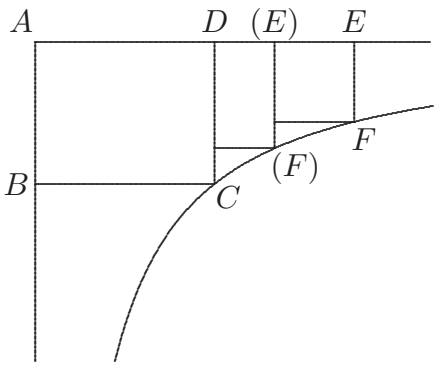
. Sed jam video non ita disponere licere pro arbitrio.

Sed hinc jam aliquid pulchrius, quoniam logarithmi ab n. ab n^2. ab n^3. ab n^4 etc. sunt progressionis Arithmeticae, erit omnium summa aequalis quadrato primi dimidiato;

$$l \text{ ab } n + l \text{ a } n^2 + l \text{ a } n^3 \text{ etc. } \sqcap \frac{n}{1-n} - \frac{n^2}{2, 1-n^2} + \frac{n^3}{3, 1-n^3} - \frac{n^4}{4, 1-n^4} \text{ etc.}$$

10 $-\frac{n^5}{5} + \frac{n^6}{6}$ *L ändert Hrsg.*
$+ \frac{n^6}{3}$

13 erit: Die folgende Aussage ist nicht korrekt. 14 l ab n ... $\sqcap$: Leibniz addiert die Spalten des ersten Teils der Gleichungsketten S. 370 Z. 17–19; dabei setzt er $n < 1$ voraus.



[*Fig. 2*]

Cavendum ne erremus: constat si sint AE. $A(E)$. AD. progressionis Geometricae fore $E(F)$ et $(E)C$ spatia aequalia et generaliter si sint AE ut numeri fore spatia $DEFC$ ut logarithmos. Ergo sic l ab $\underbrace{1+e}_{n} \sqcap \frac{e}{1} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^5}{5}$ etc. Est autem $e \sqcap n-1$. Possumus alia etiam via sinum ex dato arcu invenire, si inventis sinus et arcus valoribus ex eodem scil. tangente semiarcus, aequationem conemur reddere rationalem, ut sinus ex tangente semiarcus est $\frac{2a^2t}{t^2+a^2}$ ni fallor seu $2a^2 \Big| t - t^3 + t^5 - t^7 + t^9 - t^{11}$ etc. arcus autem est $\frac{2t}{1} - \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^7}{7}$ etc. $\sqcap$ $a.\ s \sqcap 2t - 2t^3 + 2t^5 - 2t^7$ etc. tentandum an t. reddi possit pura. Item. Eadem prorsus miracula in arcu, quae in logarithmis, nam duplicandus est tantum arcus, et triplicandus, et tamen aliae rursus multiplices orientur expressiones tum arcus tum caeterorum. Hinc etiam nova lux pro aequationibus datis omnibus ope Tabularum sinuum et logarithmorum resolvendis, componendo scilicet ejusmodi aequationes identicas, prius per datas quantitates multiplicatas ut

$$l\ \overline{\text{ab } 1+e} \quad \sqcap \quad \frac{e}{1} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^4}{4} \text{ etc. negligantur reliqua.}$$

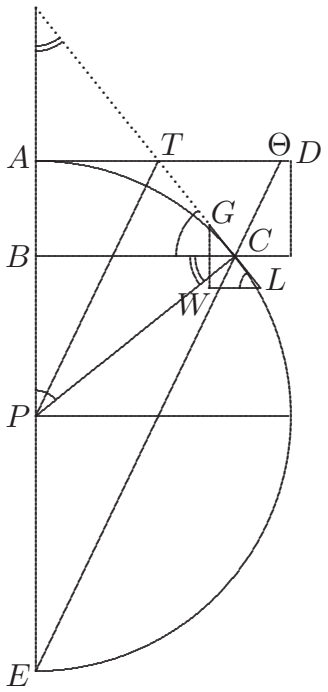
$$2l\ \overline{\text{ab } 1+e} \quad \sqcap \quad [\textit{bricht ab}]$$

15–373,1 $\sqcap$ *(1)* $\frac{e^2}{1} - \frac{e^4}{2} + \frac{e^6}{3} - \frac{e^8}{4}$ | etc negligantur reliqva *nicht gestr.* | *Darüber:* aliter enuntiandum *(2)* ex L

7 seu: Leibniz rechnet im Folgenden teilweise mit Radius $a = 1$ und bezeichnet nun den Bogen mit a.

Ex his aliisque inter se compositis et multiplicatis formari poterit aequatio similis datae, cujus resolutio cum detur ex logarithmis, partim etiam ex cognita inventione ipsius e, ex dato logarithmo, hinc ope ejus methodi aequatio proposita statim reddi poterit pura. Non tamen sic habebitur pura infinita, sed tantum quantum libuerit appropinquare licebit vel etiam ex tabulis ope dati logarithmi; utique inveniri poterit numerus $1 + e$.

Trigonometria sine Tabulis; inventio logarithmorum sine Tabulis, et contra; inventio logarithmorum sinuum tangentium et secantium, ipsis licet numeris sinuum tangentium et secantium non inventis, methodo diversa ab ea quae adhibetur. Methodus omnem aequationem propositam reddendi puram per seriem infinitam. Methodus quamlibet curvam Analyticam reducendi ad aliam curvam analyticam aequivalentem rationalem, et per consequens quadratura omnium figurarum per series infinitas. Methodus resolvendi omnem aequationem propositam per solas Tabulas logarithmorum, aut etiam per solum Canonem sinuum.



[*Fig. 3*]

$$\frac{PC}{GL} \sqcap \frac{BP}{LW} \sqcap \frac{BC}{GW}. \; PC, GW \sqcap BC, GL. \; \square DAB \sqcap \int \overline{\text{sin. ex arc.}}$$

1–5 Ex ... $1 + e$: s. N. 34 S. 390 Z. 8–13.

Posito arcu a, fit

$$\text{sin.} \sqcap \frac{a^1}{1} - \frac{a^3}{1,2,3} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5} - \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7} \text{ etc.}$$

$$\overline{\text{sum. sin.}} \sqcap \frac{a^2}{1,2} - \frac{a^4}{1,2,3,4} + \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6} - \frac{a^8}{1,2,3,4,5,6,7,8} \text{ etc.} \sqcap v.$$

$\sqcap$ AB sinus versus.

5 et $\iint$ sin. $\sqcap \dfrac{a^3}{1,2,3} - \dfrac{a^5}{1,2,3,4,5} + \dfrac{a^7}{1,\text{ etc. },7} - \dfrac{a^9}{1,\text{ etc. },9}$ $\sqcap \dfrac{v^2}{2}$.

Quae si vera essent sequeretur $\dfrac{v^2}{2}$ + sin. $\sqcap$ a. arcui. quod est absurdum. Sit ergo abstracte

$$\begin{aligned}
&\sin \sqcap \frac{a}{b} - \frac{a^3}{c} + \frac{a^5}{d} - \frac{a^7}{e} \text{ etc.} \\
&\int \overline{\sin} \sqcap \frac{a^2}{2b} - \frac{a^4}{4c} + \frac{a^6}{6d} - \frac{a^8}{8e} \text{ etc.} \sqcap \frac{v}{1} \\
&\iint \sin \sqcap \frac{a^3}{2,3b} - \frac{a^5}{4,5c} + \frac{a^7}{6,7d} - \frac{a^9}{8,9e} \text{ etc.} \sqcap \frac{v^2}{1,2} \\
&\iiint \sin \sqcap \frac{a^4}{2,3,4b} - \frac{a^6}{4,5,6c} + \frac{a^8}{6,7,8d} - \frac{a^{10}}{8,9,10e} \sqcap \frac{v^3}{1,2,3}.
\end{aligned}$$

Jam $\int + \iint + \iiint$ sinuum; semper a primo perexigua ratione differre alibi ostensum. Hinc nova forte comparatio cum $\dfrac{v}{1}$. $\dfrac{v^2}{1,2}$. $\dfrac{v^3}{1,2,3}$ etc.

---

11 *Am Rand:* $AT \sqcap y$. $A\Theta \sqcap 2y$. $\dfrac{\cancel{EA}}{\cancel{2}y} \sqcap \dfrac{BE \sqcap 2 - \dfrac{2y^2}{1+y^2}}{BC}$ et $BC \sqcap 2y - \dfrac{2y^3}{1+y^2} \sqcap \dfrac{2y}{1+y^2}$.

---

5 $\sqcap \dfrac{v^2}{2}$: Richtig wäre Integration nach der Bogenlänge, also $\int v\,da$ sowie später (Z. 11) $\iint v\,da\,da$ bei $\iiint$ sin. Leibniz bemerkt zwar die Unstimmigkeit, jedoch nicht deren Ursache. 12 alibi ostensum: vgl. N. 1 S. 34 Z. 4 – S. 35 Z. 1.

Sinus $\sqcap \dfrac{2y}{1+y^2}$ differentia sinuum facilis. Nam $s - \textcircled{2}s \sqcap \dagger \dfrac{2y}{1+y^2} \dagger \dfrac{2y+2\beta}{1+y^2+2y\beta}$ fiet $\dfrac{\dagger 4y^2\beta \dagger 2\beta \dagger 2\beta y^2}{1+2y^2+y^4}$ seu $\dfrac{\dagger 2y^2\cancel{\beta} \dagger 2\cancel{\beta}}{1+2y^2+y^4}$ seu posita $1 \sqcap y$. fiet $d\overline{\sin} \sqcap 2, \dfrac{1-y^2}{\boxed{2}\overline{1+y^2}}$.

$\dfrac{1-y^2}{\boxed{2}1+y^2}$ est quantitas cujus summa haberi potest. Nam $\int \overline{\dfrac{1-y^2}{\boxed{2}\overline{1+y^2}}} \sqcap \dfrac{y}{1+y^2}$.

$\iint \overline{\overline{\dfrac{2y}{1+y^2}} \frown \dfrac{2\overline{1-y^2}}{\boxed{2}\overline{1+y^2}}}$ quae est summa arcuum in diff. sin, est aeq. $\dfrac{y}{1+y^2} \frown$ $\int \overline{\dfrac{2y}{1+y^2}} - \dfrac{2y^2}{1+y^2}$. sin $\sqcap \dfrac{2y}{1+y^2}$. arcus $\sqcap \dfrac{2y}{1} - \dfrac{2y^3}{3} + \dfrac{2y^5}{5} - \dfrac{2y^7}{7}$. seu arc $\sqcap$ sum $\overline{\dfrac{2y^2}{1+y^2}}$. $\int \overline{\text{sin, in arc, in } \overline{\text{diff. tang. semiarcus}}} \sqcap \dfrac{\text{arc}^2}{2}$.

$\omega \sqcap \dfrac{2y}{1+y^2}$. $a \sqcap \dfrac{2y}{1} - \dfrac{2y^3}{3} + \dfrac{2y^5}{5} - \dfrac{2y^7}{7}$ etc. quaeritur sinus ex dato arcu. $\omega \sqcap$ $2y - 2y^3 + 2y^5 - 2y^7$ etc. $\omega \sqcap 2y - 2y^3$. et $a \sqcap \dfrac{2y}{1} - \dfrac{2y^3}{3}$. Ex priore $2y^3 \sqcap 2y - \omega$. et rursus $\dfrac{2y^3}{3} \sqcap \dfrac{2y}{1} - a$. sed ita substitutio fieri non potest, quoniam $2y^3$ utrobique majus. Ergo pro ω sinu sumamus differentiam sinus et radii, nempe ea est $1 - \omega$ vocemus eam δ et fiet $\delta \sqcap 1 - 2y + 2y^3 - 2y^5 + 2y^7$. et arcus $a \sqcap \dfrac{2y}{1} - \dfrac{2y^3}{3} + \dfrac{2y^5}{5} - \dfrac{2y^7}{7} + \dfrac{2y^9}{9} - \dfrac{2y^{11}}{11}$ etc. $a \sqcap 2y$. $\delta \sqcap 1 - 2y$. Hinc nihil.

12 a $\sqcap$ 2y. *(1)* $\delta \sqcap 1 - 2y$. *(a)* erit y $\sqcap \dfrac{a}{2}$. et y $\sqcap \dfrac{1-\delta}{2}$ ergo $\dfrac{1-\delta}{2} \sqcap \dfrac{a}{2}$ seu $\delta \sqcap 1 - a$ a $\sqcap \dfrac{2y}{1} - \dfrac{2y^3}{3}$ $\delta \sqcap 1 - 2y + 2y^3$. $y^3 \sqcap$ *(b)* a $\sqcap$ 2y. $\omega \sqcap \dfrac{2y}{1} - {}^{2y^3}$ y $\sqcap \dfrac{a}{2}$. ex priore $2y^3 \sqcap 2y - \omega$. ex posteriore $2y^3 \sqcap \dfrac{a^3}{4}$. Ergo $2y - \omega \sqcap \dfrac{a^3}{4}$ a $\sqcap \dfrac{2y}{1} - \dfrac{2y^3}{3}$ *(2)* $\delta \sqcap 1 - 2y$ *L*

4 quae est: Die Behauptung ist nicht korrekt. Bis Z. 6 kommen weitere Versehen hinzu.

$$a \overset{(1)}{\sqcap} \frac{2y}{1}. \qquad \text{ᔕ} \overset{(2)}{\sqcap} 2y.$$

$$a \overset{(3)}{\sqcap} \frac{2y}{1} - \frac{2y^3}{3}. \qquad \text{ᔕ} \overset{(4)}{\sqcap} \underbrace{2y}_{a} - 2y^3.$$

$$\frac{2y^3}{3} \overset{(5)}{\sqcap} \frac{2y}{1} - a \text{ ex } 3.$$

$$\text{arc} \sqcap \frac{2y}{1}. \qquad \text{ᔕ} \sqcap \frac{2y}{1+y^2}. \qquad y^2 \sqcap \frac{a^2}{4}. \qquad \text{ᔕ} \sqcap \frac{8y}{4+a^2}.$$

$$\text{arc} \sqcap 2y - \frac{2y^3}{3}. \qquad \text{ᔕ} \sqcap \frac{4a}{4+a^2}.$$

Si tangens y, arcus a, erit $\quad a \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}$ etc.

et duplus arcus erit $\quad 2a \sqcap \frac{2y}{1} - \frac{2y^3}{3} + \frac{2y^5}{5} - \frac{2y^7}{7}$ etc.

Jam si tangens sit y, tangens arcus dupl. $\sqcap \varphi$. est $\varphi \sqcap \frac{2y}{1-y^2}$. Est autem $2a \sqcap \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^5}{5} - \frac{\varphi^7}{7}$ etc. seu $2a \sqcap \frac{2y}{1-y^2} - \frac{8y^3}{3, \boxed{3}\overline{1-y^2}} + \frac{32y^5}{5, \boxed{5}\overline{1-y^2}}$ etc. $\sqcap \frac{2y}{1} - \frac{2y^3}{3} + \frac{2y^5}{5} - \frac{2y^7}{7}$. Et ita porro in infinitum, quae Hyperbolicis consonant:

$$a \sqcap \frac{y}{1} \qquad 2a \sqcap \frac{2y}{1-y^2} \qquad 4a \sqcap \frac{2(y)}{1-(y^2)} \qquad 8a \sqcap \frac{2((y))}{1-((y^2))}$$

$$(y) \qquad ((y))$$

$$a \sqcap \frac{y}{1} \qquad a \sqcap \frac{(y)}{2} \qquad a \sqcap \frac{((y))}{4} \qquad a \sqcap \frac{(((y)))}{8} \qquad a \sqcap \frac{((((y))))}{16}$$

Posterior appropinquatio semper exactior priore. Verum notandum, quod hoc modo non assurgi potest in infinitum nec infinituplicari potest arcus ejusdem circuli, nisi sit ipse circulus infinitae magnitudinis. Itaque contra potius divisione utendum: $\varphi \sqcap \frac{2y}{1-y^2}$. ergo $\varphi - \varphi y^2 \sqcap 2y$. et $\varphi y^2 + 2y \sqcap \varphi$. et $y^2 + \frac{2}{\varphi}y \sqcap 1$ et $y^2 + \frac{2}{\varphi}y + \frac{1}{\varphi^2} \sqcap 1 + \frac{1}{\varphi^2}$ et $y + \frac{1}{\varphi} \sqcap \frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi}$ et $y \sqcap \frac{\sqrt{\varphi^2+1}-1}{\varphi}$.

---

5 ᔕ $\sqcap \frac{4a}{4+a^2}$: Aus $a < 2y$ und ᔕ $\sqcap \frac{2y}{1+y^2}$ folgt keine Ungleichung zwischen ᔕ und $\frac{4a}{4+a^2}$.

$$\text{arc} \sqcap \varphi \qquad \text{arc} \sqcap 2(\varphi) \qquad \text{arc} \sqcap 4((\varphi)) \qquad \text{arc} \sqcap 8(((\varphi))) \qquad \text{etc.}$$

$$\sqcap\, 2\frac{\sqrt{\varphi^2+1}-1}{\varphi}$$

Angulum in data ratione secare: sit $a \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}$ etc. Sit alius arcus $\alpha \sqcap \frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7}$ etc. Sit $\alpha \sqcap \frac{a}{b}$. erit $\frac{a}{b} \sqcap \frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7}$ et $a \sqcap \frac{b\theta}{1} - \frac{b\theta^3}{3} + \frac{b\theta^5}{5} - \frac{b\theta^7}{7} \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}$. Quaeritur θ. 5

33. CALCULUS MINUTI SECUNDI

[29. Juni – 27. August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 17 Bl. 5–6. 1 Bog. 2°. Ca $\frac{1}{3}$ S. auf Bl. 6 r° unten. Auf dem Rest des Bogens Schlussteil von VII, 5 N. 68.
Cc 2, Nr. 1488 tlw.

Datierungsgründe: N. 33 ist nach VII, 5 N. 68 geschrieben worden. Leibniz verwendet im vorliegenden Stück fehlerhafte Werte aus den Nebenrechnungen von N. 27, dat. 29. Juni 1676. Das Ergebnis von N. 33 übernimmt er in N. 42, das spätestens am 27. August 1676 entstanden ist.

Minutum secundum est pars peripheriae 129600ma, reducenda est ad partes decimales; posito radio 100000. Eo casu peripheria est 628381. Sit $\frac{628381}{1296\boxed{00}} \sqcap \frac{b}{100,0\boxed{00}}$. Quaeritur b.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \cancel{1}\,\cancel{2}\,1 \\ \cancel{2}\,\cancel{6}\,\cancel{5} \\ \cancel{0}\,\cancel{3}\,\cancel{3}\,1 \\ \cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{9}\,\cancel{7}\,\cancel{4} \\ \cancel{2}\,\cancel{4}\,\cancel{2}\,\cancel{9}\,\cancel{0}\,7 \\ \cancel{6}\,\cancel{2}\,\cancel{8}\,\cancel{3}\,\cancel{8}\,\cancel{1} \\ \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{9}\,\cancel{6}\,\cancel{6}\,\cancel{6} \\ \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{9}\,\cancel{9} \\ \cancel{1}\,\cancel{2} \end{array} \quad \text{f} \quad 484\,\frac{1117}{1296}. \quad \frac{484+\frac{1117}{1296}}{100,000} \sqcap 485-\frac{179}{1296}.$$

9 f. 129600ma ... 628381: Leibniz übernimmt die fehlerhaften Werte aus N. 27 S. 306 Z. 9 u. S. 307 Z. 15. Hinzu kommen weitere Versehen, die das Ergebnis beeinträchtigen.

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & & & \cancel{2} & -1 & -1 & & \\
 & & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{4} & \boxed{-4} & & \\
 & \cancel{1} & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{8} & \boxed{+4} & & \\
 & \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{2} & 4 & -2 & \\
\cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \not{f}\ 862 - \dfrac{152}{1296} \Big\lceil \dfrac{71}{648}. \\
 & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & \\
 & & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{9} & & \\
 & & & \cancel{1} & \cancel{2} & & &
\end{array}
$$

Si facias $862 - \dfrac{8}{1296} - \dfrac{144}{1296} \overset{2}{\Big|} \dfrac{72}{648} \overset{9}{\Big|} \dfrac{8}{72} \Big| \dfrac{1}{9}$ [:] $862 - \dfrac{1}{162} - \dfrac{1}{9}$.

Ergo posito radio 100000 erit minutum secundum: $\dfrac{484862 - \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{162}}{100000}$ seu posito radio 1. erit minut. sec. $\dfrac{484862}{100,000,,00,000}$ radii; ita ut error non major quam $\dfrac{1}{100,000}$.

Utile est Tabulam arcuum calculari, secundum quam exprimatur eorum longitudo in relatione ad radium positum 100,000; quod facile potest hoc elementum tantum multiplicando per numerum minutorum secundorum.

10 minutum secundum: Leibniz übernimmt den folgenden Wert in N. 42, dat. August 1676.

34. DE INVENTIONE LOGARITHMORUM SINE TABULIS
[Juli – 24. August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 298 r°–299 v°. 1 Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1462

Datierungsgründe: N. 34 enthält Vorstufen zu prop. XLIV, XLVI und XLVII von N. 51 und ist demnach nach N. 28–31 entstanden. Darüber hinaus ist N. 34 nach N. 32 anzusiedeln, in welchem Leibniz die hier formulierten Sätze konzipiert hat. N. 35, welches das vorliegende Stück inhaltlich fortsetzt, ist nach N. 34 geschrieben worden. In einer Notiz am Papierrand verwendet Leibniz einen in N. 43 berechneten Wert. Ein in der Notiz berechneter Wert wird in N. 48 weiterbenutzt.

Aequatio l aequ. $\frac{n}{1} - \frac{n^2}{2b} + \frac{n^3}{3b^2} - \frac{n^4}{4b^3}$ etc. vel aequatio: l aeq. $\frac{d}{1} + \frac{d^2}{2a} + \frac{d^3}{3a^2} + \frac{d^4}{4a^3}$ etc. est ad curvam Logarithmicam, eritque l logarithmus, si priore casu $b+n$, posteriore $a-d$. sit numerus.

Propositio

Si sint ut Numeri		erunt ut Logarithmi, series hae	
Numeri	eorumve reciproci	series	vel series
$b+e$	$a-d$ aeq. $\frac{ab}{b+e}$	$+\frac{e}{1} - \frac{e^2}{2b} + \frac{e^3}{3b^2} - \frac{e^4}{4b^3}$ etc. vel	$+\frac{d}{1} + \frac{d^2}{2a} + \frac{d^3}{3a^2} + \frac{d^4}{4a^3}$ etc.
$b+g$	$a-f$ aeq. $\frac{ab}{b+g}$	$+\frac{g}{1} - \frac{g^2}{2b} + \frac{g^3}{3b^2} - \frac{g^4}{4b^3}$ etc.	$+\frac{f}{1} + \frac{f^2}{2a} + \frac{f^3}{3a^2} + \frac{f^4}{4a^3}$ etc.

10 aequ. *(1)* $\frac{\mathrm{e}}{1} - \frac{\mathrm{e}^2}{2\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{e}^3}{3\mathrm{b}^2} - \frac{\mathrm{e}^4}{4\mathrm{b}^3}$ *(2)* $\frac{\mathrm{n}}{1}$ *L* 13 f. propositio *(1)* Ex datis Numeris invenire Logarithmos, sine Tabulis Regula autem haec est Si rectae $\mathrm{b} \pm \mathrm{e}$. $\mathrm{b} \pm \mathrm{g}$ $\mathrm{b} \pm \mathrm{l}$ *(2)* si *L*

13 Propositio: vgl. N. 51 prop. XLIV S. 631 Z. 1–9.

$b+l$ $\quad a-h$ $\quad +\frac{l}{1}-\frac{l^2}{2b}+\frac{l^3}{3b^2}-\frac{l^4}{4b^3}$ etc. $\quad +\frac{h}{1}+\frac{h^2}{2a}+\frac{h^3}{3a^2}+\frac{h^4}{4a^3}$ etc.

aeq. $\frac{ab}{b+l}$

etc.

Unde si ponantur a aeq. b. datis numeris $a+e$ vel $\frac{1}{a+e}$ erunt Logarithmi $\frac{e}{1}-\frac{e^2}{2a}+\frac{e^3}{3a^2}-\frac{e^4}{4a^3}$ etc. vel $\frac{d}{1}+\frac{d^2}{2a}+\frac{d^3}{3a^2}+\frac{d^4}{4a^3}$ etc. posito esse $a-d$ aeq. $\frac{a^2}{a+e}$. ac denique a esse 1. erunt numerorum $1+e$, vel $\frac{1}{1+e}$ logarithmi, $\frac{e}{1}-\frac{e^2}{2}+\frac{e^3}{3}-\frac{e^4}{4}$ etc. vel $\frac{d}{1}+\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}+\frac{d^4}{4}$ etc. posito esse $1-d$ aeq. $\frac{1}{1+e}$. Unde illud quoque intelligatur numerorum reciprocorum, seu fractorum et integrorum eosdem esse logarithmos.

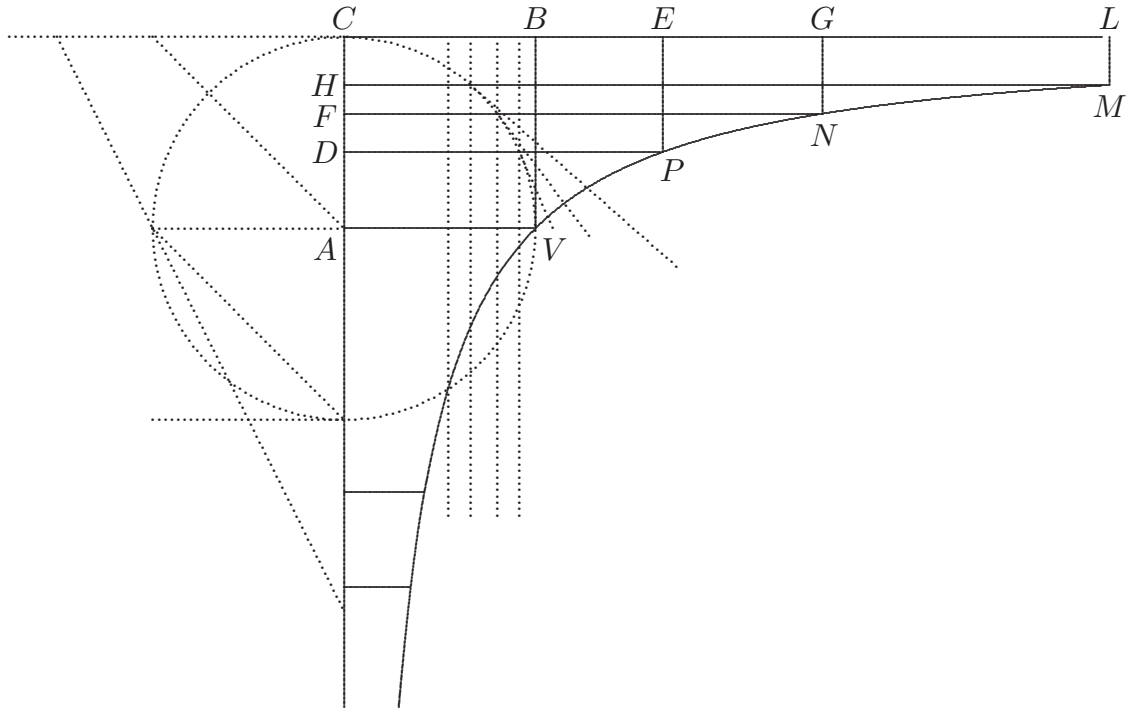
Centro C. potentia ab. sive rectangulo ACB describatur Hyperbola $VPNM$. cujus Asymptoti CBE. CHA. CB aequalis ipsi b. et CA ipsi a. Sit porro BE aequalis ipsi e. et BG ipsi g. et BL ipsi l. erit CE aequ. $b+e$. et CG aeq. $b+g$. et CL aeq. $b+l$. Erit EP vel CD, $\frac{ab}{b+e}$ vel $a-d$ et GN vel CF, $\frac{ab}{b+g}$ vel $a-f$ et LM vel CH aeq. $\frac{ab}{b+l}$ vel $a-h$ et AD erit d. AF erit f. et AH, erit h. Jam ex memorabili P. Gregorii a S. Vincentio invento constat si CE, CG, CL. sint ut numeri, fore Zonas $VBEPV$, $VBGNV$, $VBLMV$, ut Logarithmos. Hae autem Zonae sunt ad ab, potentiam Hyperbolae, ut

$$\frac{e}{b}-\frac{e^2}{2b^2}+\frac{e^3}{3b^3}-\frac{e^4}{4b^4} \text{ etc. ad 1.}$$
$$\frac{g}{b}-\frac{g^2}{2b^2}+\frac{g^3}{3b^3}-\frac{g^4}{4b^4} \text{ etc. ad 1.}$$
$$\frac{l}{b}-\frac{l^2}{2b^2}+\frac{l^3}{3b^3}-\frac{l^4}{4b^4} \text{ etc. ad 1.}$$

per dicta propositione praecedenti.

11 ipsi l. | posito signum ambiguum $\pm$. significare $+$ (et ejus contrarium $\mp$ significare $-$) *gestr.* | erit *L* 11–13 Erit EP ... h. *erg. L*

13 invento: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXV–CXXX, S. 594 bis 597. 19 propositione praecedenti: s. N. 51 prop. XLII S. 617 Z. 3–8.



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

Ergo Zonae inter se erunt ut hae series divisae per quantitatem communem b. ut reddant series superiores, ac proinde et Logarithmi ut hae series erunt. Porro Zonae $VBEPV$ aequatur Zona conjugata $VADPV$. et Zonae $VBGNV$ Zona conjugata $VAFN$.

---

1 *Daneben, durch Umrahmung ausgegliedert:* $EP \sqcap \dfrac{a^2}{CE \sqcap CB \pm BE}$. $EP \sqcap \dfrac{a^2}{\dfrac{a^2}{CB} \mp AD} \sqcap \dfrac{a^2}{CB \pm BE}$. Erit $\dfrac{CB}{a^2 \mp AD, CB}$ [*bricht ab*]

$DP \sqcap CE \sqcap \dfrac{a^2}{EP} \sqcap$ [*bricht ab*]

Darunter: $DP \sqcap \dfrac{a^2}{\dfrac{a^2}{CB}(\sqcap AV \sqcap CA) \mp AD} \sqcap \dfrac{a^2}{EP}$. $CE \sqcap \dfrac{a^2}{EP}$. $EP \sqcap \dfrac{a^2}{C[E]}$.

2 f. divisae ... superiores *erg. L*

---

1 *Fig. 1*: Die gepunkteten Linien sind in Blindtechnik ausgeführt.

et Zonae $VBLMV$ conjugata $VAHMV$, per prop. ... supra. Ergo et logarithmi dicti, ut hae Zonae conjugatae erunt. Jam Zonae

$$\left.\begin{array}{l} VADPV \\ \\ VAFNV \\ \\ VAHMV \end{array}\right\} \text{ sunt ut series } \begin{array}{l} \frac{d}{1}+\frac{d^2}{2a}+\frac{d^3}{3a^2}+\frac{d^4}{4a^3} \quad \text{etc.} \\ \frac{f}{1}+\frac{f^2}{2a}+\frac{d^3}{3a^2}+\frac{d^4}{4a^3} \\ \frac{h}{1}+\frac{h^2}{2a}+\frac{h^3}{3a^2}+\frac{h^4}{4a^3} \end{array}$$

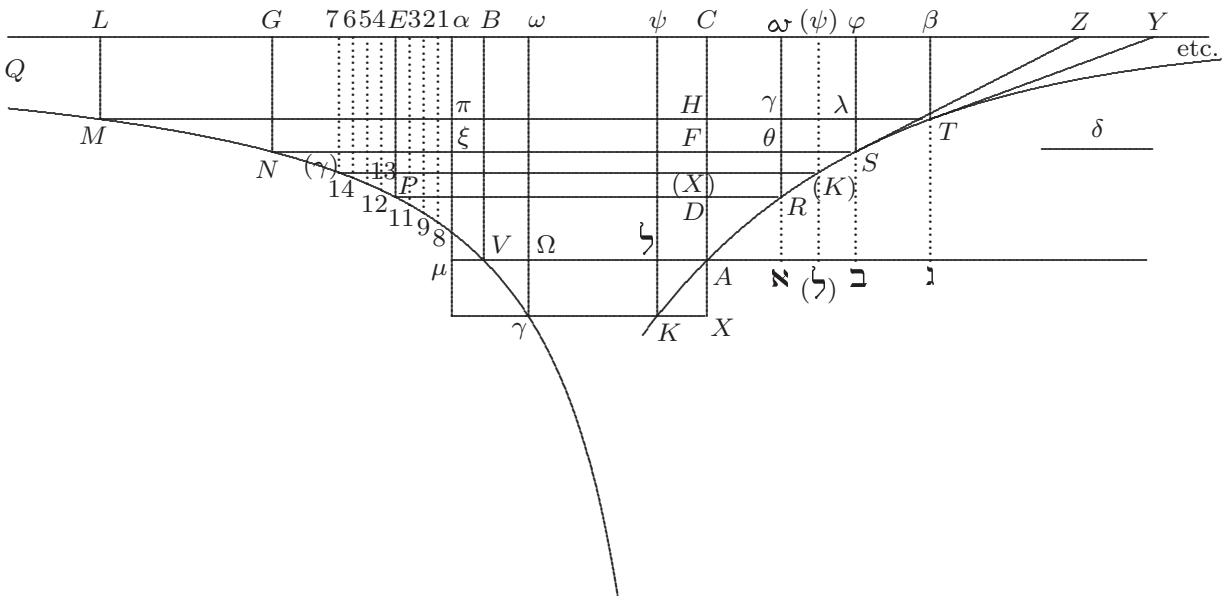
Quod eodem modo ex dictis propositione praecedenti ostendi potest. Ergo logarithmi ut hae quoque series erunt. Unde patet logarithmos numerorum quorundam et numerorum ipsis reciprocorum v. g. logarithmos quoque numerorum 1. 2. 3. et $\frac{ab}{1}.\ \frac{ab}{2}.\ \frac{ab}{3}$ (id est si $ab.$ sit 1. seu si $a.$ aeq. $b.$ aeq. 1 numerorum $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}$) esse eosdem, quia logarithmi numerorum $CE.\ CG.\ CL$ etc. sunt zonae VE, VG, VL, et ipsis reciprocorum $\frac{ab}{VE}.\ \frac{ab}{VG}.\ \frac{ab}{VL}$ sunt ut Zonae $VD.\ VF.\ VH.$ At hae Zonae illis, respondentes respondentibus aequales sunt. Ergo et logarithmi illorum logarithmis numerorum horum.

Si [ponatur] rectangulum $CAVB$, seu $ab.$ esse quadratum, seu a aeq. $b.$ (ubi foret V vertex Hyperbolae), reliqua quae dixi consequentur, quemadmodum et si ponatur a vel $b.$ esse 1.

Sit corpus cylindricum cujus altitudo perpendicularis sit aequalis rectae $AC.$ basis vero (et cui similis et aequalis sectio quaelibet per planum basi parallelum) sit quadrilineum Hyperbolicum $VAHMV$ curva MV, (cujus centrum $C.$ asymptoti normales $CL.$ $CA.$) asymptoti portione $AH.$ et duabus ordinatis asymptoto CL parallelis AV, HM

18 Hyperbolicum *(1)* VACLMV *(2)* VAHMV *L*

1 prop. ... supra: s. N. 20 prop. 16 S. 246 Z. 1–6 und N. 51 prop. XVIII S. 573 Z. 5–11. 6 propositione praecedenti: s. N. 51 prop. XLII S. 617 Z. 3–8. 16 rectae AC: Leibniz hat im Folgenden zunächst die Hyperbelfläche $VACLMV$ betrachtet, dann aber $VAHMV$ als Grundfläche gewählt. Deshalb hätte er als Höhe des Zylinders nun AH statt AC wählen müssen.



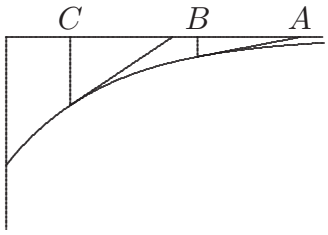
[*Fig. 2*]

comprehensum. Jam per rectam HM aliud transeat planum, plano baseos seminormale, quod corpus cylindricum in duos secabit truncos, vel ungulas, ut P. a S. Vincentio appel-

---

1 *Daneben:* $CD \sqcap d$. CA aequ. a. $a^2 - d^2 \sqcap a \frown a - d$. Ergo $a + d \sqcap a$: quod absurdum.

$\frac{t}{n} \sqcap \frac{d\bar{l}}{d\bar{n}}$. $nd\bar{l} \sqcap CA, d\bar{n}$. Ergo $d\bar{l} \sqcap \frac{CAd\bar{n}}{n}$. Ergo $\frac{t}{\cancel{n}} \sqcap \frac{CA, \cancel{d\bar{n}}}{\cancel{n}, \cancel{d\bar{n}}}$ seu $t \sqcap CA$.

Am Rand: 

2 rectam *(1)* CL *(2)* HM *L*

3–385,1 appellat: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. IX, def. 1, S. 955.

lat; ex quibus inferior ad basin pertinens, componatur ex spatiis $VAHMV$, $VAFNV$, $VADPV$, instar foliorum aut graduum sibi eodem quo vides situ ita superpositis, ut majora sint inferiora, minora sint superiora; utque posito ejusmodi spatia sive folia esse numero infinita, sive intervalla, DF, FH, etc. sint infinite parva, eadem sit foliorum spissitudo sive altitudo gradus cujuslibet qua super proxime inferiorem elevatur, cum duorum horum spatiorum sibi proximorum, intervallo. Cum ergo spatia haec sint ut Logarithmi numerorum CF. CD. CH etc., ungula haec aut portiones ejus quaecunque plano basi parallelo absectae continebunt ordine Logarithmorum summas.

Superior ungula eadem est cum alia quadam inferiore, quae absecaretur ex eodem corpore cylindrico, per planum seminormale, (non ut ante per rectam HM sed) per rectam AV transiens. Itaque duae ungulae semiquadrantales (ut vocat Wallisius) simul sumtae una ex corpore cylindrico absecta a plano seminormale transeunte per HM, altera a plano transeunte per AV. corpus cylindricum componunt. Quae omnia Geometris hodiernis nota sunt. Porro ex invento Torricellii (ubi de dimensione solidi Hyperbolici acuti infiniti) manifestum, et per se demonstratu facile est, Ungulam plano per AV transeunte absectam aequari, parallelepipedo sub quadrato a CA, et altitudine AV; (vel sub potentia Hyperbolae et altitudine CA); demto corpore cylindrico cujus basis idem quadrilineum Hyperbolicum, $VAHMV$ altitudo autem HC. Habemus ergo valorem duarum Ungularum, unius plano seminormali per HM resectae quae aequatur summae Logarithmorum[;] alterius, plano seminormali per AV resectae quae aequatur parallelepipedo, minus Cylindrico cujus basis Quadrilineum propositum, altitudo CH.

---

7 f. Debent CH. CF. CD. ⟨sum.⟩ progressionis.

1 spatiis | VACLMV, *gestr.* | VAHMV *L* 10 rectam *(1)* CL *nicht gestr. (2)* HM *L*

---

11 vocat: J. Wallis, *Mechanica*, 1670–1671, pars 2, S. 547 f. (*WO* I S. 918 f.); dort findet sich auch der folgende Hinweis auf Torricelli. 16 aequari: Richtig wäre $VAHMV \cdot AC - AC^2 \cdot AH$. Das Versehen wirkt sich bis S. 386 Z. 21 aus, wo Leibniz abbricht.

At aliunde scimus ut jam dixi summam duarum ungularum aequari cylindrico hyperbolico, cujus basis idem quadrilineum, altitudo HA. Habebitur ergo aequatio hujusmodi: Sum. Logarithm. + parallelepiped. − quadrilin. in HC. aequal. quadrilin. in AH. vel
$VAHMV$ $VAHMV$

Sum. Log. + Parall. aequal. $VAHMV$ in $\underbrace{AH + HC}_{CA}$. sive Summa logarithmorum aucta numero in Hyperbolae potentiam ducto, aequatur Logarithmo ducto in numerum. Vel ut magis proprie loquamur, quia spatia ut $VAHMV$ non tam logarithmi sunt, quam logarithmis proportionalia: Summa spatiorum Hyperbolicorum Logarithmis proportionalium, aucta parallelepipedo facto ex ultima assumta rectarum numeris proportionalium, in potentiam hyperbolae ducta; aequatur ipsi spatio quod ultimi hujus numeri logarithmo proportionale est in rectam ultimo huic numero proportionalem, ducto: Describatur jam curva quaedam Logarithmica, $ARST$, talis naturae scilicet, ut ordinatae DR. FS. HT. sint Zonis $VADPV$, $VAFNV$, $VAHMV$ proportionales, sive ut rectangulum CA in DR, aequetur Zonae $VADPV$. et rectangulum CA in FS, aequetur Zonae $VAFNV$, et rectangulum CA in HT aequetur spatio $VAHMV$. Ita enim corpus cylindricum cujus basis $AHTA$ figura logarithmica, altitudo CA aequabitur ungulae (ex cylindro cujus basis spatium Hyperbolicum $VAHMV$) plano seminormali per HM abscissae seu summae omnium spatiorum logarithmis proportionalium, ergo in aequatione paulo ante inventa: sum. Log. + Parallelepiped. ex CA in CAV, aequ. CA in $VAHMV$ pro summa Logarithmorum, seu ungula quam dixi substituatur CA in $AHTA$, fiet: CA in $AHTA + CA$ in CAV aequ. CA. in $VAHM$, et demta altitudine communi CA erit $AHTA + CAV$ aequ. $VAHM$. Error in calculo, ita enim spatium $AHTA$ foret nullum; cum $CAV \sqcap VAHM$.

---

21 $\frac{al}{1} + \frac{al^2}{1,2b}$ etc. $\sqcap$ na. Ergo $\frac{l^2a}{1,2[b]} + \frac{al^3}{1,2[,3]b^2}$ etc. $\sqcap$ $\frac{a\int\overline{ndl}}{b}$ et $na - \frac{a\int\overline{ndl}}{b} \sqcap la$. Ergo $nab - a\int\overline{ndl} \sqcap lab$ et $badn - andl \sqcap abdl$ et $dl \sqcap \frac{abdn}{ab+an}$.

---

21 $CAV \sqcap VAHM$: Die Beziehung ist nicht korrekt.

$$\frac{l^1}{1} + \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,\ldots,4b^3} \text{ etc. } \sqcap\, n.$$

$$\frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2[,3]b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3} + \frac{l^5}{1,\ldots,5b^4} \text{ etc. } \sqcap\, \frac{\int \overline{nd\bar{l}}}{b}.$$

Ergo $n - \frac{\int \overline{nd\bar{l}}}{b} \sqcap l$. Ergo $d\overline{n} \sqcap d\bar{l} + \frac{nd\bar{l}}{b}$. Ergo $\frac{bd\overline{n}}{b+n} \sqcap d\bar{l}$.

$$\frac{l}{1} - \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} \text{ etc. } \sqcap\, n.$$

$$\frac{l^2}{1,2b} - \frac{l^3}{1,2[,3]b^2} + \frac{l^4}{1,2,3[,4]b^3} \text{ etc. } \sqcap\, \frac{\int \overline{nd\bar{l}}}{b}.$$

Ergo $n + \frac{\int \overline{nd\bar{l}}}{b} \sqcap l$ et $d\overline{n} + \frac{nd\bar{l}}{b} \sqcap d\bar{l}$. et $bd\overline{n} + nd\bar{l} \sqcap bd\bar{l}$. et $\frac{bd\overline{n}}{b-n} \sqcap d\bar{l}$.

1–4 *Am Rand:*

$$\frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$$

$$\frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} \quad \frac{l^4}{1,2,3,4}$$

$$\frac{b^2}{b+n} \quad \frac{ab}{n+b} \sqcap \frac{ab}{n} - \frac{ab^2}{n^2} + \frac{ab^3}{n^3}$$

$$\frac{ab}{b+x} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{1+9}$$

$$\frac{b}{b+n} \sqcap \frac{\frac{ab}{b+n}}{\frac{ab}{b}} \sqcap \frac{\frac{1}{b+n}}{\frac{1}{b}}$$

$$\frac{ab}{b+n} \sqcap a- \text{ [bricht } ab]$$

$$\frac{ab}{\overline{b+n}+a+x}$$

$$b - \frac{b^2}{b+n} \sqcap \frac{nb}{b+n} \qquad b \sqcap \frac{nb}{b+n}$$

Sit $cd\overline{n}$ aeq. a. sitque ab. potentia Hyperbolae, erit $\frac{ab}{b-n} \sqcap y$. Sit $CA \sqcap b$. et $AH \sqcap n$. erit $CH \sqcap b-n$. et $HM \sqcap \frac{ab}{b-n}$. Jam regrediamur: $\frac{abd\overline{n}}{b-n} \sqcap yd\overline{n}$ aeq. $ad\overline{l}$, sive in spatium Hyperbolicum $VAHM$, ducatur recta AH. vel rectangulum erectum VAC, baseos CA, altitudinis VA, solidum generatum per plana basi perpendicularia sectum constabit ex prismatibus, quorum altitudo communis AV, bases exigua quadrilinea, $NFHMN$, $PDFNP$, seu differentiae logarithmorum proximorum, posito HF, FD, etc. esse infinite parvas; quoniam vero in infinite parvis, quadrilinea haec a rectangulis HFN, FDP, non differunt, rectangula autem haec fiunt ex ordinata Hyperbolae in ipsas HF, vel FD, differentias numerorum. Hinc habetur aequatio inter ordinatas Hyperbolae in differentias numerorum, et inter differentias logarithmorum. Sed res rectius ab initio ita repetetur.

Quadratura figurae Logarithmicae infinitae et portionum finitarum absoluta et geometrica, sine supposita logarithmorum constructione.

Constructio autem haec est: Centro C. asymptotis CL. CA. normalibus per punctum V descripta intelligatur Hyperbola $VPNM$, cujus ordinatae AV, DP, FN, HM. etc. Zonae Hyperbolicae $VADPV$, $VAFNV$, $VAHMV$, logarithmis DR, FS, HT proportionales sunt ut constat; ponantur autem ita esse proportionales, ut Zonae sint aequales rectangulis sub logarithmis respondentibus, et altitudine communi AV, exempli causa, ut VA in DR, aequetur Zonae $VADPV$, et ita in caeteris. Ergo differentiae Zonarum seu quadrilinea exigua, ut $PDFNP$, $NFHMN$, etc. aequabuntur differentiis logarithmorum in VA ductis. Ponantur jam hae differentiae Zonarum seu quadrilinea exigua esse infinite parva, quod fiet si differentiae numerorum DF, FH, infinite parvae sint; patet (et

11–13 Logarithmicae | infinitae ... constructione *erg.* | *(1)* regula haec est: Sint primum numeri CD, CF, CH, eorumqve Logarithmi DR, FS, FT, et per puncta R. S. T. aliaqve intermedia transeat curva Logarithmica ARST etc. ajo spatium quadrilineum ACβTA, duobus numeris assumtis primo CA, et novissimo βT (vel CH), asymptoto Cβ (asymptoton enim habere manifestum est), ac curva AT comprehensum esse aequale rectangulo ACγ sub numero primo CA, et Cγ, differentia numeri novissimi $\beta\gamma$ vel βT vel CH, a suo logarithmo Cβ vel HT. Numerum autem primum hic voco, ut CA, eum cuius logarithmus hoc loco assumtus est infinite parvus sive nullus, ita ut in A curva axem secet. *(2)* Constructio L

11 f. Quadratura ... constructione: vgl. N. 51 prop. XLVI S. 634 Z. 7–11.

facile demonstrari posset) pro his quadrilineis exiguis DN, FM assumi posse rectangula FDP, HFN, rectangula ergo haec differentiis logarithmorum in VA ductis aequantur; exempli causa rectang. FDP, rectangulo VA in θS[,] erunt enim θS et similes, etiam infinite parvae. Fiunt autem haec rectangula FDP, HFN etc. ex ordinatis Hyperbolae, in differentias numerorum, et ordinatae Hyperbolae, DP, FN, etc. fiunt ex potentia Hyperbolae seu rectangulo CAV, diviso per numeros, CD, CF etc., exempli gratia DP aequ. $\frac{CA \text{ in } AV}{CD}$. et rectang. FDP. aequ. $\frac{CA \text{ in } AV \text{ in } FD}{CD}$. at idem aequ. AV in θS demtaque communi altitudine AV erit $\frac{CA \text{ in } FD}{CD}$ aequ. θS. vel CA in FD, aequ. CD in θS, vel aequ. CF in θS, quoniam inter CF et CD, differentia FD est infinite parva adeoque negligi potest. Ergo si $A\mu$ (aequ. CA), in CA ducatur seu describatur quadratum $CA\mu$ ut sint ξF, πH, etc. ipsi CA aequales erit rectangulum ξFD (id est CA in FD) aequ. rectangulo $\varphi S\theta$, (seu CF in θS) eodem modo ostendetur rectangulum πFH aequale rectangulo $\beta T\lambda$. et ita porro, adeoque semper rectangulum πHD, aequabitur spatio $T\beta\omega RT$, et rectangulum πHA sive μAH, aequabitur spatio ab una parte (in A) completo $T\beta CAT$; ac denique ipsum totum rectangulum μAC, id est quadratum ab AC, aequabitur spatio utrinque completo, seu spatio ab una parte in punctum desinente, ab altera parte infinito, AC etc. A. Eadem demonstratio habebit locum etiam cum curva Logarithmica TA postquam CDA in qua numeri sumuntur secuit in A[,] in alteram progreditur partem ut in K. posito KX logarithmo numeri CX. erit enim rectangulum μAX aequale spatio $AC\psi KA$. Concludemus ergo generaliter: Rectangulum πHX sub CA numero primario (id est illo cujus Logarithmus positus est 0) et HX, duorum numerorum extremorum ψK, βT differentia, comprehensum; aequari spatio Quadrilineo $T\beta\psi KT$, asymptoti portione $C\beta$, (seu HT logarithmo numeri βT) arcu curvae KT, et duobus numeris extremis βT, ψK, contento. Q. E. D.

Scholium

Ingens est consensus inter dimensionem figurae numerorum ad logarithmos applicatorum, seu Logarithmicae, et figurae sinuum ad arcus applicatorum. Utriusque enim area perpetuo rectangulo sub recta quadam constante, ducta in altitudinem, aequalis est[;] quae recta constans hic est numerus primarius aut si placet unitas assumta; in fi-

3 f. exempli ... parvae *erg. L* 25 f. Scholium *(1)* Mag *(2)* Ingens *L*

gura Sinuum vero radius Circuli generatoris: Caeterum figuram Logarithmicam hactenus quod sciam quadravit nemo.

Possem ejus tangentes definire, aliaque multa singularia circa tanti momenti curvam annotare, nisi ad rem tantum pertinentia dicere constituissem. Nam abstinuissem hac quoque propositione utcunque pulcra, nisi ad sequentia demonstranda, et regulam Logarithmorum inversam, id est inventionem numeri ex dato Logarithmo, demonstrandam conferre animadvertissem.

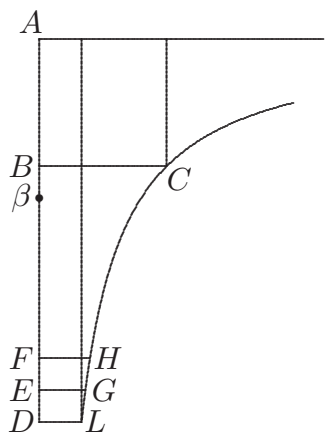
Ex datis Logarithmis invenire Numeros sine Tabulis.

Regula haec est[:] Sit Unitatis Logarithmus 0, numerique quaesiti logarithmus datus Unitate minor sit l.

n aequ. $\frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} + \frac{l^4}{1,2,3,4}$ etc. eritque numerus quaesitus $1+n$. vel $\frac{1}{1+n}$.

Vel iisdem positis fiat n aequ. $\frac{l}{1} - \frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} - \frac{l^4}{1,2,3,4}$ etc. eritque numerus quaesitus $1-n$ vel $\frac{1}{1-n}$.

[*Notiz am Papierrand*]



[*Fig. 3*]

$AB \sqcap b$. $BD \sqcap n$. $B\beta \sqcap \beta$. $AD \sqcap d$.

8 Ex ... Tabulis: vgl. N. 32 S. 373 Z. 1–5 sowie N. 51 prop. XLVII S. 638 Z. 11–18.

$$\frac{\boxed{2}\,\omega}{AB+\beta}+\frac{\boxed{2}\,[\omega]}{AB+2[\beta]}+\frac{\boxed{2}\,[\omega]}{AB+3[\beta]}\ \text{etc.}\ [\sqcap]\ \begin{array}{llll} +\dfrac{\omega^2}{b} & -\dfrac{\beta\omega^2}{b^2} & +\dfrac{\omega^2\beta^2}{b^3} & \text{etc.} \\ +\dfrac{\omega^2}{b} & -\dfrac{2\beta\omega^2}{b^2} & +\dfrac{4\omega^2\beta^2}{b^3} & \\ +\dfrac{\omega^2}{b} & -\dfrac{3\beta\omega^2}{b^2} & +\dfrac{9\omega^2\beta^2}{b^3} & \\ \hline \dfrac{\omega^2}{b}n & -\dfrac{\omega^2 n^2}{2b^2} & +\dfrac{\omega^3 n^3}{3b^3} & \end{array}$$

ubi si n. major quam b. series non est decrescens. $EG \sqcap \dfrac{\omega^2}{d-\beta} \sqcap \dfrac{\omega^2}{d}+\dfrac{\omega^2\beta}{d^2}+\dfrac{\omega^2\beta^2}{d^3}$ etc.

$\dfrac{d}{c-d}-\dfrac{d}{c}$ aeq. $\dfrac{dc-cd+d^2}{c^2-dc} \sqcap \dfrac{d^2}{c^2-d^2}$. $\dfrac{d^2}{c^2-d^2}-\dfrac{d^2}{c^2} \sqcap \dfrac{d^4}{c^4-d^2}-\dfrac{d^3}{c^3} \sqcap d^4c^3-c^4d^3+d^5 \smile c^7-c^3d^2$.

$$\begin{array}{r} 8 \\ \underline{8} \\ 64 \\ \underline{2} \\ 128000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4000 \\ 4 \\ \underline{4} \\ 64 \\ \underline{2} \\ 128000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20000 \\ \underline{4} \\ 8 \\ 16 \\ \underline{16} \\ 96 \\ \underline{16} \\ 2560000 \\ \underline{.\ 3.} \\ 7710000 \end{array}$$

6 $\dfrac{d^2}{c^2-d^2}$: Richtig wäre $\dfrac{d^2}{c^2-dc}$. Leibniz rechnet konsequent und teilweise fortlaufend weiter; ein weiterer Rechenfehler kommt hinzu.

$c \sqcap 200,00,000.\ d \sqcap 512829.\ e \sqcap 19487171.\ \dfrac{2ed-d^2}{2e^2}.\ e \sqcap c-d.$ fiet $\dfrac{2cd-3d^2}{2c^2-4cd+2d^2}.$

$$
\begin{array}{rr}
 & 512829 \\
 & \underline{512829} \\
 & 4615461 \\
 & 1025658 \\
 & 4102632 \\
 & 1025658 \\
 & 512829 \\
 & \underline{2564145} \\
d^2 & 262993583241 \\
 & \underline{2} \\
2d^2+ & 525987166482 \\
2c^2+ & \underline{800000000000000} \\
-4cd & \underline{41026320000000} \\
\underbrace{2c^2-4cd+2d^2}_{2e^2} \sqcap & \underline{759499667166482} \\
 & \\
+2c \sqcap & 40000000 \\
-3d & \underline{1538487} \\
 & 38461513 \\
 & \\
+2cd \sqcap & 2\dot{0}\dot{5}\dot{1}\dot{3}16000000 \\
-3d^2 & \underline{788980749723} \\
 & 1262336250276
\end{array}
$$

1 19487171: Leibniz berechnet den Wert in N. 43 S. 448 Z. 8–20. 19 $2\dot{0}\dot{5}\dot{1}\dot{3}16000000$: Der Wert ist um eine Zehnerpotenz zu niedrig; Leibniz rechnet konsequent weiter.

35. DE INVENTIONE LOGARITHMORUM SINE TABULIS. DE INVENTIONE SINUS EX ARCU

[Juli – 24. August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 109–110. 1 Bog. 2°. Eine Vorstufe von Fig. 3 auf Bl. 110 r° wird in prop. XLVIII von N. 51 verwendet.
Cc 2, Nr. 1461

Datierungsgründe: N. 35, welches N. 34 inhaltlich fortsetzt, ist nach prop. XXV und XXIX von N. 51 geschrieben und enthält Vorstufen für N. 51 prop. XLVII und prop. XLVIII. Letztere geht wie die entsprechende erste Fassung in N. 51 von der Formel für die Berechnung des Sinus aus dem Bogen aus und ist damit vor N. 37 entstanden, welches der zweiten Fassung von N. 51 prop. XLVIII nahesteht. Die Verwendung des Näherungswerts 0,314 für $\frac{\pi}{10}$ im vorliegenden Stück einerseits und die sukzessive Verbesserung der Näherung über 0,3141 zu 0,314159 in N. 36_2 andererseits spricht dafür, dass N. 35 vor N. 36_2 anzusiedeln ist.

Ex datis Numeris invenire Logarithmos,
et vicissim ex datis Logarithmis Numeros, sine Tabulis.

Regula autem haec est: Sit Logarithmus unitatis 0. et numerus datus sit $1+n$ vel ejus reciprocus $\frac{1}{1+n}$ ejusque logarithmus quaesitus l; fiat l aequ. $\frac{n}{1}-\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n^4}{4}$ etc. vel posito $1-d$ aequ. $\frac{1}{1+n}$ (id est d aequ. $\frac{n}{1+n}$) fiat l aequ. $\frac{d}{1}+\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}+\frac{d^4}{4}$ etc.

Iisdem positis sit Logarithmus datus l. et numerus quaesitus $1+n$ vel ejus reciprocus $\frac{1}{1+n}$, fiat n aequ. $\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1,2}+\frac{l^3}{1,2,3}+\frac{l^4}{1,2,3,4}$ etc. sive $\frac{l}{1}+\frac{l^2}{2}+\frac{l^3}{6}+\frac{l^4}{24}$ etc. vel etiam posito $\frac{1}{1+n}$ aequ. $1-d$, id est posito numero $1-d$, vel ejus reciproco $\frac{1}{1-d}$, fiat d aequ. $\frac{l}{1}-\frac{l^2}{1,2}+\frac{l^3}{1,2,3}-\frac{l^4}{1,2,3,4}$.

Oportet autem tam n, cum quaeritur logarithmus; quam l cum quaeritur numerus, esse unitate minorem. Quod semper effici potest.

14 f. Ex ... Tabulis: vgl. N. 51 prop. XLIV S. 631 Z. 1–9 und prop. XLVII S. 638 Z. 11–18.

Prior regulae pars, qua ex dato Numero invenitur Logarithmus jam ostensa est prop. ... Posterior nunc demonstranda est. Quod ita fiet:

Sit curva $ARST$. cujus punctis relatis ad axem Aגבא per ordinatas Rא, Sב, Tג, ea sit proprietas, ut ordinata, veluti Aג posita l, ordinata respondens, veluti Tג, quam vocabimus d, sit, $\frac{l}{1} - \frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} - \frac{l^4}{1,2,3,4}$ et unitate μA aequ. $AC_{[,]}$ ajo curvam $ARST$, esse Logarithmicam. Erit per p r o p. 2 5 area spatii AגTA, seu summa rectangulorum Tבג, Sאב, etc. aequal: $\frac{l^2}{1,2} - \frac{l^3}{1,2,3} + \frac{l^4}{1,2,3,4} - \frac{l^5}{1,2,3,4,5}$ etc. Nam summa abscissarum ipsismet abscissis applicatarum, seu trianguli cujus altitudo et basis est maxima abscissarum, l, est $\frac{l^2}{2}$. Summa quadratorum ab abscissis, ipsimet abscissis applicatarum, seu area trilinei parabolici concavi, cujus altitudo l, basis l^2, est $\frac{l^3}{3}$. Ergo summa omnium

---

7–395,8 *Am Rand:*

$$a\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{array}{l} c \\ d \\ e \\ f \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} c\left\{\begin{array}{l} g \\ h \end{array}\right. \\ l\left\{\begin{array}{l} m \\ n \\ . \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Darunter:

$$\underbrace{\overset{4}{\widehat{1.1.1.1}} + \overset{2}{\widehat{1.1}}} \sqcap \underbrace{\overset{6}{\widehat{1.1.1.1.1.1}}}$$

---

1 f. prop. ... : s. N. 34 S. 380 Z. 10 – S. 383 Z. 12. 3 curva $ARST$: s. N. 34 Fig. 2 S. 384 Z. 1.
6 p r o p. 2 5 : N. 51 prop. XXV S. 587 Z. 11–14.

quadratorum per $1,2.$ divisorum, est $\frac{l^3}{3}$ per $1,2$ divis. seu $\frac{l^3}{1,2,3}$. vel $\frac{l^3}{6}$. et ita porro, parametro scilicet semper posito 1. Jam $\frac{l^2}{1,2} - \frac{l^3}{1,2,3} + \frac{l^4}{1,2,3,4} - \frac{l^5}{1,2,3,4,5}$ area spatii inventi $A\lambda TA$ auferatur ab $\frac{l}{1}$ ipso scilicet rectangulo sub $A\lambda$ (aequ. $\frac{l}{1}$) et unitate CA, fiet $\frac{l}{1} - \frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} - \frac{l^4}{1,2,3,4} + \frac{l^5}{1,2,3,4,5}$ etc. id est fiet d. seu fiet rectangulum μAH sub unitate μA et AH vel $T\lambda$ vel d. Curva ergo proposita talis est naturae, ut perpetuo si spatium trilineum $A\lambda TA$, auferas a rectangulo $CA\lambda$ residuum aequetur rectangulo μAH. Hoc autem residuum est spatium quadrilineum $T\beta CAT$, erit ergo p e r p e t u o spatium $T\beta CAT$ aequale rectangulo μAH. Id vero contingit, si curva $ARST$ sit Logarithmica, quemadmodum demonstratum est p r o p. p r a e c e d . Et nunquam in curva alia, ut examinanti demonstrationem patebit, quoniam omnes in ea adhibitae propositiones sunt convertibiles. Ergo curva $ARST$. Logarithmica est. Eadem est demonstratio

---

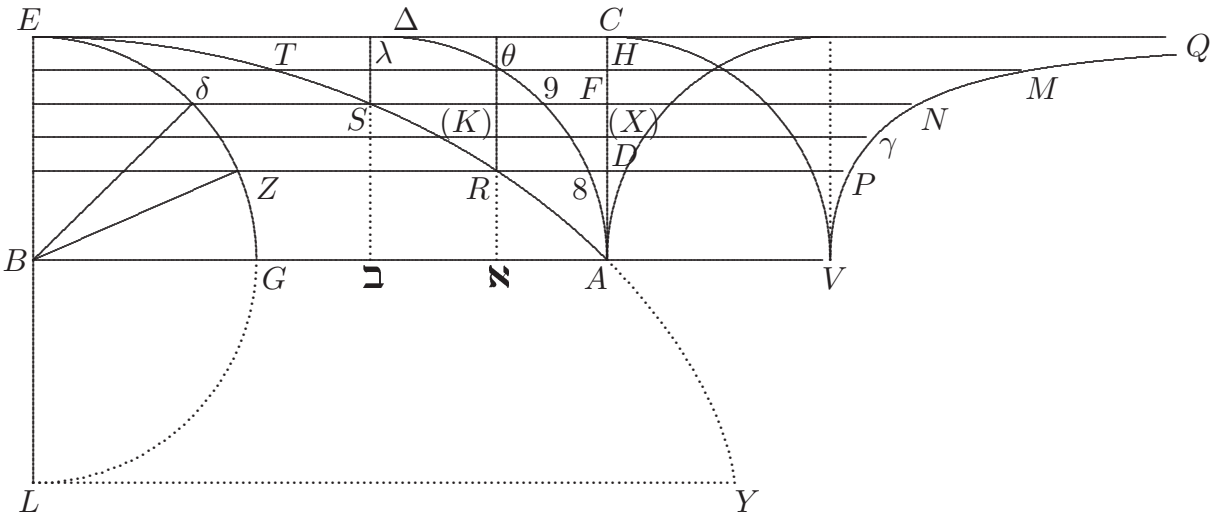
11–396,6 *Am Rand:*

$$\begin{array}{r} 256 \\ \underline{4} \\ 1024 \\ \underline{4} \\ 4094 \\ \underline{4} \\ 16376 \\ \underline{4} \\ 65504 \\ \underline{4} \\ 262016 \\ 262016 \\ \underline{8} \\ 2,000,000 \end{array}$$

---

9 p r o p. p r a e c e d .: s. N. 34 S. 388 Z. 11 – S. 389 Z. 24. 17 4094: Richtig wäre 4096; Leibniz rechnet konsequent weiter.

si aequatio sit n aequ. $\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1,2}+\frac{l^3}{1,2,3}+\frac{l^4}{1,2,3,4}$ etc. posita Aל, l. et לK, n. Spatium enim AלKA erit $\frac{l^2}{1,2}+\frac{l^3}{1,2,3}+\frac{l^4}{1,2,3,4}+\frac{l^5}{1,2,3,4,5}$ etc. Quod si addatur ad $\frac{l}{1}$, seu ad rectangulum CAל (ex Aל aequal. l et CA aequal. 1), fiet spatium $K\psi CAK$ aequal. $\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1,2}+\frac{l^3}{1,2,3}+\frac{l^4}{1,2,3,4}+\frac{l^5}{1,2,3,4,5}$ etc. seu aequal. n. in 1. sive fiet semper spatium $K\psi CAK$ aequale rectangulo μAX ex AX aequ. n. in μA aequal. 1. Quod etiam in curva Logarithmica et sola quidem, obtinere ex prop. praecedenti patet. Ergo jam si Aג sit Logarithmus, tum CH vel βT, erit numerus ut ex praecedentibus constat, est autem CH aequ. $CA-AH$, seu $1-d$. ergo si l sit logarithmus et d. aequal. $\frac{l}{1}-\frac{l^2}{1,2}+\frac{l^3}{1,2,3}-\frac{l^4}{1,2,3,4}$ etc. erit numerus $1-d$. Eodem modo si Aל sit logarithmus, tunc ψK vel CX erit numerus. Est autem CX aequ. $CA+AX$, seu $1+n$. Ergo si l sit logarithmus et n aequ. $\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1,2}+\frac{l^3}{1,2,3}+\frac{l^4}{1,2,3,4}$ etc. erit numerus $1+n$. Q. E. D.



[*Fig. 1*]

12 *Fig. 1*: Leibniz hat nachträglich nur im Text die ursprünglich verwendeten Punktbezeichnungen μ und π durch 8 bzw. 9 ersetzt. Dies ist in der Figur berücksichtigt.

Si arcus sit a. radius r. et sinus, s. erit s aequal. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3r^2} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^4} - \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^6}$ etc. seriei decrescenti.

Sive centro A semicirculo EGL basi seu plano LY, descripta sit semicycloeides curva, EAY. Ducatur BGA per centrum B, quadranti EG occurrens in G, et cycloidi curvae in A. ducantur et AC, aequalis et parallela EB, et EC aequalis et parallela BA. et BA continuetur in V, donec fiat AV, aequal. AC vel EB vel BG, super CAV, describatur alius quadrans $CAVC$. aequalis et similis quadranti $EBGE$, et ad hunc constituatur figura angulorum $VP\gamma Q$ etc. ad modum p r o p. 1 4 . Ex qua patet spatia ut $VADPV$, $VAFNV$ etc. aequari [duplis] sectoribus $ZBGZ$, $\delta BG\delta$ etc. Porro ad CA, $C\Delta$ aequales constituatur rursus arcus quadrantis sed concavus, $\Delta 98A$, rectas DR, FS secans in 8, 9. patet fore $Z8$, $\delta 9$ semper aequales GA. seu arcui EG. At ZR, δS aequantur arcubus EZ, $E\delta$. ergo $R8$, $S9$, aequantur arcubus, GZ, $G\delta$. Ergo rectangula CA in $R8$, CA in $S9$ aequantur [duplis] sectoribus $ZBGZ$, $\delta BG\delta$ adeoque et spatiis figurae angulorum $VADPV$, $VAFNV$.

Ajo naturam curvae Cycloeidis esse hujusmodi, ut arcu ZG seu $A8$ posito a. et AD sinu hujus arcus, posito s. et CA radio posito r. sit s aequ. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3r^2}$ etc. ut dictum est.

Quodsi malimus omissa cycloide, Curvam ARS esse lineam sinuum, ita ut non ut ante $8R$, sed ipsa DR vel $A\aleph$, sit arcui ZG vel $A8$ aequalis tunc patet arcubus $A\aleph$ (seu

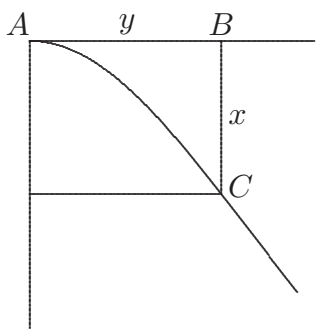
18–398,8 *Am Rand:*

1 f. Si . . . decrescenti: vgl. erste Fassung von N. 51 prop. XLVIII S. 642 Z. 13–15. 8 p r o p. 1 4 : N. 51 prop. XIV S. 553 Z. 13 – S. 554 Z. 4.

GZ), Aב (seu $G\delta$) applicatos esse sinus Rא (seu AD) Sב (seu AF). Ajo arcubus sive Aא, Aב abscissis positis a, sinubus sive Rא, Sב ordinatis positis s. fore aequationem naturam curvae exprimentem hanc, s aequ. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3,r^2}$ etc. ut dixi. Ad hujus ergo propositionis demonstrationem utar potius curva sinuum, omissa jam cycloide, quam comparationis tantum causa introduxi. Demonstratio haec est:

Esto curva quaedam ARS. hujus naturae ut abscissis Aב positis a, ordinatis Sב positis s, et parametro seu recta constanti r. vel CA. sit s aequal. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3r^2} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^4}$ etc.

Erit per prop. 25. ad modum prop. 29. demonstratam, summa omnium ordinatarum a puncto A, ad ultimam Sב usque, seu spatium AבSA, aequal. $\frac{a^2}{1,2} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^2} + \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^4}$ etc. et summa summarum seu summa spatiorum AאRA, aliorum inde a puncto A, usque ad ultimum AבSA, quae solidum ungulare constituunt, ut notum



$x \sqcap \frac{2ay^2}{a^2+y^2}$. $a^2x + y^2x \sqcap 2ay^2$ fiet: $a^2x + y^2x \sqcap 4ayt - 2ytx$ et $t \sqcap \frac{a^2x+y^2x}{4ay-2yx}$ et $\frac{t}{x} \sqcap \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} \sqcap \frac{a^2\cancel{x}+y^2\cancel{x}}{4ay-2yx,,\cancel{x}}$. Ergo $4a\cancel{y} - 2\cancel{y}x \sqcap \boxed{a^2+y^2} \sqcap 2ay^{\cancel{2}}$. $4a - 2x \sqcap 2ay$ et $x \sqcap 2a - y \sqcap 2ay^2 \smile a^2 + y^2$.

9 per ... demonstratam: N. 51 prop. XXV S. 587 Z. 11–14 und XXIX S. 595 Z. 3–7.

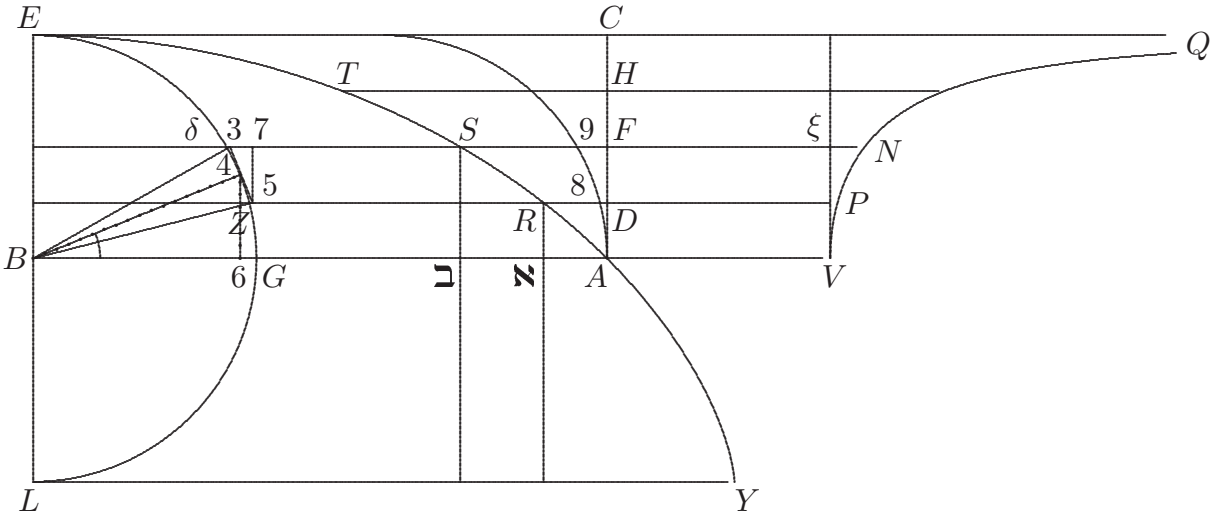
15 $4a\cancel{y} - 2\cancel{y}x \sqcap$: Auf der rechten Seite fehlt der Faktor $\frac{x}{t}$; Leibniz rechnet konsequent weiter.

est[,] aequal. $\frac{a^3}{1,2,3} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^2} + \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^4}$ etc. Quod solidum scilicet abscinderetur ex cylindro cujus basis et sectio quaelibet basi parallela AבSA altitudo, r seu CA; per planum quod transiens per Sב angulum ad planum AבS faceret semirectum, quod solidum idem est cum momento figurae AבSA ex basi Sב, vel ut axe aequilibrii ponderata. Dividatur hoc solidum per r^2, quadratum a radio CA, fiet $\frac{a^3}{1,2,3r^2} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^4} + \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^6}$. Quod productum si auferatur ab $\frac{a}{1}$ proveniet eadem series, quam paulo ante ipsi s. ordinatae tribuimus. Ergo si abscissa minuatur summa summarum ordinatarum s per quadratum parametri constantis r. divisa, residuum ipsi ultimae ordinatae aequatur.

Hoc vero in figura sinuum qualem descripsimus locum habere ita ostendetur: $Z\delta$. (sive בא) differentia arcuum GZ $G\delta$, ponatur esse infinite parva, tunc ejus loco adhiberi poterit 35 latus cujusdam polygoni circumscripti infinitanguli seu portio tangentis inter easdem parallelas DZ, $F\delta$ comprehensa ut ex Archimede et maxime ex hodiernis Geometris notum est. Tangat autem arcum $Z\delta$ in 4. ducatur $B4$ radius, et 46. sinus arcus $G4$. demittatur in $B6G$. et ex 5 erigatur 57 aequal. DF. Ob angulos $46B$ et 375 et $B43$

1 etc. *(1)* dividatur hoc solidum per r^2, quadratum a radio CA, fiet $\frac{a^3}{1,2,3r^2} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^4} + \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^6}$. Qvod productum si auferatur ab $\frac{a}{1}$ proveniet eadem series, quam paulo ante ipsi s. ordinatae tribuimus. Ergo si abscissa minuatur summa summarum ordinatarum per quadratum parametri constantis r. divisa residuum ipsi ultimae ordinatae aequatur. Haec autem summa summarum ut dixi et notum est, constituit solidum ungulare. Qvod scilicet abscinderetur ex cylindro cuius basis et sectio qvaelibet basi parallela AבSA, altitudo r. seu CA, per planum qvod transiens per Sב angulum ad planum AבS faceret semirectum, vel qvod idem est summa summarum ordinatarum, aeqvatur momento figurae AבSA ex basi Sב velut axe aequilibrii ponderata. figura ergo proposita eius est naturae, ut perpetuo abscissa maxima seu altitudo momento figurae ex basi, diviso per qvadratum parametri aeqvetur ultimae ordinatae seu basi. vel qvod idem est. *(2)* Qvod *L* 12 35 ... seu *erg. L*

13 ex Archimede: Archimedes, *Dimensio circuli*, prop. I. 13 f. ex ... Geometris: z. B. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667.



[*Fig. 2*]

rectos, angulumque $B46$ eundem cum angulo $F35$ erunt triangula 375, $B64$ aequiangula, ac proinde similia, et rectangulum $B4$ (id est AC id est ξF) in 57 (sive DF) aequale rectangulo 46 (id est Rא neque enim nisi infinite parvo differunt intervallo;) in 35, (vel בא quia recepto jam inter Geometras more pro arcu $Z\delta$ seu בא sumsimus rectam 35 positis omnibus infinite parvis). Ergo erit rectangulum ξFD, aequale rectangulo Rבא seu quod idem est (ob differentiam infinite parvam) Zonae quadrilineae exiguae RבאSR, cumque

1 Deberet Rא vel Sב repraesentari ut linea notabilis, ut et Aא, Aב sed בא et diff. inter Rא et Sב, sive FD ut infinite parvae. בא circiter ut 35.

2 triangula *(1)* 573 *(2)* 375 *L*

1 *Fig. 2*: Leibniz skizziert für $ETSRAY$ erneut eine Zykloide und nicht, wie vorausgesetzt, eine Sinuskurve. 2 375: Leibniz führt die Änderung von 573 zu 375 (s. Lesart) im Folgenden nicht weiter aus. Deshalb setzt er irrtümlich das Rechteck $B4 \cdot 57$ gleich $46 \cdot 35$ statt $B6 \cdot 35$, argumentiert aber konsequent weiter.

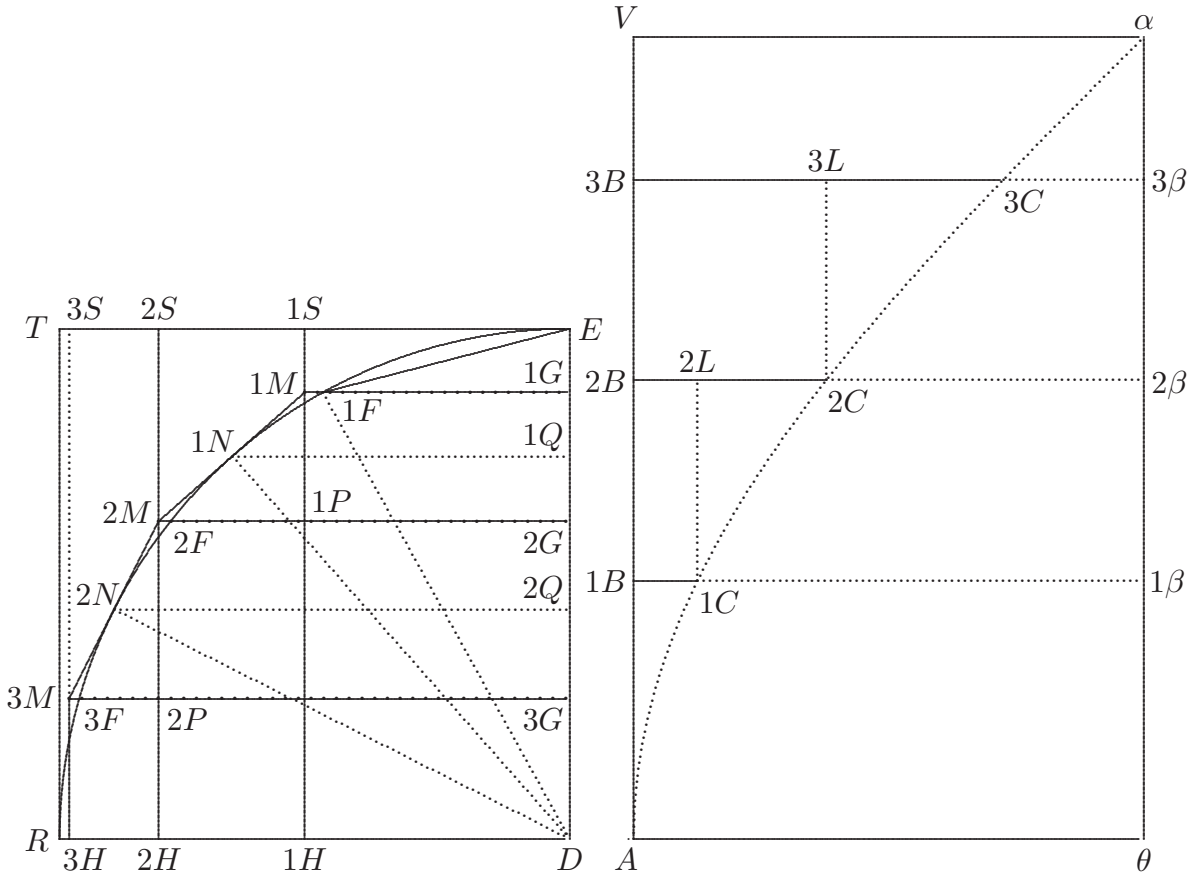
id ubique fiat, erit spatium $A\beth S$ semper aequale rectangulo ξFA, vel VAF, et eodem modo spatium $A\aleph RA$ aequale rectangulo VAD. Unde pulcherrima apparet harmonia inter quadraturam figurae logarithmicae, et figurae sinuum seu (ut rectius appellaretur,) arcuum, utraque enim absolute geometrica est, nec inventione arcus aut logarithmi indiget; utraque rectangulo ubique respondente peragitur, eo tantum discrimine, quod hic spatia convexa seu infra curvam ARS, illic concava seu supra curvam mensurantur. Quoniam ergo spatia hic ut dixi ubique rectangulis aequantur, etiam summa spatiorum $A\aleph R$, $A\beth S$, etc. ab A usque ad $S\beth$, aequabitur summae rectangulorum VAD, VAF, seu ungula abscissa a cylindro cujus altitudo aequalis AC, basis $A\beth SA$, plano seminormali ad planum paginae; per $S\beth$ transeunte; aequabitur ungulae abscissae a cylindro cujus altitudo AC, basis rectangulum VAF, plano seminormali ad planum paginae, per $F\xi$ transeunte, quod solidum ungulare, est ejus cylindri dimidium, seu dimidium facti ex rectangulo VAF in altitudinem CA, id est (quia CA aequ. AV) dimidium facti ex AF in semiquadratum ab AC.

7–14 *Am Rand:*

$$\begin{array}{llll}
1 & -\dfrac{a^2}{1,2} & +\dfrac{a^4}{1,2,3,4} & -\dfrac{a^6}{1,2,3,4,5,6} \\[2ex]
\dfrac{a}{1} & -\dfrac{a^3}{1,2,3} & +\dfrac{a^5}{1,2,3,4,5} & -\dfrac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7} \\[2ex]
\dfrac{a^2}{1,2} & -\dfrac{a^4}{1,2,3,4} & +\dfrac{a^6}{1,2,3,4,5,6} & -\dfrac{a^8}{1,2,3,4,5,6,7,8}
\end{array}$$

14 *Darunter:* $\int \overline{d\bar{a}v} \sqcap$ segm. $\sqcap \mathfrak{o}$. $\int \overline{ad\mathfrak{o}} \sqcap \int \overline{ad\bar{a}v}$. $d\bar{a}v \sqcap d\overline{\mathfrak{o}}$. Ergo vel $v \sqcap \dfrac{d\overline{\mathfrak{o}}}{d\bar{a}}$ vel $a \sqcap \int \overline{\dfrac{d\overline{\mathfrak{o}}}{v}}$. $\int \overline{d\bar{a}v} \sqcap \mathfrak{o}$.

20 $\sqcap \mathfrak{o}$ | $\sqcap \int \overline{\mathrm{td\bar{v}}}$ Ergo $\mathrm{d\bar{a}v} \sqcap \mathrm{td\bar{v}}$. et $\dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{da}} \sqcap \dfrac{\mathrm{v}}{\mathrm{t}}$ et $\mathrm{a} \sqcap \int \overline{\dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{v}}\mathrm{d\bar{v}}}$ positis v arithmeticis *gestr.* | *L*



[*Fig. 3*]

1 *Darüber:*

$$E1F \text{ aequ. } A1B$$
$$E2F \text{ aequ. } A2B$$
$$1B1C \text{ aequ. } E1G$$
$$2B2C \text{ aequ. } E2G$$

Zum rechten Teil der Figur: Figur umbzukehren.

1 *Fig. 3*: Die Figur geht aus der als Fig. 15 in der ersten Fassung von prop. XLVIII in N. 51 Fig. 15a S. 643 Z. 1 verwendeten Vorstufe durch Umkehrung der Punkte auf dem Kreisbogen (Übergang von sinus complementi zu sinus versus) hervor. Leibniz hat dabei den Verlauf der Kurve $A1C2C3C\alpha$ nicht entsprechend geändert. Dies ist in der Figur korrigiert worden. 7 *Figur umbzukehren*: vgl. Endfassung von prop. XLVIII in N. 51 S. 652 Z. 1.

$a^4 - 12r^2a^2 \sqcap 24vr^3$ posito arcu a, sinu verso v. fiet: $a^4 - 12r^2a^2 + 36r^4 \sqcap 36r^4 + 24vr^3$. fiet: $6r^2 - a^2 \sqcap 2r\sqrt{9r^2 + 6vr}$. et $a^2 \sqcap 6r^2 - 2r\sqrt{3r, r + 2v}$, seu posito $r \sqcap 1$. erit $a^2 \sqcap 6 - 2.\sqrt{3 + 6v}$.

[*Erster Ansatz*]

Peripheria [$\sqcap$] 22. diam. 7. Ergo periph. [$\sqcap$] 44. rad. 7. πperiph. $\sqcap$ rad. $\frac{44}{7}$.

1
~~342~~
~~2520~~ $\int$ 57 : $\frac{6}{22}$. Ergo arcu[s] minor 57 grad. est minor radio et arcus 54 grad. est
~~444~~
~~4~~
minor radio. Septima pars peripheriae [est minor radio.] Ergo arcus 45 grad. est minor radio.

1–3 $r^{[2]} + \frac{r^2}{2} \sqcap$ arc. quad. Ergo $\frac{3}{2} \sqcap$ quad. et 6 aequal. circ.

6–8

$$\begin{array}{r} 360 \\ \underline{7} \\ 2520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ 54 \end{array} \Big|^{18} \frac{20}{3} \qquad \begin{array}{r} 360 \\ 45 \end{array} \Big|^{9} \frac{40}{5} \Big| \frac{8}{1}$$

---

1 $a^4 - 12r^2a^2 \sqcap 24vr^3$: Leibniz hat die Beziehung vermutlich fehlerhaft aus S. 398 Z. 10 f. (unter Berücksichtigung der ersten beiden Terme der Reihe) abgeleitet.

Arcus 45 grad. $\frac{44 \text{ rad.}}{7,8} \sqcap \frac{44 \text{ rad.}}{56} \sqcap \frac{11}{14}. \frac{14641}{138416}.$

$\frac{146|41}{1944|81}. \frac{146}{1944} \sqcup \frac{73}{922}.$

1

11	7
11	7
11	49
11	49
121	441
121	196
121	2401
242	16
121	14406
14641	12401
9	138416
131769	

2

2401
81
2401
19208
194481

~~3~~60 ⨍ 30. $\frac{44}{7,12} \sqcap \frac{11}{7,3}.$

~~12~~

---

2 922: Richtig wäre 972. 13 12401: Richtig wäre 2401 und in der nächsten Zeile 38416. Leibniz übernimmt das Ergebnis in Z. 1 für den Wert von $\frac{11^4}{14^4}$.

2
~~8~~1
~~1296~~ $\fallingdotseq 3 + \frac{24}{40} \Big| \frac{6}{10} \Big| \frac{3}{5}$.
~~360~~

~~1~~
~~3~~60 $\fallingdotseq$ 24.
~~15~~5
1

Si arcus octodecim graduum [*bricht ab*]

$\frac{7}{90 \frown 24}$ rad. $\frac{7}{2160}$. 4 ~~2160~~ $\fallingdotseq$ 308. 308 $\frown$ 6 $\sqcap$ 1848.
~~777~~

[*Zweiter Ansatz*] 5

Peripheria 22: Diam. 7. justo major.

1

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{9} \\ 216 \\ \underline{6} \\ 1296 \end{array}$$

3 360 $\fallingdotseq$ 20.
18

4 Error.

6 $22 \fallingdotseq 3 + \frac{1}{7}$
7

$\frac{314}{100}$. $\frac{314}{50}$. $\frac{31}{5}$ ⨍ $6\frac{1}{5}$. Peripheria ⊓ $6\frac{1}{5}$ rad. Octava pars peripheriae $\frac{31}{40}$. seu $\frac{31}{5,8}$.

$\frac{314}{100}$ ⊓ $3 + \frac{14}{100}\Big|\frac{1}{10} + \frac{1}{20} - \frac{1}{100}$.

$\frac{315}{100}$ ⨍ $3 + \frac{15}{100}\Big|^{5}\!\smile\ \frac{3}{20}$ nimium.

$\frac{44}{7}$ r. ⊓ periph. $\frac{44}{7,8}$ r. ⊓ $\frac{\pi}{8}$ arcu octantis. $\frac{11}{7}\boxed{4}$ ⊓ $\frac{14641}{2401}$ divisa per 24 dat $\frac{14641}{57624}$.

1

31	25	64
31	25	64
31	125	256
93	50	384
961	625	4096
961		
961		
5766		
8649		
923521		

4–407,3

$$\begin{matrix}\cancel{2}225\\ \cancel{14}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{1}\\ \cancel{2}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{1}\end{matrix} \text{ ⨍ } 6\frac{235}{2401} \text{ ⊓ } 6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{47}}.$$

$$\begin{matrix}\cancel{1}5\\ \cancel{2}\cancel{4}\cancel{0}1\\ \cancel{2}\cancel{3}\cancel{5}5\\ 23\end{matrix} \text{ ⨍ } 10 + \frac{10}{47}.$$

---

1 ⊓ $6\frac{1}{5}$ rad.: Richtig wäre ⊓.

$\boxed{4}\frac{44}{7,8} \sqcap \boxed{4}\frac{11}{7,2} \sqcap \frac{14641}{921984}$. Ergo $\frac{\boxed{4}\frac{\pi}{8}}{24} \sqcap \frac{14641}{921984}$. Ergo $\boxed{4}\frac{11}{7} \sqcap 6+\frac{1}{10}$. $\boxed{4}\frac{11,4}{7} \sqcap 6+\frac{1}{10} \frown \boxed{4}\overline{4}$. $\boxed{4}\frac{11,4}{7,8} \sqcap \boxed{4}\frac{\pi}{8}$. Ergo $\boxed{4}\frac{\pi}{8} \sqcap \boxed{4}\frac{11,\ 4}{7,\ 8\,2}$. Ergo $\boxed{4}\frac{\pi}{8} \sqcap 6+\frac{1}{10}$,, $\smile$ 16 et $\frac{\boxed{4}\frac{\pi}{8}}{24} \sqcap \frac{1}{4,16}+\frac{1}{10,24,16}$.

30 grad. est pars peripheriae: $\left(\begin{matrix}36|0\\3|0\end{matrix}\ f\right)$ 12ma. $\frac{\pi}{12} \sqcap \frac{11}{7,3}$.

In arcu 45 graduum error minor circiter $\frac{1}{64,6}$. in arcu 30 grad. circiter $\frac{1}{}$ [*bricht ab*]

$$\begin{array}{r} 2401 \\ \underline{24} \\ 9604 \\ \underline{4802} \\ 57624 \\ \underline{16} \\ 345744 \\ \underline{57624} \\ 921984 \end{array}$$

$6+\frac{1}{10} \smile 16 \smile 24 \smile 6 \sqcap \frac{1}{16,4,6}$ [*bricht ab*] $\qquad \frac{6+\frac{1}{10}}{24} \sqcap \frac{1}{4}+\frac{1}{240}$. $\qquad 6 \smile 24 \sqcap \frac{1}{4}$.

$16 \smile \frac{1}{16} \smile \frac{1}{24} \smile \frac{1}{6}$ *L ändert Hrsg.*

---

1 $\sqcap \boxed{4}\frac{11}{7,2} \sqcap \frac{14641}{921984}$: Richtig wäre $\frac{14641}{38416}$. Leibniz rechnet korrekt weiter.

45 grad. $24,16 \sqcap \frac{1}{384}$.

30 grad. $24,81 \; [\sqcap] \; \frac{1}{1944}$.

20 grad. $24,625 \; [\sqcap] \; \frac{1}{15000}$.

$\boxed{4}\frac{11}{7}$ circiter 6. et error $\frac{1}{10}$. Ergo $\boxed{4}\frac{11}{7} \smile 6 \smile 24 \sqcap \frac{1}{24}$ dividendo per $\boxed{4}2$. $\boxed{4}3$. $\boxed{4}5$ etc.

Sit arcus minor octante[:]

1

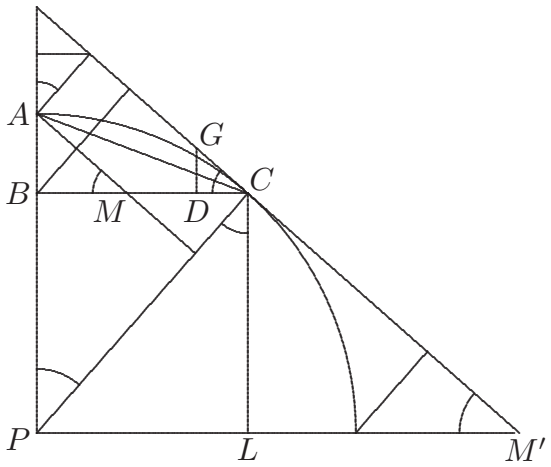
$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{16} \\ 144 \\ \underline{24} \\ 384 \end{array}$$

2

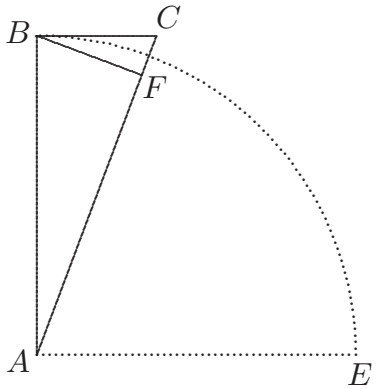
$$\begin{array}{r} 81 \\ \underline{24} \\ 324 \\ \underline{162} \\ 1944 \end{array}$$

3

$$\begin{array}{r|l} 36 & 0 \\ 2 & 0 \end{array} \; \mathfrak{f} \; 18. \qquad \begin{array}{r} 625 \\ \underline{24} \\ 2500 \\ \underline{1250} \\ 15000 \end{array}$$



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

$AB \sqcap x$. $AC \sqcap \sqrt{2ax}$. $BP \sqcap y$. $AB \sqcap x \sqcap a - y$. $BM \sqcap z$. $\dfrac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \sqcap \dfrac{a - y}{z}$. et $z \sqcap \dfrac{y, a - y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \sqcap y\dfrac{\sqrt{a - y}}{\sqrt{a + y}} \sqcap y\dfrac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a + y}$.

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 289 324 36⟨1⟩

---

1 *Zu Fig. 4:* $\dfrac{GC}{CP} \sqcap \dfrac{CD}{BP}$. $\dfrac{CM'}{GC} \sqcap \dfrac{CL}{GD}$.

4

13	49	15	16	17	36	19
13	4	15	16	17	9	19
39	196	75	6	119	324	171
13		15	[*bricht ab*]	17		19
169		225		289		361

25
9
225

---

1 *Fig. 4*: Leibniz hat in der Figur die Punktbezeichnung M doppelt verwendet. Zur besseren Unterscheidung wurde einer der Punkte M' benannt.

36. DE FUNCTIONIBUS CIRCULI ET HYPERBOLAE. DE SERIERUM SUMMATIONE ET DE METHODO TANGENTIUM INVERSA

[Juli – 24. August 1676]

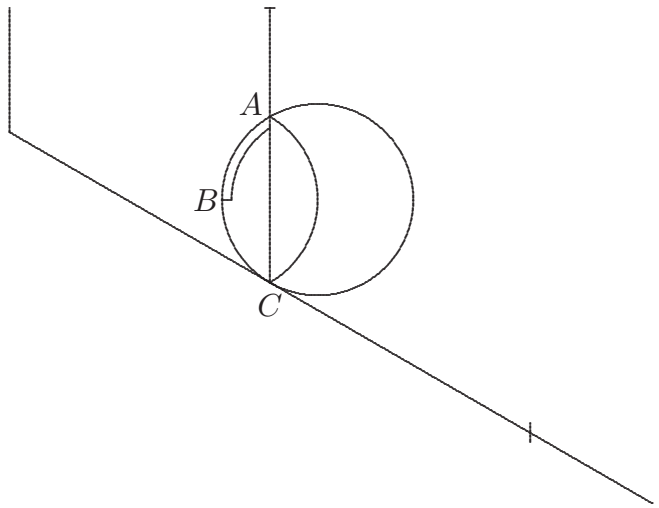
Das Wasserzeichen des Papiers ist von Frühjahr bis Herbst 1676 belegt. Die Gesprächsnotizen in N. 36_1 sind vermutlich vor Leibniz' Berechnung des Sinus complementi von 18° in N. 36_2 entstanden. Eine ähnliche Rechnung führt Tschirnhaus in N. 38 durch. In Teil 5 von N. 36_1 erklärt Leibniz ein allgemeines Differenzenschema einer Folge und erwähnt eine spezielle Eigenschaft des Differenzenschemas der harmonischen Folge. In einer weiteren Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus, die aufgrund ihrer Nähe zu VII, 3 N. 68 vermutlich um August 1676 zu datieren ist, berechnet Tschirnhaus Differenzen einer allgemeinen Folge, und Leibniz schreibt ein solches Schema bei der Untersuchung der harmonischen Folge an (VII, 3 N. 67 S. 809 f.). Dies spricht dafür, dass N. 36_1 vor VII, 3 N. 67 und damit wohl auch vor N. 46 (s. dort) entstanden sein könnte. Teil 6 steht möglicherweise in Zusammenhang mit N. 32, dat. Juli 1676. Leibniz übernimmt den am Schluss von N. 36_2 berechneten Wert für 314159^2 in N. 37, das bis zum 24. August 1676 entstanden ist (s. dort).

36_1. NOTAE

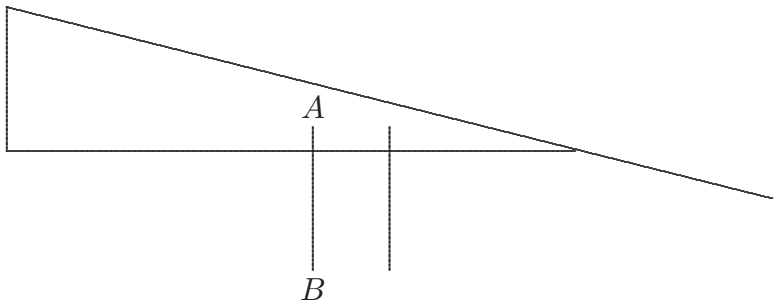
Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 II 1 Bl. 112. 1 Bl. 2°. Ca $1\frac{1}{5}$ S. auf Bl. 112 v° und 112 r° unten, gegenläufig. Auf dem übrigen Blatt N. 36_2. Die Notizen von Teil 3–6 sind zum größten Teil in die Lücken zwischen den Figuren von Teil 1–2 und tlw. darüber geschrieben.
Cc 2, Nr. 1240 A

[*Teil 1*]

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 1*]



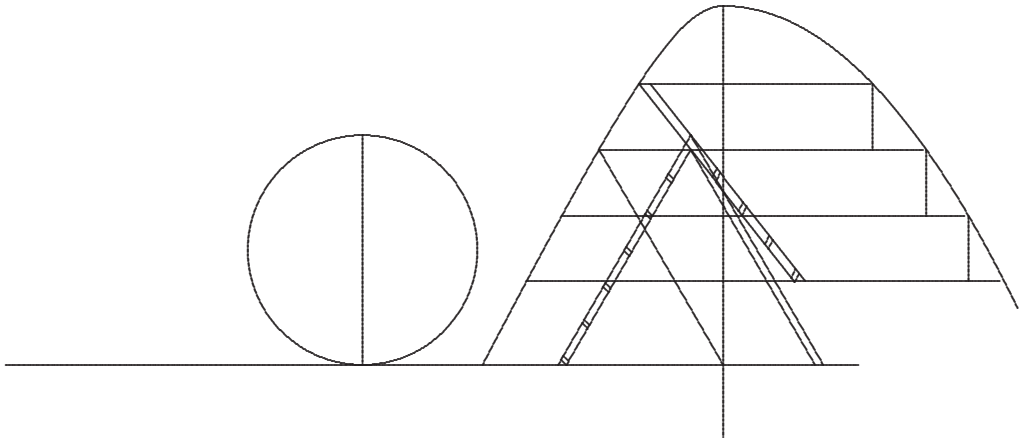
[*Fig. 2*]

---

3 f. *Tschirnhaus, neben Fig. 1 u. 2, quer geschrieben:*

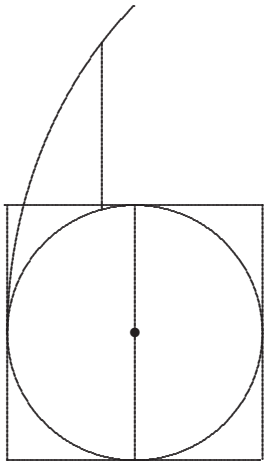
$$x \quad \begin{array}{|l} x \\ \hline y \end{array} \quad x \rho y$$

[*Leibniz oder Tschirnhaus*]

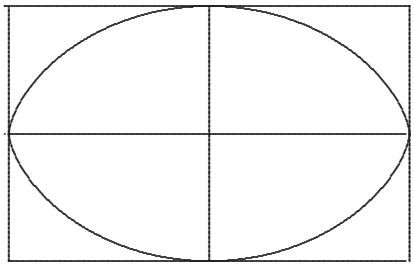


[*Fig. 3*]

[*Fig. 4*]



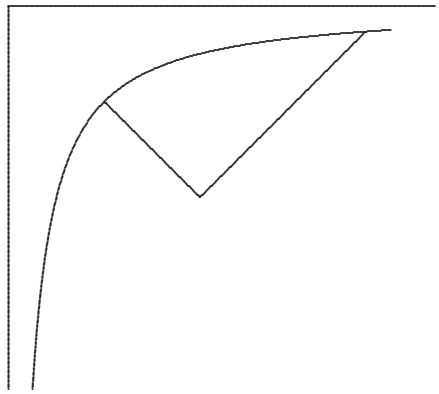
[*Fig. 5*]



[*Fig. 6*]

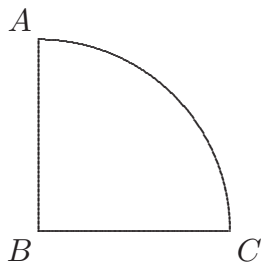
3 *Tschirnhaus, unter Fig. 5:* trans:

3 *Tschirnhaus, über Fig. 6:* Re: Trans:



[*Fig. 7*]

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 8*]

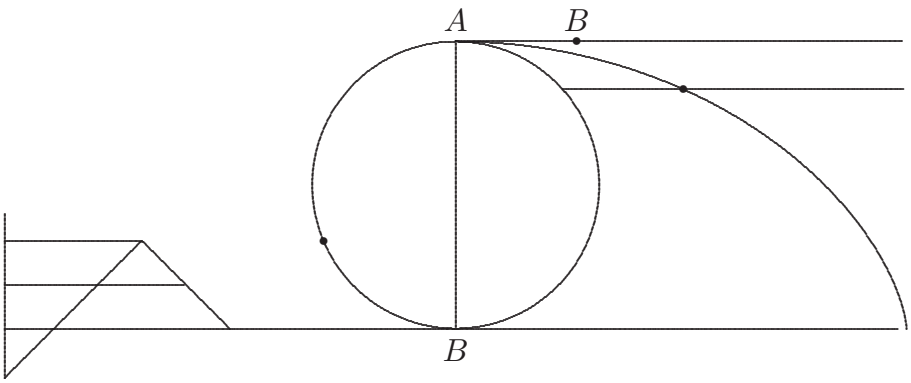
---

1 *Tschirnhaus, neben und über Fig. 7:* $\sqrt{\cdot}$ $\sqrt{}$
Tschirnhaus, links neben Fig. 7, quer geschrieben: xx
Tschirnhaus, rechts neben Fig. 7, quer geschrieben: $\sqrt{x^2+a}$
y

Leibniz, darunter: $\sqrt{x^2+a}$

$\sqrt{x}$ $\overbrace{\sqrt{x}+a}$

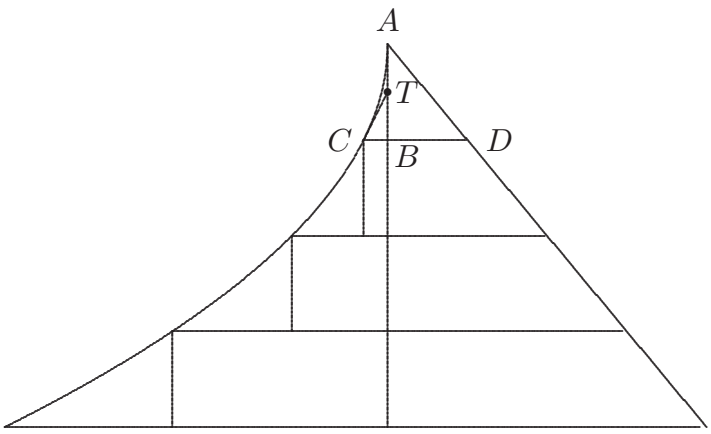
8 *Darunter* $x^2+\beta$ *gestr. L*



[*Fig. 9*]

[*Teil 2*]

[*Leibniz*]

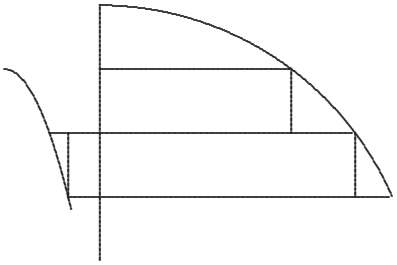


[*Fig. 10*]

$AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $BD \sqcap z$. $TB \sqcap t$.

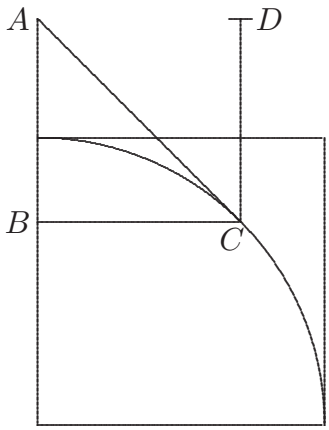
$\frac{d\overline{x}}{d\overline{y}} \sqcap \frac{t}{y} \sqcap \frac{a}{z}$. $tz \sqcap ay$.

[*Leibniz oder Tschirnhaus*]



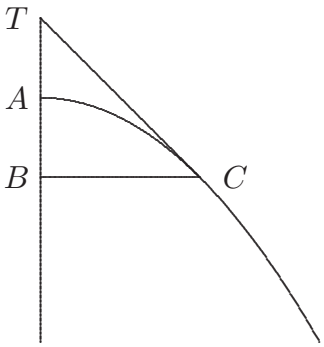
[*Fig. 11*]

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 12*]

[*Leibniz*]



[*Fig. 13*]

---

2 *Tschirnhaus, neben Fig. 12, verwischt:* $Q+P \quad Q$
$e-P \quad Q$

4 *Neben Fig. 13:* AB ⊓ x. BC ⊓ y. BT ⊓ t.

$$\begin{array}{ccccccccccc} by^2 & + & gyx & + & cy & \sqcap & dx^2 & + & ex & + & f \\ 2by^2 & + & gyx & + & cy & \sqcap & 2xt & + & et & - & gyt \end{array}$$

$$\frac{t}{y} \sqcap \frac{d\overline{x}}{d\overline{y}} \sqcap \frac{2by+gx+c}{2x+e-gy}.$$ *gestr. L*

[*Teil 3*]

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{63} \quad \frac{1}{80} \quad \frac{1}{99} \quad \sqcap \quad \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{16} & & \frac{1}{25} & & \frac{1}{36} & & \frac{1}{49} \\
& \frac{3}{4} & & \frac{5}{36} & & \frac{7}{144} & & \frac{9}{400} & & \frac{11}{900} & & & \\
& & \frac{88}{144} & & & & & & & & & &
\end{array}$$

[*Tschirnhaus*]

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{16}$$

[*Teil 4*]

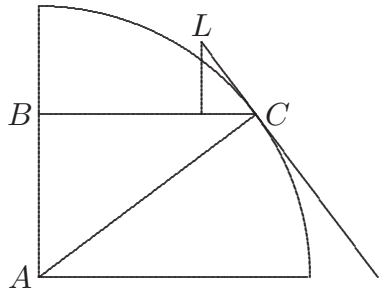
[*Leibniz*]

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
& & & & & & a & & & & b & & c & & d & & e \\
& & a-x & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & x & & & & y & & z & & v \\
& & & & x-r & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & r & & s & & t & & \\
& & & & & r-l & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & l & & m & & &
\end{array}$$

Ut summa seriei $x.\ y.\ z.$ inveniatur sic procedendum: $a.\ b.\ c.\ d.\ e.$ summae seriei $x.\ y.\ z.\ v.$ Jam $r.\ s.\ t.$ differentiae et $l.\ m.$ differentiae differentiarum etc. Itaque pro $a.$ quaesita invenienda hic venit considerandus modus naturalis, quoniam seriei $x.\ r.\ l.$ etc. termini in infinitum versus $l.$ eundo sunt noti, invenienda est seriei natura talis, ut etiam continuari possit versus a, seu ut possit continuari ⟨—⟩que et habebitur utique $a.$ Si $x.\ r.\ l.$ decrescant et $x.\ y.\ z.$ etiam erit series $a-x, x-r, r-l$ aeq. seriei $x.\ y.\ z.\ v.$ In progressione harmonica non solum aequales sunt series seriei, sed et singuli termini singulis.

[*Teil 5*]

[*Leibniz*]



$BC \sqcap z$

[*Fig. 14*]

$AB \sqcap y$. $BC \sqcap \sqrt{a^2 - y^2}$. $CL \sqcap \dfrac{a^2 d\overline{y}}{\sqrt{a^2 - y^2}}$. Sit $\sqrt{a^2 - y^2} \sqcap z$. erit $y^2 \sqcap a^2 - z^2$. et $d\overline{y} \sqcap \dfrac{d\overline{z}z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. Ergo $CL \sqcap \dfrac{d\overline{z}\,z}{\sqrt{a^2 - z^2}, z}$ quorum quaeritur summa, quod ut fiat rationaliter, debet $a^2 - z^2$ aequari quadrato. Aequetur quadrato ab $\dfrac{\overline{a+z}, v}{a}$ fiet: $\dfrac{a^2 + 2az + z^2, v^2}{a^2} \sqcap a^2 - z^2$. et $a - z, a^2 \sqcap a + z, v^2$. et $z \sqcap \dfrac{a^3 - av^2}{a^2 + v^2}$ et $a + z \sqcap \dfrac{a^3 \boxed{-av^2} + a^3 \boxed{+av^2}}{a^2 + v^2}$ et $\sqrt{a^2 - z^2} \sqcap \dfrac{2a^2 v}{a^2 + v^2}$. $dz \sqcap \dagger \dfrac{a^3 - av^2 - 2av\varphi - a\varphi^2}{a^2 + v^2 + 2v\varphi + \varphi^2} \dagger \dfrac{a^3 - av^2}{a^2 + v^2} \sqcap \dfrac{\dagger, -2a^3 v\varphi \boxed{-2av^3\varphi} \dagger, 2v\varphi a^3 \boxed{-2av^3\varphi}}{a^2 + v^2, \boxed{2}} \sqcap \dfrac{4a^3 v\varphi}{\boxed{2}\, a^2 + v^2}$. Ergo $CL \sqcap \dfrac{8a^5 v^2 \varphi}{\boxed{3}\, a^2 + v^2}$.

$\sqrt{a^2 - z^2} - \sqrt{a^2 - z^2 - 2z\beta - \beta^2} \sqcap \omega \sqcap d\overline{y}$. Fiet: $\boxed{a^2 - z^2} - 2z\beta \boxed{-\beta^2} \sqcap \boxed{a^2 - z^2}$, $\boxed{+\omega^2}$,, $-2\omega\sqrt{a^2 - z^2}$ et fiet $\omega \sqcap \dfrac{\beta z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. $\beta \sqcap dz$.

$\underbrace{a + z}_{f} \sqcap \dfrac{2a^3}{a^2 + v^2}$. et $a^2 f + v^2 f \sqcap 2a^3$. et $v \sqcap \sqrt{\dfrac{2a^3 - a^2 f}{f}}$.

---

4 $CL \sqcap$: Im Zähler des folgenden Bruches müsste a statt a^2 stehen, in Z. 5 fehlt der Faktor a im Zähler. Der Wert für CL in Z. 9 ist durch ein weiteres Versehen beeinträchtigt.

$\frac{1}{a^2+v^2}$. Fiat $v^{[2]} \sqcap \omega^2 + 2\omega g + g^2$. fit $\frac{1}{\omega^2 + 2\omega g + \underbrace{g^2+a^2}_{h^2}}$, unde $\sqcap \frac{1}{\underbrace{g^2+a^2}_{h^2}} - \frac{\omega^2+2\omega g}{\boxed{2}\,h^2} + \frac{\omega^4+4\omega^3 g+4\omega^2 g^2}{\boxed{3}\,h^{[2]}}$ et summa $\sqcap \frac{\omega}{h^2}, -\frac{\omega^3}{3\boxed{2}\,h^2} - \frac{2\omega^2 g}{2\boxed{2}\,h^2} + \frac{\omega^5}{5\boxed{3}\,h^2} + \frac{4\omega^4 g}{4\boxed{3}\,h^2} + \frac{4\omega^3 g^2}{3\boxed{3}\,h^2}$ ponendo ω quantumlibet parvam et g quantumlibet magnam; (et quidem cum arbitraria sit decimalem) manifestum est etiam $\omega^2+2\omega g$ posse multo majorem fieri quam ω. Ergo subito appropinquabitur.

[*Teil 6*]

[*Leibniz*]

Variae possent condi regulae, ex sinu invenire logarithmum tangentis sine ipso tangente. Ex logarithmo tangentis invenire arcum. Sed non semper ⟨brevissimae⟩, ⟨et⟩ erunt aliquando ex duabus complicatae. Summa tangentium ad arcum dat logarithmum secantis. Summa secantium ad arcum logarithmum tangentis.

36_2. CALCULUS SINUS COMPLEMENTI 18 GRADUUM

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 112. 1 Bl. 2°. $\frac{4}{5}$ S. auf Bl. 112 r°. Auf dem übrigen Blatt N. 36_1.
Cc 2, Nr. 1240 B

$\frac{1}{1} - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4}$. $\frac{314}{1000} \sqcap a$. Si arcus 18 grad. et ponatur ratio diametri ad circumferentiam seu radii ad semicircumferentiam, ut 100 ad 314. ergo radio posito 1.

8 f. Variae ... tangente: vgl. Collins' Mitteilung über die Resultate J. Gregorys in Oldenburgs Brief an Leibniz vom 22. April 1675 (III, 1 N. 49_2, insbesondere S. 235) sowie N. 32 S. 373 Z. 6–8.
10 f. Summa ... tangentis: vgl. J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 14–21 u. VII, 5 N. 47 S. 334–339.

est semicircumf. $\frac{314}{100}$. et ejus pars 10^{ma}(18 grad. quia 360 grad. est circumf. 180 grad. semicircumf.) erit $\frac{314}{1000}$. Ejus quad. est

$$\begin{array}{r} 314 \\ 314 \\ \hline 1256 \\ 314 \\ 942 \\ \hline \end{array}$$

$$a^2\ \frac{98596}{1000{,}000} \text{ et } \frac{a^2}{2} \sqcap \frac{49298}{1000{,}000} \text{ et } 1 - \frac{a^2}{2} \sqcap \frac{1000{,}000,, - 49298}{1000{,}000}.$$

$$\begin{array}{rl} 3141 & b + 1 \\ 3141 & b + 1 \\ \hline & b^2 + 2b + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} b^2 & + & 9859600 \\ 2b & + & 6280 \\ 1 & + & 1 \\ \hline \frac{a^2}{1} & & 9865881 \\ \hline & & 1{,}0000{,}0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} \frac{2}{1} & - & \frac{a^2}{1} & \sqcap & 200000000 \\ & & & & 9865881 \\ \hline 2 & - & a^2 & & 190134119 \\ 1 & - & \frac{a^2}{2} & \sqcap & 95067 \text{ etc.} \end{array}$$

8 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ 49298 \\ \hline 950702 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} 314000 & + & 159 \\ b & + & c \end{array}}_{a}$$

$$\begin{array}{rcr} a^2 & \sqcap & b^2+2bc+c^2 \\ b^2 & \sqcap & 9856000000 \\ 2bc & & 99852 \\ c^2 & & 25281 \\ \hline a^2 & \sqcap & \cancel{98561251}\cancel{3} \\ & & 12 \\ \hline & & 19712250266 \\ & & 9856125133 \\ \hline & & 118273501596 \end{array}$$

$a^4 \sqcap b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$

$1-\dfrac{a^2}{1,2}+\dfrac{a^4}{1,2,3,4} \sqcap 24-12a^2+a^4$

---

3 f. *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rr} bc \sqcap & 159 \\ & \underline{314000} \\ & 636 \\ & 159 \\ & \underline{477} \\ & 49926 \\ & \underline{2} \\ 2bc & 99852 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 159 \sqcap & c \\ \underline{159} & \\ 1431 & \\ 795 & \\ \underline{159} & \\ 25281 \sqcap & c^2 \end{array}$$

10–421,5 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rcr} 2bc & \sqcap & 99852 \\ 2c^2 & & \underline{50562} \\ & & 199704 \\ & & 599112 \\ & & 499260 \\ & & \underline{4992600} \\ 4bc^3 & \sqcap & 5048716824 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 25281 & c^2 \\ \underline{25281} & c^2 \\ 25281 & \\ 202248 & \\ 50562 & \\ 126405 & \\ \underline{50562} & \\ 639128961 & c^4 \end{array}$$

---

2 $b^2 \sqcap$: Richtig wäre 98596000000. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit einem Versehen in der folgenden Zeile und zusätzlichen Fehlern die weitere Rechnung.

b^4	⊓ 97140736000000000000	
$4b^3c$	1968282624000000000	
$6b^2c^2$	14955632856000000	
$4bc^3$	5048716824000	
c^4	639128961	
	~~99852398793062119729~~61	⊓ $+a^4$
	||||||||||||||||||||	
	24000000000000000000000	$+24$
	24991239793062119529 61	
	11827350159600000000000	$-12a^2$
	13163889633462119529 61	⊓ $24-12a^2+a^4$

99852	
99852	
199704	
499260	
798816	
898668	
898668	
9970421904	$4b^2c^2$
4985210952	$2b^2c^2$
3	
~~14955632876~~	$6b^2c^2$

b^4	⊓	9856000000,000000	b^2	⊓ 9856000000
		9856	$2bc$	99852
		59136		19712
		49280		49280
		78848		78848
		88704		88704
b^4		97140736000000000000		88704
			$2b^3c$	984141312
			2	2
			$4b^3c$	1968282624

$$a \sqcap \frac{314159}{100000}$$

$$\begin{array}{rcr}
b^2 & \sqcap & 9856000000 \\
2bc & \sqcap & 99852000 \\
c^2 & \sqcap & \underline{25281} \\
 & & 9955877281 \\
 & & \underline{12}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
314159 \\
\underline{314159} \\
2827431 \\
1570795 \\
314159 \\
1256636 \\
314159 \\
\underline{942477} \\
98695877281
\end{array}$$

37. CALCULUS SINUS COMPLEMENTI ANGULI 18 GRADUUM EX ARCU [Juli – 24. August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 115. 1 Bl. 2°. Ca $\frac{1}{3}$ S. auf Bl. 115 r°. Bl. 115 bildete ursprünglich mit LH 35 II 1 Bl. 32 einen vollständigen Bogen. Leibniz notierte auf Bl. 115 v° eine überarbeitete Fassung (= S. 648 Z. 5 – S. 651 Z. 8) von Abschnitten der Grundstufe von N. 51, prop. XLVIII, auf Bl. 32 drei ergänzende Korollare (= N. 51 S. 656 Z. 1 – S. 657 Z. 12). Bl. 32 enthält außerdem Überlegungen zur Kreisreihe, die aufgrund der verwendeten Symbole in Hannoverscher Zeit entstanden sein dürften (Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 1241 tlw.

Datierungsgründe: Leibniz hat die erste Fassung der prop. XLVIII von N. 51 wie in N. 35 ausgehend von der Formel für die Berechnung des Sinus aus dem Bogen ausgearbeitet. N. 37 ist, wie der Duktus der Schrift nahelegt, direkt nach der zweiten Fassung der Artikel (1)-(4) und (8) dieser Proposition, die zunächst auf der Formel für den Sinus complementi beruhte und dann für den Sinus versus umformuliert wurde, auf Bl. 115 geschrieben worden. Die Fassung auf der Grundlage der Formel für den Sinus complementi entspricht der Darstellung, die Leibniz im Entwurf vom 24. August und in der Abfertigung vom 27. August 1676 seines Briefes an Oldenburg gibt (III, 1 N. 89 S. 566 u. 577 f.), und dürfte daher spätestens bis dahin entstanden sein. Leibniz verwendet in N. 37 den Wert für 314159^2, den er in N. 36_2 berechnet hat.

Semicircumf. $\frac{314159}{100000}$. Radius 1. Erunt 18 gradus, pars 10ma semiperipheriae: $\frac{314159}{1000000}$ $\sqcap$ a et sinus complementi anguli 18 grad. erit $\frac{1}{1} - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4} - \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6}$ etc. Po-

namus $\sqcap\ \frac{1}{1} - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4}$. Erit $a^2\ \sqcap\ \frac{98695877281}{1000,000,000,000}$. et $\frac{a^2}{2}, \sqcap\ \frac{49347938640\frac{1}{2}}{1,000,000,000,000}$ et $a^4\ \sqcap$ [*bricht ab*]

2 *Nebenrechnungen:*

314159	1
628318	2
942477	3
1256636	4
1570795	5
1884954	6
2199113	7
2513272	8
1927431	9

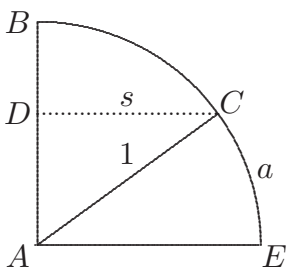
314159	1
2513272	8
628318	2
2199113	7
2199113	7
2513272	8
1570795	5
1927431	9
1884954	6
2513272	8
1927431	9
~~2~~ ~~1~~ ~~9~~ ~~9~~ ~~7~~ ~~1~~ ~~9~~ 6 ~~1~~ ~~1~~ 0 ~~7~~ ~~2~~ ~~1~~ ~~8~~ ~~7~~ ~~9~~	
~~2~~ ~~1~~ ~~9~~ ~~9~~ ~~7~~ ~~1~~ ~~9~~ 6 ~~1~~ ~~1~~ 0 ~~7~~ ~~2~~ ~~1~~ ~~8~~ ~~7~~ ~~9~~	

1 $a^2\ \sqcap$: vgl. N. 36_2 S. 422 Z. 10. 12 1927431: Richtig wäre 2827431. Der Fehler geht in die folgende Berechnung von a^3 ein, die durch einen weiteren Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigt wird. Leibniz überprüft das Ergebnis zweimal, korrigiert aber nicht.

38. BERECHNUNG DES SINUS COMPLEMENTI
[Juli – August 1676]

Überlieferung: *T* Aufzeichnung (Tschirnhaus für Leibniz): LH 35 VIII 30 Bl. 71. Ca $\frac{1}{3}$ Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 71 r°.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück stellt eine Rechnung Tschirnhaus' mit der Formel für den sinus complementi dar; Leibniz führt seinerseits eine ähnliche Rechnung in N. 36_2 durch. Möglicherweise sind beide Stücke im Anschluss an das in N. 36_1 dokumentierte Gespräch entstanden. N. 38 und N. 17 sind formal ähnlich aufgebaut; Mohrs Rechnung in N. 17 könnte Tschirnhaus als Vorlage gedient haben.



[*Fig. 1*]

Als der Arcus $CE \wp a$ gegeben ist umb den Sinum Complement: DC zu finden nach dieser regul: $s \wp \frac{1}{1} - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4}$ etc: operirt als folget: gesetzt

					DC
der $\angle CAE$	18 gr:	den ist der arcus $CE \wp a$	$\frac{31416}{100000}$	der sinus complementi nach der Tabl: sin:	95105.65
	36 gr:		$\frac{62832}{100000}$		80901.70
	45 gr:		$\frac{78540}{100000}$		70710.

16 95105.65: Tschirnhaus notiert für den sinus complementi DC lediglich die Nachkommastellen.

$$\left.\begin{array}{l} \\ \text{nach der rechnung mitt} \\ \text{den ersten 3 termen} \\ s \wp \dfrac{1}{1} - \dfrac{a^2}{1,2} + \dfrac{a^4}{1,2,3,4} \end{array}\right\} \begin{array}{r} DC \\ 95105[7]62220906878464 \\ 80910098894510055424 \\ 7074279125417494. \end{array}$$

So der Sinus s oder DC gegeben ist, umb seinen arcum Complement: $CE \wp a$ zu finden solches wird eben nach auß vorgedachter regel gefunden also

$$\text{Sinus } DC \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{95105}{100000} \\ \dfrac{8091}{10000} \\ \dfrac{704249}{100000[0]} \end{array} \right\} \begin{array}{lll} & \dfrac{31419}{100000} & \text{18 gr: 6 sec:} \\ \text{operirt nach} & & \text{das ist vor} \\ \text{der regel kompl.} & \dfrac{62833}{100000} & \text{den } \angle CAE \quad \text{36 g: 2 s:} \\ \text{vor den Arcus} & & \text{nach den} \\ CE \wp a \text{ als} & \dfrac{785404}{100000[0]} & \text{Tab: Sin:} \quad \text{45 g: 1 s:} \end{array}$$

NB: Der Radius AC ist $\wp$ 1 und die proportion von den Diameter ist gestelt zu der Circumferenz wie 100000 zu 31416.

9 $\dfrac{95105}{1000000}$ *T ändert Hrsg.* 11 $\dfrac{8091}{100000}$ *T ändert Hrsg.*

13 $\dfrac{704249}{100000[0]}$: Tschirnhaus übernimmt den Wert von Z. 6 fehlerhaft; gerechnet hat er mit dem ebenfalls nicht ganz korrekten 0,7074249. 15 100000: Richtig wäre 10000.

39. INTRODUCTIO AD PRAEFATIONEM LIBELLI GEOMETRICI [Juli – 27. August 1676]

Überlieferung:

L^1 Konzept: LH 35 II 1 Bl. 51–52. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 52. Auf Bl. 51 L^2. (Unsere Druckvorlage.)
Cc 2, Nr. 1224 G–H

L^2 Konzept: ebd. Ca 1 $\frac{2}{3}$ S. auf Bl. 51. Auf Bl. 52 L^1. (Unsere Druckvorlage.)
Cc 2, Nr. 1224 F

Datierungsgründe: Während der Erweiterung der Abhandlung zur Kreisquadratur über den durch N. 20 u. N. 28 repräsentierten Inhalt hinaus plante Leibniz wohl auch ein umfangreicheres Vorwort als N. 19. L^1 von N. 39 enthält eine Gliederung in drei Teile („de instituti mei ratione, de argumento quod suscepi, ac de Geometria in universum“) und den Anfang eines solchen Vorworts. Den ersten beiden Teilen können ungefähr die Entwürfe N. 40 und N. 41 („de operis argumento et auxiliis“) zugeordnet werden, sie überschneiden sich jedoch inhaltlich in den Ausführungen zur Algebra. In L^2 von N. 39 hat Leibniz die Gliederung inhaltlich präzisiert („primum de instituto meo, scribendi ratione; inde de quaestione suscepta ac denique de usu ac statu praesenti Geometriae ipsius“) und zwei neue Versionen des Textanfangs entworfen, deren Inhalt er teilweise in N. 49_2 aufgreift. Auch Textstücke aus L^1 von N. 39, N. 40 u. N. 41 sind in modifizierter Form in N. 49_1 eingegangen, das eine erweiterte Ausarbeitung des letzten Teils „de usu ac statu praesenti Geometriae“ der Gliederung in L^2 von N. 39 darstellt. Es muss offen bleiben, ob Leibniz zusätzlich den wesentlichen Inhalt von N. 19 in den zweiten Teil des Vorworts übernehmen wollte. In L^2 von N. 39 datiert Leibniz seine Entdeckung der Kreisreihe durch „triennio ab hinc“, in N. 49_2 durch „triennium et ultra“. In der Abfertigung seines Briefes an Oldenburg vom 27. August 1676 schreibt er dafür „triennio abhinc et ultra“, während er im zwischen dem 24. und 27. August entstandenen Konzept zunächst „triennio abhinc“ ergänzte und dann zu „triennio abhinc et ultra“ erweiterte (III, 1 N. 89_2, S. 575 f.). Dies könnte darauf hindeuten, dass L^2 von N. 39 und damit wohl auch N. 40 u. N. 41 vor diesem Konzept entstanden sind, N. 49_2 danach.

⟨L^1⟩

Libellum argumenti Geometrici editurus quo de vetustissima quaestione nova quaedam inventa continentur, et ad multa incognita atque intentata aditus aperitur pauca de instituti mei ratione, de argumento quod suscepi, ac de Geometria in universum praefabor.

Qui omnia ad utilitatem quandam praesentem et palpabilem referunt mirabuntur hominem aliorum studiorum non omnino expertem, et in iis quae passim laudari probarique solent cum plausu versatum argumentum exercendi ingenii delegisse, unde nec quaestus apparet, nec laus expectari possit, nisi modica et a paucis. Quare mihi prudentium Virorum Judiciis plurimum tribuenti quaedam purgandi mei necessitas imposita est, ne temporis prodigus esse videar, quo nemo plus justo abundat.

Duplex est Geometriae utilitas, nam vel ad vitae praesentis commoditates pertinet vel ad ipsam per se mentis perfectionem refertur. Geometria nobis terrarum descriptionem, et siderum cursus dedit et dissitas gentes navigandi commercio junxit. Geometriae

2 *(1)* De Qvadratura Circuli nobile olim hodie propemodum infame problema *(a)* Qvae de magnitudine circuli a me inventa sunt editurus, famae periculum subeo apud harum rerum ignaros, qvi me impossibilia moliri credent, sed a Geometris me gratiam initurum *(b)* De magnitudine Circuli inventa editurus, pauca de instituti mei ratione, et Geometria in universum dicere decrevi. Eqvidem ab ineunte aetate veritatis contemplatione afficiebar *(2)* Libellum L^1 5 f. praefabor. *(1)* Eqvidem in tanta hominum varietate mirum non est, si qvi ipsa per se veritatis cognitione delectantur *(2)* Qvi omnia ad *(a)* fructum qvendam *(b)* fructuo *(c)* utilitatem L^1 11 f. abundat. *(1)* Eqvidem scio qvae virorum in negotiis versantium de hoc studiorum genere sententia sit: nimirum mathematica studia velut qvaedam crepundia esse adolescente non indigna, matura vero aetate non nisi eos decere, qvi ad numeros figurasqve velut ad metallum damnati sunt. machinas et experimenta otiosorum hominum lusus esse; pro scholasticorum subtilitatibus nunc passim explosis alias introduci nugas, magis speciosas sed et magis difficiles crucem ingeniis figi, novasqve fingi scientias, qvasi non satis jam sit qvod agamus, aut qvasi vita longa sit ars brevis *(2)* Eqvidem qvodam esse metienda *(3)* Eqvidem difficile est hominibus praesertim in negotiis ac tumultu versatis, et raro in se redeuntibus rectas de vera vita sententias persuadere; si quid fortiter dixeris, si haesitantes percuteris, si in intima animorum descenderis; redeuntes subito vitae fluctus solitaeqve curae jacta meditationum semina tollunt: suffecerit itaqve qvi plerumqve ne sui qvidem juris sunt, aliqvando saltem nostros esse, et nonnunqvam velut expergefactos *(4)* Eqvidem si scientiarum omnium usus tantum ad vitae praesentis commoditates referretur, non esset Geometria fortasse *(5)* Duplex L^1

---

3 f. pauca ... suscepi: vgl. N. 40 u. N. 41. 12–430,2 Duplex ... potissimum: vgl. N. 49_1 S. 494 Z. 6 – S. 497 Z. 8. 24 velut ... damnati: vgl. N. 40 S. 434 Z. 12 f. 26 crucem ... figi: vgl. L. Vives, *De disciplinis*, 1531, lib. V, cap. III (Vives, *Opera* VI, S. 197) sowie N. 49_1 S. 485 Z. 2 f.

pulcherrimam artium graphicen debemus, et leges motuum, et vires machinarum, et aedificiorum decora, et castellorum munimenta. Quid opticae praestigias memorem, et miracula speculorum; cum constet sidera oculis nostris vitrorum usu admota, et ipsum circa nos mundum sub microscopiis velut multiplicatum. Porro in tota Geometria nihil ea parte utilius quam trigonometriam vocant, cujus beneficio non tantum spatia terrarum metimur, sed et ingentes coeli tractus percurrimus. Verum imperfectionem suam fassa hic scientia est, cum enim certa regula non haberetur, qua in triangulis ex lateribus anguli aut ex angulis latera invenientur, immani calculorum labore suppletum est, quod ingenio defuit: conditaeque sunt tabulae quas in promtu habeat necesse est, qui beneficio tantae artis uti velit. Ita fateor illis consultum est, qui in locis agunt, ubi parata est librorum copia, sed qui longinqua itinera suscipiunt, non ubique inveniunt officinas. Neque in potestate est, libros aut instrumenta per terras et maria circumferre. Saepe id questos scio peregrinatores, et optasse regulas quarum facilis memoria ususque esset, quibus Canonis Mathematici defectus suppleretur. Eae vero cum mihi se denique obtulerint quibus nescio an meliores cum ratione optari possint, credidi, aliquid habere me quod in publicos usus conferri posset. Itaque primum officio meo satisfeci, cum publicae utilitatis ratio nobis semper habenda sit non minus quam nostrae; si quis vero me mihi male consuluisse putet, dum aliis laboro, eum admonebo, impossibile esse, ut qui de aliis bene, is de se male mereatur. Sed quoniam pauci capiunt veritatem tam sublimam, fortasse non abs re erit pauca adjicere, unde suspicari possint homines fortasse non esse verarum scientiarum cultores tam infelices aut imprudentes quam vulgo videtur.

Dixi enim de priore Geometriae utilitate quam Geometrae aliis communicant et quivis capit, restat ut illam attingam, quam non nisi intelligentes aestimabunt, et verae

3 cum *(1)* telescop *(2)* tubi optici *(3)* microscopia *(4)* constet L^1 11 f. in | humana *gestr.* | potestate L^1 14 f. qvibus ... possint, *erg.* L^1 16 posset *(1)* Qvod si gloriae appetens essem, mallem profecto a decem magnis viris laudari, qvam turbae plausum captare, cuius *(2)* Si *(3)* itaqve L^1 21 f. videtur. *(1)* Et qvidem ut humano more loqvamur, si magnitudo nominis in posteritatem propagata verum est bonum qvis est qvi non potius Archimedis qvam Hieronis famam malit: Gloria autem vera et duratura in hominis scientias serio colentis potestate est: in tanta enim qvaerendum materia qvi nihil posteritate dignum invenit, habet cur incuset ignaviam potius suam qvam infelicitatem; sed ut verum fatear male consuluisset nobis natura, si hoc unum laboribus nostris pretium constituisset: nam ut nomen *(2)* Nec gloriam memorabo *(3)* dixi L^1

11 f. Neque ... circumferre: vgl. N. 28 S. 351 Z. 6 f.

eruditionis cultores servant sibi, ut scilicet sit aliquod illis pretium operae etiamsi nemo gratiam haberet, constat potissimum.

⟨L^2⟩

Libellum argumenti Geometrici editurus, quo circa vetustissimam quaestionem nova quaedam inventa continentur, et ad multa incognita atque intentata aditus aperitur, primum de instituto meo, scribendi ratione; inde de quaestione suscepta ac denique de usu ac statu praesenti Geometriae ipsius pauca praefabor.

[*Erste Fassung, nicht gestrichen*]

Quatuor propemodum anni sunt ex quo Geometriae operam serio dare coepi, nam prima aetas quam veteres inutilium ignorantia felices mathematicis destinabant, linguarum studio, et *amoenioribus*, quas vocant, *literis*, et quadam polymathiae affectatione absumta est. Inde serio magis et tetrica excepere; pro recepta inter nostrates studiorum ratione scholasticae scilicet subtilitates, et Jurisconsultorum placita, in quibus ut incerta et arbitria multa, Ita tamen ema⟨n⟩antem passim in mediis tenebris egregiarum rationum lucem deprehendi. Notabam connexas veritatibus veritates, et veterum inprimis quorum reliquiae in digestis supersunt accuratas ratiocinationes mirabar neque dubium erat, justum esse, quod publice utile sit, de utili autem et in universum de bono et malo; animorum motibus, de republica, theoremata condi posse videbam, foecunda et late patentia, et prorsus certa. Haec quantum per avocamenta licebat rimatus, et velut quoddam rationis filum secutus; perpetua analysi semper ducebar ad propositiones scientiae cujusdam generalis; de eo quod est aut non est, possibili, impossibili, necessario, contingente, de simili et dissimili, causa et effectu, toto et parte, quas philosophi Axiomata Jurisconsulti

4 *Darüber am Rand:* superest ut dicam

12 f. pro ratione *erg.* L^2

9 Quatuor ... coepi: vgl. N. 49_2 S. 515 Z. 7. 11 vocant: Aulus Gellius, *Noctium Atticarum libri XX*, XVIII, 5, 1. 23 superest: vgl. N. 41 S. 437 Z. 6.

regulas barbari Brocardica vocant. Dolebam vero praeclara primae rationis et naturalis judicii semina incultis in agris sparsa distinctionum innumerabilium spinis suffocari et naturae beneficia in venenum ingeniorum versa esse; nam incerto vocabulorum usu, nullis definitionibus constitutis, intorta leviter regula quidvis concludi poterat, nec autor deerat absurditati quantaevis, praesertim in tanta eorum multitudine quorum venalia responsa ludibriorum et sophismatum materiam magnis voluminibus collectam dabant. Sed et quod in jure Regulas, id in humana vita et conversatione, proverbia esse, et ratas sententias, ambigue atque artificiose conceptas; et quaedam splendide et magnifice dicta, et in axiomatis speciem adornata quibus deliberantes se aliosque decipiunt. Quae fieri non possent, si homines constituto vocabulorum usu ratiocinari quam ludere mallent; nec sententias admitterent, nisi quarum universalitas aut certe probabilitas demonstrata haberetur.

[*Zweite Fassung*]

Quatuor propemodum anni sunt ex quo Geometriae operam dare serio coepi. Equidem ab ineunte aetate veritatis inquisitione delectabar et Scholasticae philosophiae Spinas perreptaveram puer, jamque superatis difficultatibus dulcedinem degustaveram, pene aliorum studiorum periculo, nisi literarum amoenitas, et necessaria nostris jurisprudentia ad gratiora hominibus et in usu versantia revocasset. Quorum ubi nonnihil compos factus sum vidi mutatam potius quam imminutam meditandi materiem esse, et praeclara in re civili scientia condi theoremata posse, quorum ignorantia aut neglectu passim in deliberationibus et judiciis labimur. Multa esse prorsus certa, de nonnullis ipsam probabilitatem demonstrari et in gradus distingui debere; jus certum reddi esse, et regulas praeclaras et universales barbaris distinctionibus corruptas purgari et in Elementa cogi posse. Unde magna civili scientiae sperari lux possit.

16 jamqve ... degustaveram, *erg.* L^2 20 f. in *(1)* | deliberationibus et judiciis *nicht gestr.* | *(a)* homines circumveniantur. | sed *erg.* | et qvoties non | nisi probabilia *nicht gestr.* | *(aa)* dici possunt esse qvosdam ipsius probabilitatis gradus, qvi satis exacte *(bb)* | dicere licet ipsam probabilitatem demonstrari, et in gradus satis exacte distingui posse consultum esse. Haec *nicht gestr.* | meditantem | qvantum per avocamenta licebat *erg.* | | et ad jactatam potius sermonibus agitantem *nicht gestr.* | *(b)* | labimur *nicht gestr.* | *(2)* deliberationibus L^2 22 debere; *(1)* qvoties *(2)* scilicet facti qvoties qv⟨—⟩ juris sunt rationis et ⟨misere⟩ fallit *(aa)* Eodem si *(bb)* Dum esse, praeclaras qvasdam regulas, sive ut *(aaa)* qvid⟨a⟩m ⟨voc⟩ *(bbb)* Jus *(3)* jus L^2

Haec agitantem et ad jactatam potius sermonibus hominum, quam notam plerisque, scientiam illam primam et universalem cuncta referentem, et artium Mathematicarum cupido incessit quod praeclara in illis specimina severae ratiocinationis extare constaret; quibus montes ad spem inveniendae veritatis eriguntur. Hanc sitim otium nactus quanquam sero, tandem explevi. Cumque facile viderem omnia in natura motu transigi, motus autem figuris determinari, de magnitudine figura et motu generales institui contemplationes, id est in Logistica (quidam analysin vocant), Geometria, et Mechanica animum exercui. Fuitque ea semper felicitas mea (fatendum est enim esse quandam et in cogitationibus fortunam), ut prima plerumque tentamenta inexpectatis successibus pensarentur. Nam et magnitudinem Circuli quam nunc primum publico, triennio ab hinc a me repertam sciunt amici quibus jam tum communicaveram, et Machina Arithmetica et novitati sua et usu magnorum virorum oculos in se convertit. At de motu quidem et machinis alias dicam, nunc de praesentis scripti ratione dicendum est.

Equidem jam diu est quod *scribendi cacoethes* deposui, ex quo agnovi verum studiorum fructum in cujusvis mente esse debere; [*bricht ab*]

7 contemplationes, *(1)* et scientiam qvam aliqvi Algebram, alii Analysin vocant, vel qvod idem *(2)* id L^2 13 f. est. *(1)* Eqvidem si ex meo potius qvam aliorum sententia scriberem; paucis paginis hoc qvicqvid libri est fuissem complexus: exhibita inventorum analysi, qvam semper demonstrationem secum ferre certum est; idqve insignioribus Geometris, qvi in nostri temporis inventis sint versati, haud dubie satisfecisset. Sed visum est amicis aliorum qvoqve rationem habendam esse, praesertim cum ea qvaedam, *(2)* Eqvidem possem dare universaliora longe, et mea sent *(3)* Eqvidem L^2

11 communicaveram: Möglicherweise hat Leibniz das Ergebnis 1673 u. a. Huygens mitgeteilt (vgl. N. 2 u. N. 3). Sichere Belege gibt es erst für 1674 (vgl. III, 1 N. 30, 39 u. 40). 12 convertit: Leibniz bezieht sich wohl vor allem auf die Vorführungen der Rechenmaschine bei der Royal Society in London und bei der Académie Royale des Sciences in Paris (vgl. Birch, *History* III S. 73 u. III, 1 N. 9 S. 40 bzw. III, 1 N. 43 sowie Mackensen, *Vorgeschichte*, S. 86–91 u. 169–178). In seinem Brief an Herzog Johann Friedrich vom 21. Januar 1675 erwähnt Leibniz, dass Colbert drei Exemplare der Rechenmaschine in Auftrag gegeben habe (I, 1 N. 328 S. 492). 14 *scribendi cacoethes*: Juvenal, *Saturae*, 7, 52.

40. DE STUDIO INTENTIORE GEOMETRIAE
[Juli – 27. August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 316. 1 Bl. 2°. 2 S.
Cc 2, Nr. 1224 B

Datierungsgründe: s. N. 39.

De studio intentiore Geometriae ab intelligentia, communi remotae, et Mathematicis disciplinis in universum varias hominum etiam prudentium sententias esse video. Nam qui in negotiis versantur, nec alias veritates curant, quam unde rem facere possint, levi verborum notitia contenti, ne in congressibus hominum absonu loquantur, reliqua ingeniariis quos vocant, aut professoribus transcribunt; illis praxin mathematicarum, his contemplationem et contemplatione eo minus delectantur, quo magis ab ostentatione aut quaestu remota est. Interiorem horum notitiam, homine civili indignam putant, quemadmodum et poëseos et musicae et chymiae, et cujuslibet alterius artis peculiaris sive manuariae sive liberalis, cujus intimos recessus artificibus relinquendos arbitrantur. Sed cum his facile transigemus sententiamque profecto enim eorum non esse contemnendam fatebimur; neque abnuemus unum hominem raro multis sufficere quin etiam plerumque aptiores esse negotiis qui pares illis sint, non supra: et principes ipsos, qui innocuis horum studiorum deliciis capti gubernaculi clavum dimisere, rebus suis male prospexisse, nescio enim quo fato factum sit ut tres magni Reges, quorum nominibus inscriptas habemus Tabulas Astronomicas, in Hispania Alfonsus, in India cis Gangem, Ulug-bei, unus ex Mogoribus Tamerlanis posteris, in Germania Rudolphus, omnes a liberis vel cognatis pulsi aut certe in ordinem redacti sint. Quae tamen omnia illis non praejudicant, qui sciunt tenere, ut ille ajebat, *ex sapientia modum*. Equidem et purpuratos tres, et principes, imo si placet pontifices Maximos, juvit potius quam distinuit Poësis; et quoniam de Mathematicis agitur, habemus habuimusve nostro tempore Ferdinandum III Caesa-

6 f. et ... universum *erg. L* 10 f. his *(1)* theoriam *(2)* contemplationem *L*

20 Tabulas Astronomicas: *Libro de las tablas alfonsíes*; Ulugh Beigh, *Zīj-i Sultānī*; J. Kepler, *Tabulae Rudolphinae*, 1627. 20 Alfonsus: Alfons X. 21 Rudolphus: Kaiser Rudolf II. 23 ajebat: Tacitus, *Agricola*, 4, 3.

rem, et Carolum II. magnae Britanniae Regem; et ex Ducibus egregiis, Virisque militari disciplina inclitis; Robertum Palatinum, Mauritios Nassovios et non indignum memorari Paulum Wurtium; qui propriis et meditationibus eo pervenere, ut possent primis artificibus conferri; ex togato autem ordine, ut Cardinalem Cusanum velut longinquiorem praeteream, Cancellarius Angliae Baconus, et Johannes de Wit Hollandiae et Westfrisiae pensionarius, nunquam cuiquam crediti sunt nimio harum scientiarum amore res suas publicasve neglexisse. Et ut ad eos qui medii sunt subsellii veniam, nemo ignorat, Vietam magistrum libellorum supplicum, et Peirescium ac Fermatium Senatores illum in Aquae-sextiensi hunc in Tolosana curia cum laude fuisse. Nec viventes memoro nihilo his inferiores; nec in amplo adeo argumento plures conquiro, praesertim cum indicem etiam aliorum hujus ordinis Mathematicorum confectum sciam. Et haec quidem illis satisfactura credo quibus haec studia non nisi hominibus ad calculos velut ad metallum, damnatis, digna videri possent.

Accuratius mihi cum aliis agendum est, viris philosophis et veritatis studio ac naturae indagationi deditis quibus videtur Geometriam mediocrem philosopho necessariam, exquisitam superfluam esse. Ita enim arbitrantur studia omnia ad vitae commoda dirigenda, quare in id incumbi a nobis debere, ut potentia generis humani in res circumjacentes augeatur; quam in rem sufficere arbitrantur Geometriam qualem habemus, neque in ea aliquid facile superesse quaerendum quod magni ad humana commoda sit momenti: nec diffitentur utile esse, ut sint aliqui qui subtilitatibus illis toti se dedant, saltem conservandi ornandique semper atque animandi studii tam praeclari causa, sed qui ingenio sint philosophico eos meminisse debere, ad alia sese a natura vocari. Haec non inepte et partim vere dicuntur. Illud enim omnino probo, non debere veritatis universae studiosum ad Geometriam velut ad Sirenum Scopulos obhaerescere, illud vero non credo ingenium excolere. Quaerenti, Geometriam, superficiariam sufficere; et multa ad huc a Geometris dari posse arbitror in humanos usus neque illud denique admitto, quod ajunt unicum hunc esse debere studiorum finem, ut hujus vitae commodis in nostrum aut publicum

10 indicem: Im Druck verfügbar war zu dieser Zeit G. J. Vossius, *De universae mathesios natura et constitutione*, 1650. Leibniz bezieht sich aber vielleicht auf C. M. Dechales, *Tractatus proemialis de progressu matheseos, et illustribus mathematicis*, gedr. in ders., *Cursus seu mundus mathematicus*, 2. Aufl., 1690, Bd 1, S. 1–108; der Druck dieser Einleitung in Form eines Katalogs mathematischer Werke war bereits für die erste Ausgabe des *Cursus* von 1674 erwartet worden, wie aus dem Brief von Leibniz an Oldenburg vom 24. Mai 1673 hervorgeht (vgl. III, 1 N. 20 S. 94). 12 ad metallum: vgl. Stufe *(1)* der Variante zu N. 39 S. 428 Z. 11 f. 24 Sirenum Scopulos: vgl. Vergil, *Aeneis*, 5, 864.

usum consulamus. Ita igitur sentio qui aliquid praeclari circa veritatis indagationem moliatur, eum interiora Geometriae inspicere debere, tum ut cautiones discat, quibus illa demonstrationes suas munit tum ut artes cognoscat, quibus latentia detegit, quibus duobus pulcherrima judicii pariter atque inventionis specimina continentur; ita ut Geometria Logicae verae velut exercitium videatur, vel ideo utilissimum, quod nunquam laboretur in vanum, et notae quaedam veritatis habeantur, quae manu tangi possint; quibus assuefactus secure ad illa sola ratiocinatione definienda progrediatur, in quibus experimenta veritatis aut in hac vita non habentur, aut sera periculosaque aut certe sumtuosa sunt. Itaque si quis eo pervenerit in Geometria, ut quaestiones difficiles proprio marte solvere possit, eum ad alia gradum facere posse puto. Sed cavendum est ne quis hic erret, et magnum se Geometram esse arbitretur, cum vix in limine haereat, quod multis video contingere qui Algebram, certe qualis extat didicere. Cum enim facile sit problemata vulgaria et faciliora reducere ad aequationes, ac deinde si non in lineis certe in numeris prope veris solvere; hoc ubi successit Geometriam se post terga reliquisse arbitrantur, decepti verbis magistrorum nimia spondentium. In quo quantum a vero aberrent, tum demum sentient cum Geometriam applicabunt ad naturam, ac de pendulis, de se restituentibus, de vi machinarum, de motu liquidorum, de frictionum detrimento, de Musica, de Optica, de re nautica, et Astronomica; et quin etiam de alea et combinationibus, et eo quod interest, elegantiora nec tum protrita sibi problemata proponent, aut etiam nonnulla quae jam apud autores soluta habentur per se investigabunt. Tum demum agnoscent, esse quandam inveniendi artem algebra adeo superiorem; et ut sine illa ne ipsa quidem algebra promoveri possit. Promotam enim a se ille sciat, qui aequationum superiorum ut gradus quinti sextique radices irrationales (id est in quovis gradu generales) exhibere poterit. Sed mittamus Algebram; de usu geometriae in natura et mechanicis illud monere contenti, saepe centris gravitatis aut percussionis, quadraturis item, et summis serierum, saepe etiam quaestionibus methodi tangentium inversae, ut vocare soleo, opus esse; in quibus omnibus qui nescit haerere analysin vulgo jactatam, is satis testatur usum se tutissima arte evitandi difficultat⟨em⟩ quae est, nihil difficile quaerere. Unde fugient eum mirae subtilitates quibus se quaerentibus nunc ostendit, nunc subtrahit natura; et pulcherrima inveniendi artificia, longe Geometricis inquisitionibus (etsi in Geometria illustrius ⟨luce⟩ntia) generaliora; et praecipitia errorum, in speciem veri exornatorum, quae

13 deinde *(1)* sive numeris Vietae, sive Cartesii lineis solvere, hoc illi ubi saepe succedere vident, jam se Geometriam post terga reliqvisse arbitrantur, non tamen ⟨iis⟩ semper constructiones Geometricas usui *(2)* si *L*

in re mechanica fallunt plerosque nec nisi a magnis Geometris deteguntur; dici enim non potest quam lubricum sit iter in quibusdam inquisitionibus mechanicis nisi Geometriae Archimedeae filo regatur; Archimedeae autem geometriae problemata Algebrae certe qualis extat, non subsunt, nec ad aequationes reducuntur, quas tertii aut quarti aut ullius alterius gradus esse dici possint, nisi quis ea malit dicere gradus infinitesimi. Possem omnia exemplis ostendere si prolixitatem locus pateretur: quare illud habendum est, qui artem vitandi paralogismos, et difficilia eruendi ad reliquas philosophiae partes afferre velit, in Geometria profundiore non perfunctorie versatum esse debere.

Illud tamen libenter dabo, hominem ingenio combinatorio (ut a me vocari solet) a natura donatum; multa pulchra et utilia detegere posse sine ullo Geometriae, aliarumque scientiarum subtiliorum auxilio. Sunt enim quaedam inventa tantum effectus combinationis cujusdam felicis, sive animadversionis simplicis, et paucis verbis tota dicuntur; haec ut invenirentur tantum opus erat eundem hominem duas aut plures res simul cogitare, quod fortunae est; tametsi illa nunquam hominibus combinatorio ingenio praeditis, et varia animo agitantibus in tanta inveniendorum multitudine desit: et haec quidem partim fortunae partim ingenio tribuenda sunt. Sunt alia quae soli fortunae debentur, ut experimenta quaedam rara quae qui invenit non quaerebat; et talia nemo sibi spondere potest; sunt denique in quibus sola ingenii vis ipsa per se sibi viam facit per difficultates, quodam analyseos genere et in his praeclarus est usus Geometriae. Concludo igitur Medicum aut Chymicum industrium egregia experimenta incidere posse sine Geometria, et a mechanico combinationes institui posse pulchras, sed quae ubi semel in mentem venerint nihil habeant difficultatis; sed difficilia eruere, et in ratiocinationibus longe productis a paralogismis sibi cavere, non nisi eos posse qui ingenio sunt geometrico; saepe ne hos quidem, nisi cum ipsam Geometriam diligentius exercuerunt.

24 exercuerunt *(1)* ; qvemadmodum multi natura ad calculos numerorum | ita *erg.* | apti sint, ut pleraqve per se *(a)* reperire *(b)* solvere possint, qvos tametsi superfi *(2)*. *L*

9–24 Illud ... exercuerunt: vgl. N. 49_1 S. 487 Z. 22 – S. 494 Z. 5.

41. DE OPERIS ARGUMENTO ET AUXILIIS
[Juli – 27. August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 5. 1 Bl. 2°. 1 $\frac{1}{2}$ S.
Cc 2, Nr. 1224 E

Datierungsgründe: s. N. 39.

Superest ut pauca de operis argumento et auxiliis dicam quibus usi sumus.

Duo sunt genera summa problematum Geometricorum; alia enim sunt in potestate, et calculi tantum laborem postulant, alia nemo (qui non nisi publicatas hactenus artes novit) se certo intra praestitutum tempus; soluturum spondere ausit. Hoc discrimen Cartesio non ignotum fuit equidem, sed dissimulatum; ait enim quicquid sub Geometricam contemplationem cadit ad certi gradus aequationem revocari et methodo Geometriae ab ipso datae solvi posse. Quod eos fere in errorem induxit qui plus magistro quam propriae meditationi debent, neque enim nisi vulgaria ac faciliora problemata aequationibus subjiciuntur, cum scilicet ex datis quibusdam rectis earumve relationibus aliae quaeruntur rectae, sed cum curvilineae quantitates, et quae ex his pendent anguli, logarithmi, centra gravitatum, calculum ingrediuntur; cessat Algebra, quae hactenus publice nota est. Talia autem problemata ad aequationem non revocantur; nec dici potest cujus sit gradus quadratura circuli, planumque an solidum locum desideret, cum dici possit gradus esse nullius nisi forte infinitesimi. Itaque si quis in triangulo ex datis angulis et latere uno reliqua quaerat latera sine tabulis, is frustra aequationes et Algebram tentabit, nisi materiam praeparaverit artibus quarum specimina primus mortalium, quod nobis quidem constet, exhibuit Archimedes. Sed ejus methodus ab ipso magna cura dissimulata, ac quantum judicare possum ne ab ipsis quidem veteribus satis intellecta est, quoniam nemo eorum quicquam memorabile Archimedis inventis adjecit in hac Geometriae parte. Nostro seculo egregii quidam Geometrae arcanos viri sensus altius rimati sunt, et praeclaris accessionibus Geometriam locupletavere; ex quibus eminent Guldinus, et Cavalerius, et P. Gregorius a S. Vincentio, et Fermatius, et Pascalius, nam Cartesius Archimedeam Geometriae partem non exercuit, quod Analysi suae non perinde subjectam videret. Secutus est Wal-

6 Superest: vgl. N. 39 S. 430 Z. 23. 6 de operis argumento: vgl. N. 39 S. 427 Z. 11. 7–439,15 Duo ... aequalitatem: vgl. N. 49_1 S. 503 Z. 12 – S. 514 Z. 15. 10 ait: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–5.

lisius, qui inductionibus omnium primus usus est in Geometria, longeque scientiae pomoeria protulit neque enim video quid prohibeat conjecturis uti non ad demonstrandum quidem, attamen ad inveniendum. Non multo post Hugenius Conoidis Parabolici Superficiem invenit, in circulum explanavit et curvam Parabolae ad Hyperbolae quadraturam reduxit. Denique Wrennius longitudinem curvae cycloidis et sive Neilius sive Heuratius, aliam curvam ex analyticarum numero multasque alias similes extendit in rectum.

Nondum tamen post tot praeclara specimina reperiri potuit Methodus certa et determinata, qua problemata hujusmodi solvi aut impossibilitas demonstrari posset; unde coacti sunt Geometrae confugere ad subsidiarias artes, quae etsi nondum omnino satisfaciant votis, usu tamen saepe perfectis solutionibus non cedunt. Primus appropinquandi

10 cedunt. *(1)* Primus omnium Vicecomes Brounker Societatis Regiae Anglicae praeses dignissimus expressit aream portionis cuiusdam hyperbolicae per infinitam seriem numerorum rationalium. Mercator diversa plane ac pereleganti ratione rem longius produxit: consideravit enim numerum fractum exprimi posse serie integrorum infinita, *(a)* ut „$\frac{1}{1+x}$ esse aeqvale qvantitati: $1-\frac{x}{1+x}$. et $\frac{x}{1+x}$ aeqvari huic $x-\frac{x^2}{1+x}$. et $\frac{x^2}{1+x}$ huic $x^2-\frac{x^3}{1+x}$ et ita porro, ac proinde omnibus collectis $\frac{1}{1+x}$ aeqvari seriei $1-x+x^2-x^3$ etc. *(aa)* Jam per arithmeticam infinitorum summa omnium 1 est x novissima; et summa omnium x est $\frac{x^2}{2}$ novissima *(bb)* Sit jam curva cuius abscissa sit x, ordinata $\frac{1}{1+x}$, | qvalis est Hyperbola *erg.* | vel $1-x+x^2-x^3$ etc. erit summa omnium ordinatarum praecedentium seu area figurae, $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ etc ut notum est ex qvadraturis parabolarum. Sed qvoniam haec methodus ad eas tantum curvas spectat qvarum ordinatae sunt rationales abscissis positis rationalibus, qvod in circulo non fit, ideo inventa a me est curva rationalis cuius area circulo ordinatae aeqvipollet. Ejus *(b)* unde logarithmotechniam duxit perelegantem. Ego reciprocam excogitavi rationem ex dato logarithmo

1 usus: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I S. 355–478). 4 f. invenit ... reduxit: vgl.: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 72–9 [Marg.] (*HO* XVIII S. 211–221). 6 extendit: Die Rektifikation der Zykloide durch Chr. Wren und der semikubischen Parabel durch W. Neile wurden erstmals gedruckt in J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 72–76, 90–98 (*WO* I S. 535 bis 537, 550–555); H. v. Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520. 12 expressit: W. Brouncker, *The squaring of the hyperbola*, in: *Philosophical Transactions* III, Nr. 34 vom 23. April/3. Mai 1668, S. 645–649. 13 produxit: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 28–33 [Marg.]. 21 inventa: vgl. N. 1. 22 excogitavi: vgl. N. 32 S. 373 Z. 1–5, N. 34 S. 390 Z. 8–13 sowie N. 35.

exemplum dedit Archimedes libro de Magnitudine Circuli, cujus vestigiis institit Ludolphus Coloniensis; sed posteriores Geometrae Vieta, Snellius, at maxime Hugenius praeclara in eam rem compendia reperere. Wallisius elegantem dedit modum appropinquandi in numeris rationalibus; sed toti tantum Circulo non vero et partibus aptatum. Gregorius serierum convergentium, usum ad quadraturas ostendit. Nam series duas unam polygonorum inscriptorum crescentem; alteram polygonorum circumscriptorum decrescentem, vocat convergentes, quarum concursus est in ipso Circulo; modumque tradit qua series istae saltem per appropinquationem terminari possint.

Sed alia restabat via per series infinitas quantitati quaesitae perfecte aequales, quae tantum praestant appropinquationibus, quantum aequatio determinationi. Nam cum Circulum ajo aequari huic seriei infinitae

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc. posito quadratum circumscriptum esse 1.}$$

utique plus aliquid dico, quam si modum appropinquandi exhiberem. Omnis enim series infinita continet appropinquationem quantumlicet exactam; sed praeterea veram quandam exactamque aequalitatem.

inveniendi numerum; Jacobus Gregorius Scotus elegantem modum dedit, qvo series convergentes ut ille vocat, qvales sunt polygonorum extra et intra curvam possunt nonnunqvam Geometrice, semper mechanice terminari, id est inveniri qvantitas in qva una series alteri occurrit qvod etiam ad qvadraturas nonnunqvam utile est. *(2)* Qvoniam an *nicht gestr. (3)* Primus *L*

1 dedit: Archimedes, *Dimensio circuli*. 1 institit: Ludolph van Ceulen, *Vanden Circkel*, 1596. 3 reperere: Fr. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593 (*VO* S. 347–435, insbesondere S. 398–400); W. Snell, *Cyclometricus*, 1621; Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654 (*HO* XII S. 113–181). 3 dedit: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191, S. 178–182 (*WO* I S. 467–469). 5 ostendit: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667. 16 dedit: *a. a. O.*

42. DE CALCULO TABULAE ARCUUM

[1. – 27.] August 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 111. Streifen von max. 13,2 x 35 cm. 2 S. Gegenläufig beschrieben. Textfolge Bl. 111 v°, 111 r°.
Cc 2, Nr. 1517

Datierungsgründe: Leibniz übernimmt Rechenergebnisse aus N. 42 in das Stück N. 43, das vermutlich vor seinem Brief an Oldenburg vom 27. August 1676 (III, 1 N. 89_2) verfasst ist (s. N. 43).

Aug. 1676

Utile erit calculari tabulam arcuum in qua exprimatur eorum longitudo ad radium positum v. g. 100,000. Inveni autem si sit radius 100000 et peripheria 628318 fore minutum secundum $\dfrac{484862 - \frac{1}{9} - \frac{1}{162} \sqcap b}{100,000}$ praecise. Nam minutum secundum est pars 129600ma peripheriae.

Ergo ponamus $\dfrac{628381}{129600} \sqcap \dfrac{b}{100,000}$ erit b numerus quaesitus decimalis.

$b \sqcap \dfrac{628381000}{1296} \not\int 484862 \boxed{-\dfrac{152}{1296}} - \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{162}$ (nam $-\dfrac{152}{1296} \sqcap -\dfrac{144}{1296} - \dfrac{8}{1296}$. $\dfrac{144}{1296} \sqcap \dfrac{1}{9}$ et $\dfrac{8}{1296} \sqcap \dfrac{1}{162}$).

---

9 *Darüber:* #

9 tabulam *erg. L* 11 secundum *(1)* 31255– *(2)* $\dfrac{484862 - \frac{1}{9} - \frac{1}{162} \sqcap \mathrm{b}}{100,000}$ *L* 15 $\sqcap \dfrac{1}{162}$) *(1)* $\dfrac{628381}{100000}$ *(2)* $\dfrac{628318}{100000} \sqcap$ *(3)* imo *L*

---

10 Inveni: vgl. N. 33; Leibniz übernimmt von dort die fehlerhaften Werte, insbesondere 129600 und 628381, die er am Ende des Textes durch die richtigen ersetzt. 17 31255: vgl. N. 27 S. 307 Z. 9.

Imo erravi sumendum dimidium. Nam si radius 100,000, est peripheria solum 314159. Ergo minutum secundum erit $\dfrac{242431 - \dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{324}}{100,000}$.

$\dfrac{314159}{100000} \sqcap \dfrac{\pi}{r}$. Ergo $r \sqcap \dfrac{\pi 100000}{314159}$. Est autem $\pi \sqcap 129600s$. posito s. minuto 2do. Ergo erit $r \sqcap \dfrac{12960000000}{314159}$. Imo $r \sqcap \dfrac{\pi 100,000}{628381}$ et $\dfrac{391}{1215}\, r \sqcap \dfrac{391,6,6,6,6,00,00,000}{7,3,3,3,3,3}$ seu $\sqcap \dfrac{391,2,2,2,2,0000000}{7,3}$.

Examinandum radius quot sit graduum minutorumque primorum et secundorum.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & \cancel{1} & & \cancel{1} & & & & & \\
 & & & & \cancel{6} & \cancel{9} & \cancel{4} & & & & & \\
 & & & \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{1} & \cancel{5} & -1 & -1 & & & \\
 & & & \cancel{7} & \cancel{9} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{1} & -1 & & & \\
 & & \cancel{3} & \cancel{8} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{8} & \cancel{4} & \cancel{2} & -2 & & \\
 & & \cancel{4} & \cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{7} & 0 & & \\
 & & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{5} & -7 & \\
\cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{6} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & \not{f}\ 41253 - \dfrac{1227}{314159}. \\
 & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \\
 & & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} & & \\
 & & & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & & & \\
 & & & & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{4} & & & & \\
 & & & & & \cancel{3} & \cancel{1} & & & & &
\end{array}
$$

3 *(1)* $\dfrac{314190}{100000}$ *(2)* $\dfrac{314159}{100000}$ *L* 4 imo r $\sqcap \dfrac{\pi 100,000}{628381}$ *erg. L*

1 erravi: Leibniz verwendet in der Folge irrtümlich wiederholt den halben Wert für das Verhältnis von Umfang und Radius des Kreises. 4 $\dfrac{391}{1215}$: vgl. N. 27 S. 4 Z. 18–23. Im Nenner des Bruches auf der rechten Seite müsste der erste Faktor 5 lauten, außerdem fehlt der Faktor 628381.

Radius ergo est $41253 - \frac{1227}{314159}$ partium qualium peripheria est 129600. Imo dimidium est. Scribendum rad ⊓ $20627\frac{1}{2} - \frac{1227}{628381}$.

Volumus jam arcum quaerere cujus tangens sit radii pars tertia, eum invenimus $\frac{391}{1215}$ radii tam prope, ut error sit minor quam $1\frac{1}{3}$ secundi. Multiplicetur 41253 per 391. productum dividatur per 1215 vel potius 41253 dividatur per 1215. productum multiplicetur per 391. fiet:

$$\begin{array}{cccccc} & & & -2 & & \\ & \cancel{4} & \cancel{8} & -4 & & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{9} & 0 & & \\ \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{5} & 3 & \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{5} & \\ & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & & \end{array} \quad \text{ſ} \quad 34 + \frac{3}{1215} - \frac{60}{1215} \sqcap 34 - \frac{57}{1215}.\ 34 \text{ secund.} - \frac{57}{1215}\text{,, per 391.}$$

Est autem 34 secund. $\frac{1}{2}$ minut. + 4 sec. Ergo fiet

$$\boxed{\frac{391}{2} \text{ min.}} \quad \boxed{\frac{391}{120} \text{ gr.}} \qquad + \qquad \underbrace{4,391 \text{ sec.}} \qquad - \qquad \underbrace{\frac{57,391}{1215} \text{ sec.}}$$

$$\frac{\overset{3}{\cancel{391}}}{\cancel{120}} \text{ gr.} \sqcap 3 \text{ gr.} + \frac{1}{4} \text{ gr.} + \frac{1}{2} \text{ min.} \qquad 24 \text{ min.} + 2 \text{ min.} + 4 \text{ sec.} \qquad 18 \text{ sec.} - \frac{231}{1251}$$

$$\begin{array}{lll} 3 \text{ gr.} + 15 \text{ min.} + & 4 \text{ sec.} & \\ \quad \boxed{+ \frac{1}{2}} & + 18 & \\ \quad + 24 & 30 & \\ \quad + \ 2 & & \\ 3 \text{ gr.} + 41 \text{ min.} + & 52 \text{ sec.} & \end{array}$$

1 f. imo ... $\frac{1227}{628381}$ *erg. L*

---

2 rad ⊓: Richtig gerechnet müsste $20626\frac{1}{2} - \frac{1227}{628318}$ als Ergebnis stehen. 15 18 sec. $- \frac{231}{1251}$: Leibniz hat in der zugehörigen Nebenrechnung versehentlich durch 1251 dividiert; vgl. N. 27 S. 4 Z. 23. In Z. 17 müsste −18 und in Z. 20 müsste + 16 stehen.

$$
\begin{array}{r}
\cancel{1} \\
\cancel{2}\cancel{6} \\
\cancel{1}\cancel{9}\cancel{7} \\
\cancel{3}\cancel{3}\cancel{1}79 \\
\cancel{3}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{2} \\
\cancel{4}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{7}8 \\
\cancel{1}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{2}\cancel{3} \\
\cancel{1}\cancel{2}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5} \\
\cancel{1}\cancel{2}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} \\
\cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2} \\
\cancel{1}\cancel{1}
\end{array}
\quad \text{ƒ } 13275\,\frac{798}{1215}.
\qquad
\begin{array}{r}
3 \\
\cancel{2}\cancel{6} \\
\cancel{4}\cancel{4}1 \\
\cancel{1}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{7}5 \\
\cancel{3}\cancel{6}\cancel{6}0 \\
\cancel{3}
\end{array}
\text{ƒ } 36 : \cancel{3}15 \text{ ƒ } 5.
\quad
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ \cancel{6}0 \\ \\
\end{array}
$$

36 grad. $5\frac{1}{2}$ min. Imo dimidium sumendum: 18 + etc.

---

15 *Nebenrechnungen:*

$$
\begin{array}{r}
391 \\
57 \\
\hline
2737 \\
1955 \\
\hline
22287
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1 \\
\cancel{2}0 \\
\cancel{9}\cancel{3}2 \\
\cancel{1}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{7}0 \\
\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{7} \\
\cancel{1}\cancel{2}\cancel{5}\cancel{1}\cancel{1} \\
\cancel{1}\cancel{2}\cancel{5}
\end{array}
\text{ƒ } 17 + \frac{1020}{1251} \sqcap 18 - \frac{231}{1251}
$$

7 *Nebenrechnung:*

$$
\begin{array}{r}
41253 \\
391 \\
\hline
41253 \\
371277 \\
123759 \\
\hline
1\cancel{6}12\cancel{9}\cancel{9}2\cancel{3}
\end{array}
$$

Radius est $20627 + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1227}{628381}}_{\sqcap\ \frac{628381 - 2454}{1256762}}$. Erit radius $20627 + \frac{625927}{1256762}$ secund.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & \cancel{1} & \cancel{1} & & \\
 & & & \cancel{4} & \cancel{9} & & \\
 & \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{1} & & -1 \\
 & \cancel{7} & \cancel{7} & \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{2} & \\
\cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{0} & -3 \\
\cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{5} & 7 \\
\cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} \\
 & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \\
 & & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{2} & & \\
 & & & \cancel{1} & & &
\end{array}
\quad \text{ſ } 6638 - \frac{13}{1215} \text{ secund.}
\qquad
\begin{array}{r}
1 \\
\cancel{6} \\
\cancel{3}\cancel{0}5 \\
\cancel{6}\cancel{6}\cancel{3}8 \\
\cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{0} \\
\cancel{3}\cancel{6}
\end{array}
\quad \text{ſ } 18 \text{ gr.} + \frac{158}{360} \sqcap \frac{b}{60}.
$$

Peripheria habet 360 grad. Ergo peripheria habet minuta secunda:
grad. ..... 60 min.
min. ..... 60 sec.

$$
\begin{array}{r}
36000 \\
36 \\
\hline
216 \\
108 \\
\hline
1296000
\end{array}
$$

Peripheria est ad rad. $\begin{array}{l}\text{ut } \frac{62831858}{10000000}.\\ \text{ad}\end{array}$ $\frac{\pi \sqcap 1296000}{r}$. Ergo

---

8 *Nebenrechnungen:*

$$
\begin{array}{r}
20627 \\
391 \\
\hline
20627 \\
185643 \\
61881 \\
\hline
8065157
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\cancel{6}\cancel{6}38 \\
\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}0
\end{array}
\quad \text{ſ} \quad
\begin{array}{r}
111:111 \\
60
\end{array}
$$

18 *Daneben:* $\frac{AB + C}{B} \sqcap A + \frac{C}{B}$

8 18 gr. + *(1)* $\cancel{1}\overset{3}{\cancel{5}}8$ ſ 2 min. + 38 sec *(2)* $\frac{158}{360}$ L

$$
\begin{array}{r}
35 \\
24\cancel{3}\,\boxed{\cancel{3}}\;\;1 \\
\cancel{1}\,\boxed{\cancel{8}\,\cancel{6}}\,4\,\underline{4\,\cancel{2}} \\
\cancel{3}\,\cancel{3}\,\cancel{3}\,\cancel{8}\,\cancel{2}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,\boxed{6\,6} \\
\cancel{4}\,\cancel{9}\,\cancel{8}\,\cancel{6}\,\cancel{3}\,\cancel{2}\,\cancel{6}\,\underline{\cancel{7}\,\cancel{7}} \\
\cancel{5}\,\cancel{0}\,\cancel{6}\,\cancel{8}\,\cancel{4}\,\cancel{8}\,\cancel{4}\,\cancel{5}\,\cancel{2}\,\underline{\boxed{2}} \\
\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{9}\,\cancel{6}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,0\,0 \\
\cancel{6}\,\cancel{2}\,\cancel{8}\,\cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{8}\,\cancel{5}\,\cancel{8}\,\cancel{8}\,\cancel{8}\,\cancel{8} \\
\cancel{6}\,\cancel{2}\,\cancel{8}\,\cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{8}\,\cancel{5}\,\cancel{5}\,\cancel{5} \\
\cancel{6}\,\cancel{2}\,\cancel{8}\,\cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{8}\,\cancel{8} \\
\cancel{6}\,\cancel{2}\,\cancel{8}\,\cancel{3}\,\cancel{1}
\end{array}
\qquad \text{ſ} \;\; 2061
$$

7 ſ 2061: Leibniz bricht die fehlerhafte Rechnung ab.

43. DE CALCULO ANGULI ET LOGARITHMI

[1. – 27. August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 113–114. 1 Bog. 2°. 3 S. Auf Bl. 114 v° VI, 3 N. 48. Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz greift im vorliegenden Stück zurück auf Rechenergebnisse aus N. 42, das auf August 1676 datiert ist. Teil 3 mit den Überlegungen zur Berechnung des Bogens aus dem Sinus complementi dürfte nach N. 36_2 und vor dem entsprechenden Abschnitt in III, 1 N. 89_2, S. 578–579, dat. 27. August 1676, entstanden sein. Ein Resultat aus N. 43 verwendet er in prop. L von N. 51.

[*Teil 1*]

Ut eo commodius methodo mea uti liceat, pro inveniendis angulis ex datis lateribus, utile erit invenire radii valorem in secundis scrupulis, id est quot scrupuli secundi circumferentiae componant radium, ratio inter radium et peripheriam ponatur esse quae 100000 ad 628318. Est autem peripheria 1296000 secundorum, ergo 129600000000 dividendo per 628318. habebitur radium esse scrupulorum secundorum $206275 - \frac{12270}{628318}$. Unde audacter poterit radius dici esse $\overline{206275}$ minut. secund.

Jam arcus quaeritur cujus tangens sit pars tertia radii, seu in triangulo rectangulo cujus latera circa rectum habent rationem ut 1 ad 3 quaeritur angulus quem latus minus subtendit. Posito radio 1. et tangente $\frac{1}{3}$. erit arcus $\frac{1}{3} - \frac{1}{3,27} + \frac{1}{5,243} - \frac{1}{7,2187}$. Utamur tantum tribus prioribus terminis, fiet $\frac{5,81-15+1}{5,243} \sqcap \frac{405-15+1}{1215} \sqcap \frac{391}{1251}$. Erit ergo arcus quaesitus ad radium circiter ut 391 ad 1251. Multiplicetur 206275 per 391. Productum dividatur per 1215 fiet $66380 + \frac{5,391}{1251} - \frac{13}{1215}$ sec. Neglecto $-$ et quia $\frac{5,391}{1251}$ est

14 radium *(1)* esse $20627 + \frac{625927}{1256762}$. scrupulorum secundorum, seu $20627 + \frac{1}{2} - \frac{1227}{628381}$ *(2)* esse *L*

14 206275: vgl. N. 42 S. 442 Z. 2. 19 $\frac{391}{1251}$: Richtig wäre im Nenner 1215; vgl. N. 42 S. 442 Z. 15. Das Versehen und ein weiterer Fehler beeinträchtigen das Ergebnis der Abschätzung nicht.

$\frac{1955}{1251}$ fiet $1 + \frac{755-13}{1251} \sqcap \frac{742}{1251}$. Ergo arcus erit $\overline{66381 + \frac{742}{1251}}$ sec. Jam peripheria habet

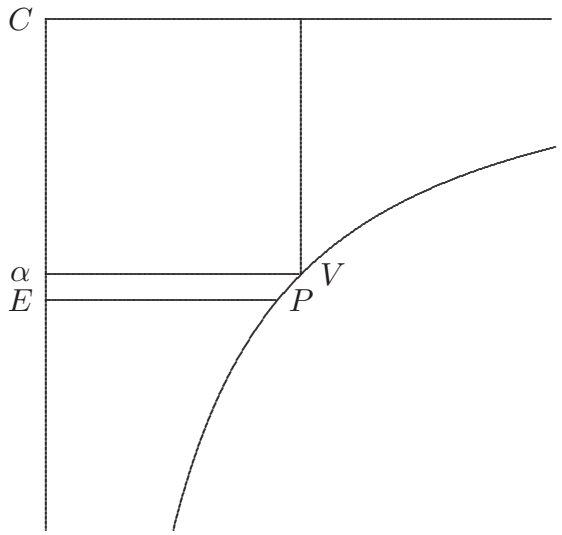
1 296 000	secunda. Gradus habet	3600 sec.	Minut. 60 sec.
21 600	minut.	60 minut.	
360	grad.		

Ergo si dividas numerum secundorum in arcu quaesito inventorum per 3600 numerum secundorum in grad. habebitur numerus graduum

1					
~~0~~					
~~3~~~~0~~5			~~3~~2		
~~0~~~~0~~~~3~~81	~~f~~	18 gr.	~~1~~~~5~~~~8~~1	~~f~~	26
~~3~~~~0~~~~0~~00			~~0~~~~0~~0		
~~3~~					

et fiet arcus 18. gr. 26. min. 21. sec.

[*Teil 2*]



[*Fig. 1*]

$C\alpha \sqcap 1.\ \alpha E$ aequ. $\frac{1}{10}$ erit CE aequ. $\frac{11}{10}$ et EP aequ. $\frac{1}{\frac{11}{10}}$, sive $\frac{1}{1+\frac{1}{10}}$. Ergo spatium $V\alpha EPV$ erit $\underbrace{\frac{1}{10}-\frac{1}{200}}+\underbrace{\frac{1}{3000}-\frac{1}{40000}}+\underbrace{\frac{1}{500000}-\frac{1}{6000000}}$ etc.

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{200} \sqcap \frac{190}{1,2,00} \sqcap \frac{19000}{120000}.$$

$$\frac{1}{3000}-\frac{1}{40,000} \sqcap \frac{40-3}{120,000} \sqcap \frac{37}{120,000}.$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{60} \sqcap \frac{60-5}{30,} \sqcap \frac{55}{30,00,000}.$$

$$\frac{19037}{120,000}+\frac{55}{3000000}[\sqcap]\frac{1903700+220}{12000000} \sqcap \frac{103920}{12000000} \sqcap \frac{5186}{600000} \sqcap \frac{2593}{300000}.$$

---

1 f. *Nebenrechnungen:*

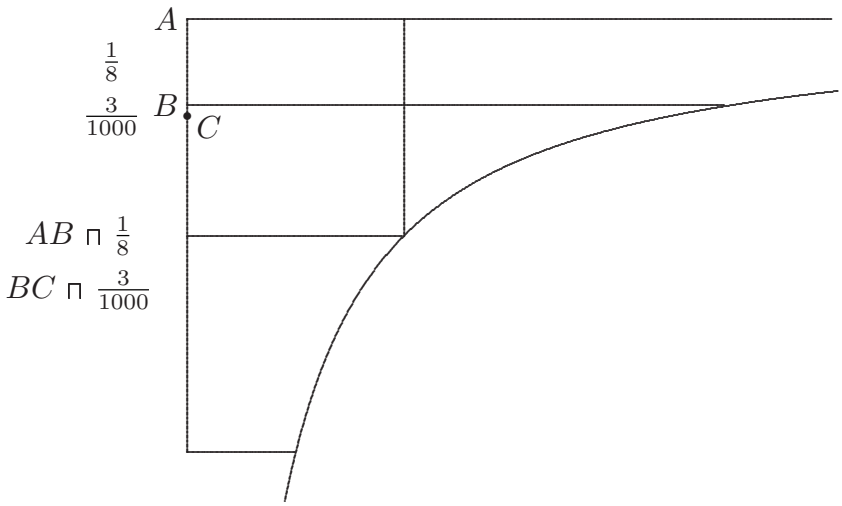
11	121	14641	qq.	19487171	
11	11	11		11	
11	121	14641		19487171	
11	121	14641		19487171	
121	1331	161051	surdesol.	214358881	8^{vus} gradus
	11	11			
	1331	161051			
	1331	161051			
	14641	1771561	qcub.		
		11			
		1771561			
		1771561			
		19487171	7. grad.		

3 *Hinter* $\frac{19000}{120000}$*:* Error. Debet esse $\frac{19000}{1,2,0000}$.

---

3 $\sqcap \frac{190}{1,2,00}$: Richtig wäre $\frac{190}{2000}$. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit weiteren Versehen die Abschätzung. Leibniz bemerkt die Unstimmigkeit, gibt aber einen falschen Wert an und korrigiert die Rechnung nicht. Richtig rechnet er in N. 48 S. 469 Z. 11 – S. 470 Z. 2 u. S. 479 Z. 5–7 .

Quaeritur log. a 10. Inveniamus a 250 id est a 25 in 10. Habebimus et a 10 ex dato a 2. Est enim 5^3 in 2. Inveniemus a 250. si habeamus a $\frac{1}{250}$. Est autem notus log. ab $\frac{1}{256}$. Quaeratur differentia inter $\frac{1}{250}$ et $\frac{1}{256}$. Ea est $\frac{256-250}{250,256} \Big| \frac{6}{64000} \Big| \frac{3}{32000}$ eritque $\frac{1}{250} \sqcap \frac{1}{256} + \frac{3}{32000}$ vel $\sqcap \frac{1}{8} + \frac{3}{1000} \sqcap \frac{1024}{8000} \sqcap \frac{16}{125}$. Nam si hoc dividas per 32. habebis $\frac{1}{250}$ nam fit $\frac{1024}{8000}$ in $\frac{1}{32}$ dat $\frac{1024}{256000}$. Ergo quaerenda quantitas $\frac{d}{f} - \frac{d^2}{2f^2} + \frac{d^3}{3f^3}$ etc. ita ut d sit $\frac{3}{1000}$. et f. $\frac{1}{8}$.



[*Fig. 2*]

1–5 *Nebenbetrachtung:* $\frac{1}{250} - \frac{1}{256} \sqcap \frac{6}{64000} \Big| \frac{3}{32000}$. Ergo $\frac{1}{250} \sqcap \frac{1}{256} + \frac{3}{32000}$ cujus quaeritur logarithmus.

	$\cancel{0}$	
256	$\cancel{1}$	
250	$\cancel{22}$	
12800	$\cancel{256}\cancel{0}00$	$\cancel{f}$ 250
512	$\cancel{10}\cancel{24}\cancel{4}4$	
64000	$\cancel{10}\cancel{2}2$	
	10	

$\frac{d}{f} \sqcap \frac{3}{1000,\frac{1}{8}} \sqcap \frac{24}{1000} \Big| \frac{12}{500} \Big| \frac{6}{250} \Big| \frac{3}{125}. \frac{d^3}{6f^3} \sqcap \frac{27}{11718750} \sqcap \frac{9}{3906250 \sqcap 2,\overline{125}^3}. \frac{d^2}{2f^2} \sqcap$

$\frac{9 \frown 125}{\underbrace{31250}_{2,\overline{125}^2},125} \sqcap \frac{1125}{3906250}. \frac{d}{f} \sqcap \frac{3,2,\overline{125}^2}{125,,2,\overline{125}^2} \sqcap \frac{93750}{3906250}.$

$$\begin{array}{rr} + & 93750 \\ + & 9 \\ \hline + & 93759 \\ - & 1125 \\ \hline & 92634 \end{array}$$

erit $\frac{92634}{3906250}$ qui auctus log. ab 8. dat logarithmum a $\frac{16}{125} \sqcap \frac{1}{8} + \frac{3}{1000}$ vel a $\frac{32}{250}$.

---

1 f. *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 125 \\ 125 \\ \hline 625 \\ 250 \\ 125 \\ \hline 15625 \\ \\ 125 \\ 9 \\ \hline 1125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15625 \\ 125 \\ \hline 78125 \\ 31250 \\ 15625 \\ \hline 1953125 \\ 6 \\ \hline 11718750 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15625 \\ 6 \\ \hline 93750 \\ \\ \\ \\ 1953125 \\ 2 \\ \hline 3906250 \end{array}$$

8–451,1 $\frac{32}{250}$ | ubi ingentes fructus, qvod habito jam logarithmo 32 habetur log. 250 *gestr.* | si L

---

1 $\frac{d^3}{6f^3}$: Richtig wäre $\frac{d^3}{3f^3}$; Leibniz rechnet weiter bis Z. 7.

Si jam a log. $\frac{16}{125}$ auferatur logarithmus binarii quadruplicatus habebitur logarithmus ab $\frac{1}{125}$ seu quinarii triplicatus.

A 2. habetur log. a 64. Quaeratur log. a 64+2. Ergo log. a 64 addatur $\frac{1}{32} - \frac{1}{2,\boxed{2}32} + \frac{1}{3,\boxed{3}32} - \frac{[1]}{4,\boxed{4}32}$ fiet log. a 66. Auferatur log. ab 22. notus fiet log. a 3.

Log. a 20 habetur a 4 in 5. Quaeritur ab 21. id est 3. in 7. erit ad log. a 20 addendus $\frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{1}{16000} - \frac{1}{640000}$ fiet log. ab 21. Subtrahatur log. a 3. fiet log. a 7.

[*Teil 3*]

$$\frac{a^4}{24} - \frac{a^2}{2} + 1 \sqcap s.\ a^4 - 12a^2 + 36 \sqcap 24s + 12.$$

$$6 - a^2 \sqcap \sqrt{24s+12} \qquad a^2 - 6 \sqcap \mp\sqrt{24s+12}$$

$$6 - \sqrt{24s+12} \sqcap a^2 \qquad a^2 \sqcap \mp\sqrt{24s+12} + 6$$

$$a^2 \sqcap +\sqrt{24s+12} + 6$$

$$\frac{95}{100} \sqcap s \textit{ ohngefehr. } \frac{95 \frown 24}{100} \quad \Big| \quad \begin{array}{ll} \cancel{4} & \\ \cancel{95} \ \cancel{f} & 19 \\ \cancel{55} & \frac{31}{50} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a^4 & a^2 \\ \frac{97}{10000} & \frac{987}{10000} \end{array} \qquad 12a^2 \sqcap \frac{11844}{10000}. \quad \frac{2282530 + 1200000}{100000} \sqcap \frac{348253|0}{10000|0}.$$

$6 - \frac{1}{400} + \frac{1}{16000}$: Richtig wäre $-\frac{1}{800} + \frac{1}{24000}$.

$$\begin{array}{c} 34 \\ \not{9}\ \not{1}\not{4}\not{8}99 \\ \not{3}\not{4}\not{8}\not{2}\not{5}\not{3}\not{0}\not{0} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline 5\ 9\ 0\ 1 \\ \hline \not{2}\not{5}0\not{9}\not{8}\not{0}\not{0}\not{1} \\ \not{1}\not{1}\not{1}\not{1}\not{8} \\ \not{1} \end{array} \qquad 6 - a^2 \sqcap 5901. \qquad 6 - 5901 \sqcap a^2.$$

$$\frac{97}{1000} + \frac{36000}{1000} \sqcap \frac{36097}{1000} - \frac{1200}{1000} [\sqcap] \frac{34897}{1000}.$$

$$\boxed{\frac{970}{10000} - \frac{12000}{10000} + \frac{360000}{10000} \sqcap \frac{348970}{10000}}$$

$$\begin{array}{ll} a^4 - 12a^2 & 36 \sqcap 12 + 24s \\ -\dfrac{\sqrt{970}}{100} + \dfrac{600}{100} & \sqcap \dfrac{-\sqrt{348970}}{100} \\ \underbrace{-\dfrac{31}{100} + \dfrac{600}{100}}_{\dfrac{569}{100}} & \sqcap \end{array}$$

$$\frac{970}{10000} - \frac{12000}{10000} + \frac{360000}{10000}$$

$$\begin{array}{c} 9 \\ \not{3}\not{4}8970 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline 5 \\ \hline \not{2}\not{5}0 \\ 1 \end{array}$$

$$\frac{9}{100} - \frac{12,98}{100} \left| \frac{3,98}{25} \left(-\frac{294}{25}\right) - \frac{1176}{100} + \frac{3600}{100}. \quad \frac{3609 - 1176}{100} \sqcap \frac{2433}{100}. \right.$$

---

5 *Nebenbetrachtung:* $\dfrac{5901}{1000} + \dfrac{6}{1}.$ 11901

14 *Darunter und daneben:* v^2 v $\sqrt{-4}$

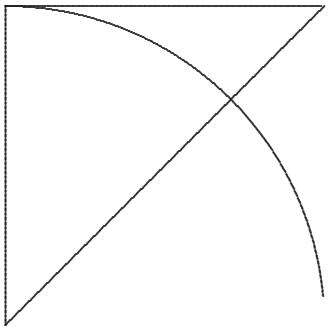
44. VARIAE NOTAE
[Juli – September 1676]

Überlieferung: *LuO* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Ozanam): LH 35 XIII 2c Bl. 152. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 152 v°. Auf Bl. 152 r° N. 45.
Cc 2, Nr. 1508 B

Datierungsgründe: Vermutlich sind die mit großzügiger Schrift ausgeführten Notizen des Gesprächs zwischen Leibniz und Ozanam auf ein leeres Blatt geschrieben worden, kurz bevor Leibniz mit kleinerer Schrift das Konzept N. 45 auf der Rückseite verfasste, das zwischen Juli und September 1676 entstanden sein dürfte (s. dort).

[*Teil 1*]

[*Leibniz*]



[*Fig. 1*]

$t. \quad a. \quad 1.$

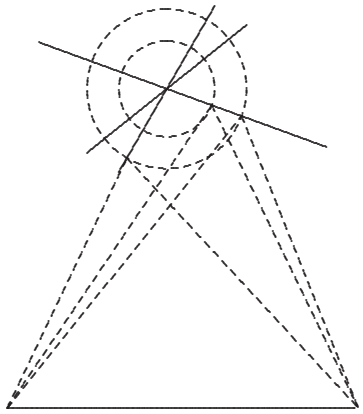
$$a \sqcap \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$$

10 *Teil 1*: Aus dieser Notiz geht hervor, dass Leibniz Ozanam die Kreisreihe spätestens im Sommer 1676 mitgeteilt hat (vgl. dazu den Brief von Foucher an Leibniz, 31. Dezember 1691, II, 2 N. 132 S. 474). Zwei Jahre nach der Publikation der Kreisreihe durch Leibniz in *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus*, in *Acta Eruditorum* (1682), S. 41–46, druckte Ozanam die Kreisreihe in seiner *Geometrie pratique*, 1684, S. 192–200, ohne Leibniz zu nennen. Im Herbst 1692 erinnerte sich Leibniz, dass der skeptische Ozanam zunächst versucht hatte, sein Ergebnis rechnerisch zu widerlegen (Brief an R. Chr. v. Bodenhausen, 25. Sept. / 5. Okt. 1692, III, 5 N. 108 S. 401). J. Ozanam, *Cours de mathematique*, Bd III, 1693, S. 167–173, enthält eine Näherungsrechnung mit 630 Termen der alternierenden Reihe, zusammengefasst zu 315 Termen der monotonen Reihe mit den Nennern 3, 35, 99 etc.

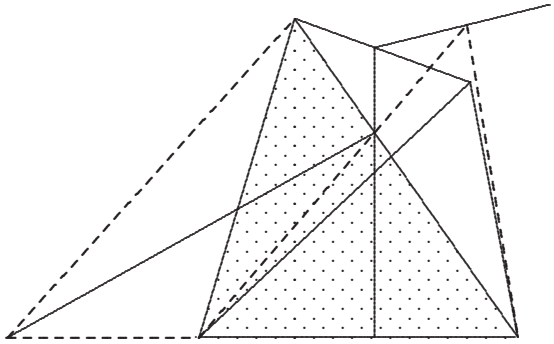
[*Teil 2*]

[*Leibniz oder Ozanam*]

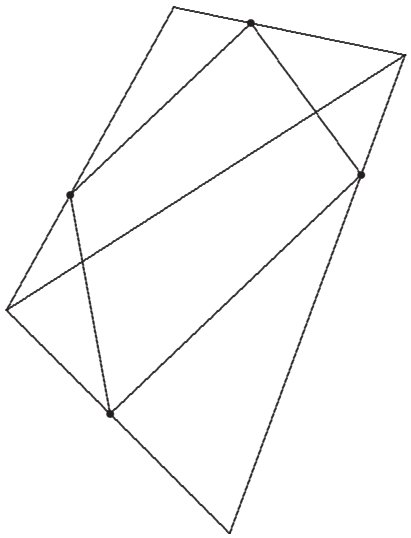
[*Fig. 2*]



[*Fig. 3, gestrichelte Linien in Blindtechnik*]



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

[*Teil 3*]

[*Ozanam*]

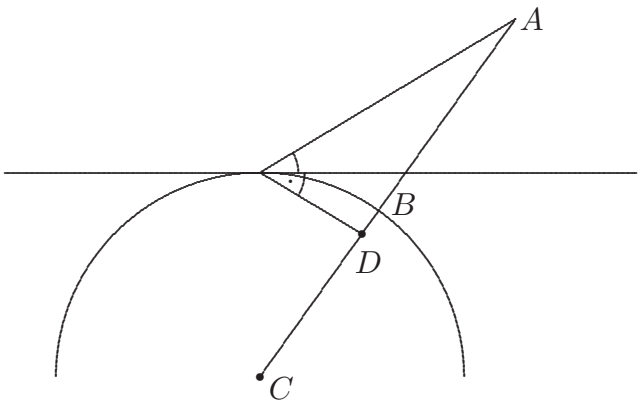
$$\boxed{a2 - ab \sim c2} \qquad \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ a + b \\ a + c \\ \hline 2a + b + c \end{array} \qquad \begin{array}{c} \dot{a} \quad \dot{b} \quad \dot{c} \\ \boxed{\begin{array}{c} a + x \\ b + x \\ c + x \end{array}} \end{array} \qquad \begin{array}{c} a2 \quad b2 \quad c2 \\ a2 + 2ax + x2 \\ b2 + 2bx + x2 \\ \hline c2 + 2cx + x2 \end{array}$$

$$a - \not{c} \sim 0$$

$$a3 - \ldots$$

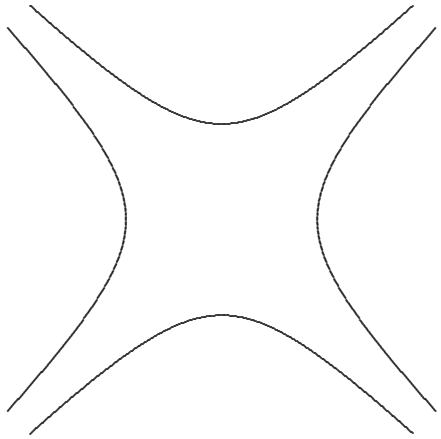
[*Teil 4*]

[*Leibniz*]



[*Fig. 6*]

[*Leibniz oder Ozanam*]

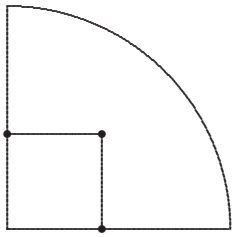


[*Fig. 7*]

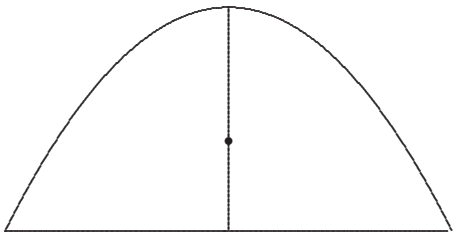
9 *Fig. 6*: Möglicherweise behandelt die Skizze die Aufgabe, den Bildpunkt D eines Objekts A bei Reflexion an einem sphärischen Spiegel zu finden. Vgl. J. Ozanam, *Recreations mathematiques et physiques*, 1694, Bd 1, probleme XII, S. 209–211, u. die zugehörige Figur 69, S. 206.

[*Teil 5*]

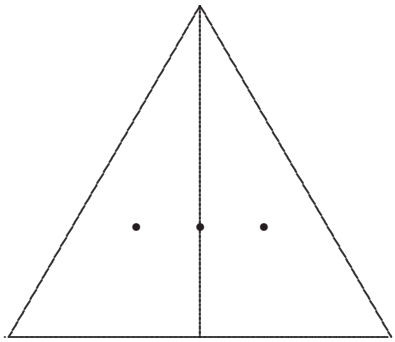
[*Leibniz oder Ozanam*]



[*Fig. 8*]

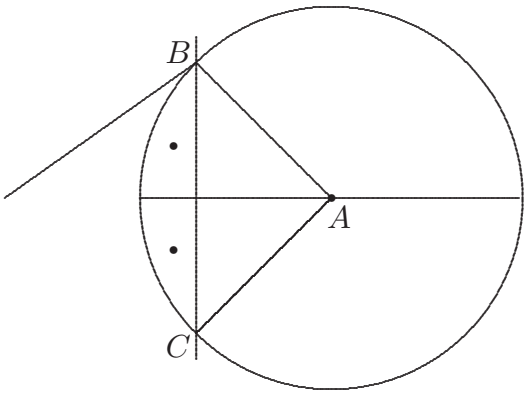


[*Fig. 9*]



[*Fig. 10*]

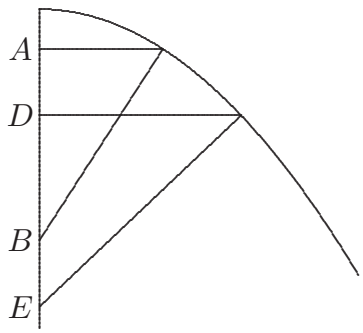
5 [*Leibniz*]



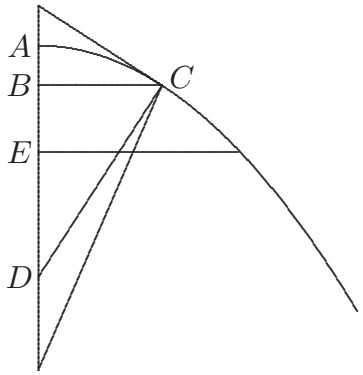
[*Fig. 11*]

[*Teil 6*]

[*Leibniz*]



[*Fig. 12*]

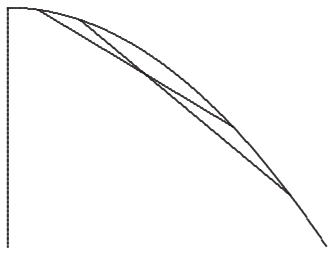


[*Fig. 13*]

$c \quad \frac{c}{3} \quad yb + \frac{c}{3}$ $\qquad x + a \sqcap AD.\ CD \sqcap [s].\quad y^2 + a^2 \sqcap s^2.$

$\underset{AB}{/\!\backslash} \quad \underset{BD}{/\!\backslash}$ 5

[*Leibniz oder Ozanam*]



[*Fig. 14*]

45. A CIRCULO PARTEM IMPERATAM ABSCINDERE
[Juli – September 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2 c Bl. 152. 1 Bl. 2°. $\frac{3}{4}$ S. auf Bl. 152 r°. Auf Bl. 152 v° N. 44.
Cc 2, Nr. 1508 A

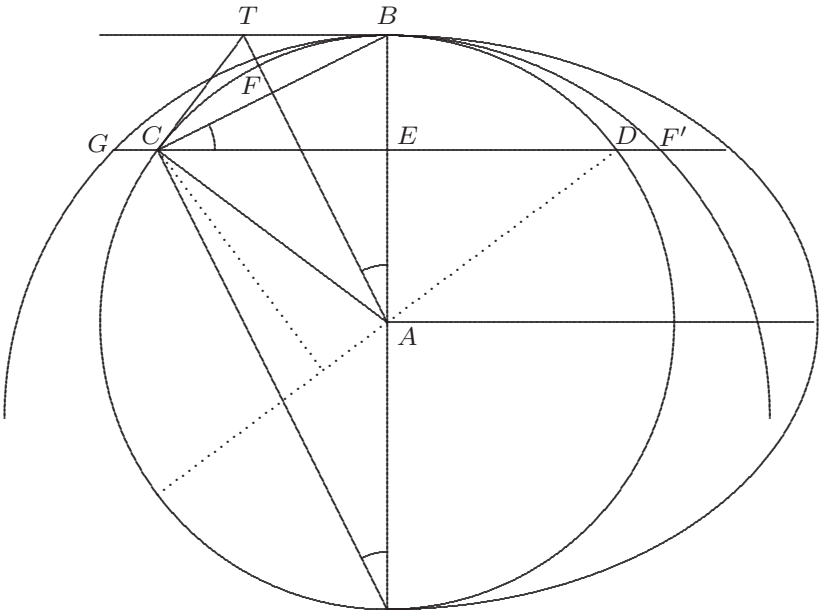
Datierungsgründe: Leibniz erwähnt die Behandlung des Problems durch J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, S. 57–59, bereits in N. 4 und hält dort die Verwendung seiner Kreisreihe für die kürzere Methode (S. 68 Z. 24 – S. 69 Z. 1). Mit der bei Gregory auch genannten allgemeineren Problemstellung der Ellipsenteilung setzt er sich in VII, 1 N. 33 unter Hinweis auf diesen auseinander. Er stellt fest, dass die Lösung des Problems von der allgemeinen Kreisteilung abhängt, und schließt daraus, dass es nicht mit algebraischen Formeln lösbar sei. In N. 45 behandelt er das Problem am Beispiel des Kreises mit den unendlichen Reihen für die Berechnung des Sinus bzw. des Sinus complementi aus dem Bogen, über die er etwa seit Juli/August 1676 verfügt (vgl. N. 35). Die Anregung dazu geht möglicherweise auf Oldenburgs Sendung an Tschirnhaus von Ende Mai 1676 zurück, in der das Problem durch Collins ebenfalls wie bei Gregory ohne Hinweis auf Kepler als den ursprünglichen Autor der Fragestellung erwähnt wird (III, 1 N. 82_2 S. 384). In Oldenburgs Sendung vom 5. August 1676, die Leibniz am 24. August 1676 erhielt, wird das Problem zweimal mit Nennung Keplers zur Sprache gebracht (III, 1 N. 88_4 S. 520 f. u. N. 88_5 S. 544). Leibniz nennt im vorliegenden Stück weder Gregory noch Kepler.

A Circulo partem imperatam abscindere ducta recta:

Sit Circulus centro A, radio AB descriptus. Circumferentia sit π, radius r, erit Circulus $\frac{r\pi}{2}$. Recta abscindens sit CD. radio AB perpendicularis. Quae debet esse portio Circuli $\frac{r}{b}$. fiet: portio $CDBC \sqcap \frac{r^2\pi}{2b}$. Sit $BT \sqcap y$. erit $BE \sqcap \frac{2y^2r}{r^2+y^2}$. Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ABT. CEB similia $\frac{CE}{BE} \sqcap \frac{AB \sqcap r}{TB \sqcap y}$. Ergo $CE \sqcap \frac{2yr^2}{r^2+y^2}$. $AE \sqcap r - \frac{2y^2r}{r^2+y^2}$. in CE dabit $\bigtriangledown CAD$. et fiet: $\frac{2yr^3}{r^2+y^2} - \frac{2y^3r^3}{\overline{r^2+y^2}\,\boxed{2}}$ sive reducendo ad communem denominatorem:

19 abscindere *(1)* : *(2)* , ut tertiam, aliamve: *(3)* ducta *L* 21 diametro AB *L ändert Hrsg.*

24 fiet: Im folgenden Ausdruck müsste im Zähler des Subtrahenden $4y^3r^3$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter.



[*Fig. 1*]

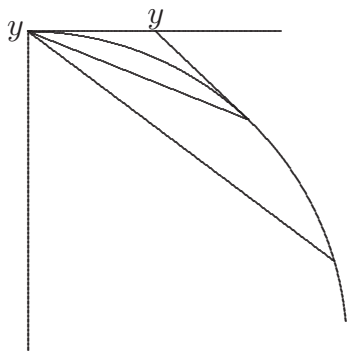
$\dfrac{2yr^5\boxed{+2y^3r^3, -2y^3r^3}}{r^2+y^2, \boxed{2}}$ ⊓ CAD. fulcrum. Jam ex dato tangente arcus est a ⊓ $\dfrac{y}{1} - \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^5}{5} - \dfrac{y^7}{7}$ etc. et a ⊓ BFC. ar ⊓ sectori $CADBC$. Ergo segmentum $CDBC$ ⊓ $ar - CAD$ ⊓ $ar - 2yr$, $\boxed{2}\,\dfrac{r^2}{r^2+y^2}$ quod debet aequari $\dfrac{\pi r^2}{2b}$. cujus aequationis ope inveniri debet ipsa y.

Notandum tantum debere esse y radio minorem. Loco aequationis: a ⊓ $\dfrac{y}{1} - \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^5}{5} - \dfrac{y^7}{7}$ etc. substitui potest haec: Ex dato arcu BC, invenire AE sinum complementi fit: sinus complementi, seu $\underset{+}{\overset{r}{\overset{-}{\dfrac{2y^2r}{r^2+y^2}}}}$ ⊓ $\underset{+}{\overset{r}{\overset{-}{\dfrac{a^2}{1,2}}}}\underset{-}{\overset{+}{\dfrac{a^4}{1,2,3,4}}}\underset{+}{\overset{-}{\dfrac{a^6}{1,2,3,4,5,6}}}$ etc. ⊓ $2r - \dfrac{r^3}{r^2+y^2}$ et rursus $\dfrac{r^3}{r^2+y^2}$ ⊓ $2r - \dfrac{a^2}{1,2} + \dfrac{a^4}{1,2,3,4} - \dfrac{a^6}{1,2,3,4,5,6}$. Auferendus est tandem valor vel ipsius a, vel ipsius y ad habendam ultimam aequationem.

---

8 $\dfrac{r^3}{r^2+y^2}$: Im Zähler müsste $2r^3$ stehen. Der Fehler beeinträchtigt mit weiteren Versehen die folgenden Rechnungen.

Optime sic: Triang. ABC est radius in $\frac{\text{sinum } EC}{2}$. Porro sinus ex arcu $s \sqcap \frac{A}{1} - \frac{A^3}{1,2,3} + \frac{A^5}{1,2,3,4,5}$ posito arcu $CBD \sqcap A$. Jam segmentum $CDBC$ est $-\frac{rs}{2} + \frac{Ar}{2}$ seu $\boxed{-\frac{rA}{1}} + \frac{A^3}{1,2,3} - \frac{A^5}{1,2,3,4,5}$ etc. $\boxed{+rA}$,, $\smile$ $2 \sqcap \frac{\pi r^2}{2b}$ ex qua aequatione resoluta invenietur quod si sit arcus tam parvus, ut circiter ejus pars $\frac{A^5}{1,2,3,4,5}$ tuto negligi possit poterit circulus dividi in ratione data, sola radicis cubicae extractione; et fiet: $A \sqcap \sqrt[3]{\frac{6\pi}{b}}$ paulo major vero. Est ni fallor theorema, si circuli plures alter in altero, in uno se puncto tangant, segmenta esse ut Circulos. $GF'BG$ ad $CDBC$, ut circulus ad circulum. Ponatur circulus exterior esse decuplus interioris, etiam segmentum decuplum erit.



[*Fig. 2*]

Ergo erit et sui circuli tertia pars, hinc interioris segmenti area est: $\frac{2y^3r}{r^2+y^2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9}$,, $\smile$ 2. Quaeritur aliquod segmentum quod ad datum rationem habeat datam, r ad b id erit: $\frac{2\upsilon^3 r}{r^2+\upsilon^2} - \frac{\upsilon^3}{3} + \frac{\upsilon^5}{5} - \frac{\upsilon^7}{7} + \frac{\upsilon^9}{9} \smile 2$ et fiet $\frac{2\upsilon^3 r}{r^2+\upsilon^2} - \frac{\upsilon^3}{3} + \frac{\upsilon^5}{5} - \frac{\upsilon^7}{7}$ etc.

---

1 $s \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung müsste in jedem Term $\frac{A}{2}$ statt A potenziert werden. Die folgende Aussage für das Segment müsste $CDBC = -AE \cdot s + \frac{Ar}{2}$ lauten. 6 theorema: Die folgende Aussage ist nicht richtig. 10 tertia pars: vgl. die Stufe *(2)* der Variante zur Überschrift. 10 area est: Die Formel ist nicht richtig.

$\sqcap \frac{2y^3r}{r^2+y^2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} \frown \frac{r}{b}$. Quod si $\frac{\upsilon^5}{5}$ et $\frac{y^5}{5}$ tuto negligi possint res ad aequationem cubicam rediret. Porro ope logarithmorum perpulchra condi posset Tabula segmentorum Circuli. Nimirum appellato circulo 100,000, segmenti chorda quod sit 10000$\boxed{1}$ 10000$\boxed{2}$ etc. seu segmenti chorda quod sit 1. 2. 3. etc. posito circulo, vel si mavis posito radio, 100,000.

Melior est via prior qua invenimus posito arcu A, radio 1. fore duplum segmentum: $\frac{A^3}{1,2,3} - \frac{A^5}{1,2,3,4,5}$ etc. Ergo modo arcus sit radii portio minor, tertia poterit dici segmenta fore inter se ut arcus, eritque error nullo modo notabilis, sed hoc determinari potest; quantus sit, illud interim patet quomodo possit facile abscindi a Circulo portio centesima, aliaque id genus, simplici radicis cubicae extractione.

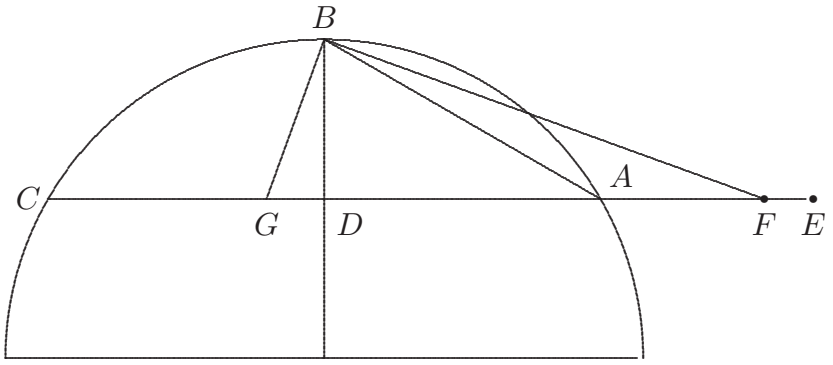
1 possint *(1)* pulcherrima habebitur constructio, tantum enim opus erit tantum sumere υ ad y, ut $\sqrt[3]{b}$ ad b *(2)* res L

46. POLYGONUM CIRCULI
[August (?) 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 178. 1 Zettel von ca 21,5 x max. 8,8 cm. Unterkante unregelmäßig geschnitten. 1 S. auf Bl. 178 r°. Bl. 178 bildete ursprünglich mit LH 35 II 1 Bl. 275 (VII, 5 N. 95) u. LH 35 VIII 30 Bl. 146 (VII, 3 N. 67) einen Teil eines Bog. 2°. Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von März bis August 1676 belegt. N. 46 ist vor VII, 5 N. 95 und vermutlich nach VII, 3 N. 67 verfasst worden. Aufgrund der inhaltlichen Nähe und der Ähnlichkeit in Tinte und Duktus der beiden Gesprächsaufzeichnungen mit Tschirnhaus, VII, 3 N. 67 und VII, 3 N. 68, dat. August 1676, könnte N. 46 im August 1676 entstanden sein. Durch einen Hinweis in Newtons Brief an Oldenburg für Leibniz und Tschirnhaus vom 13./23. Juni 1676, den er am 24. August 1676 erhielt, wurde Leibniz auf ein anderes Näherungsverfahren von Huygens aufmerksam gemacht (vgl. III, 1 N. 88_5 S. 550 f. sowie N. 2_1 S. 4 Z. 19–21).

Polygonum circuli



[*Fig. 1*]

14 polygonum circuli *erg. L*

---

14 Polygonum circuli: Leibniz entnimmt die folgende Näherungskonstruktion aus *Extrait d'une lettre de M. Hugens*, in: *Journal des Sçavans* IV, vom 12. November 1668, S. 112 (*HO* VI S. 275). Die Konstruktion wird diskutiert in J. Gregory, *An extract of a letter*, in: *Philosophical Transactions* III, Nr. 44 vom 15./25. Februar 1668/69, S. 885 f. (*HO* VI S. 309–311). In S. 463 Z. 2 verwendet Leibniz als Näherungswert statt $AG = \widehat{AB}$ zunächst $EG = \widehat{CBA}$ und führt dafür die weitere Rechnung durch. Nachträglich ändert er unvollständig, korrigiert die Rechnung aber nicht.

Sit arcus circuli CBA minor semicircumferentia. $CB \sqcap BA$. et $CD \sqcap DA$ et $AE \sqcap \frac{2}{3}\ AB$. $EF \sqcap \frac{1}{10}DE$. Ang. FBG rectus. $AG \sqcap$ arcui CBA.

$BD \sqcap x$. $BA \sqcap \sqrt{2ax}$. $DA \sqcap \sqrt{2ax - x^2}$. $AE \sqcap \frac{2}{3}\sqrt{2ax}$. $DE \sqcap \sqrt{2ax - x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{2ax}$. et ejus pars 10ma erit $EF \sqcap \frac{1}{10}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{2}{30}\sqrt{2ax}$ et $DF \sqcap \frac{9}{10}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{18}{30}\sqrt{2ax}$ et $BF^2 \sqcap x^2,,, + \frac{81}{100},, 2ax - x^2\ +2ax - 2\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}$ et $BF \sqcap \sqrt{\frac{19}{100}x^2 + \frac{81}{25}ax - \frac{81x}{50}\sqrt{4a^2 - 2ax}}$.

$\frac{GD}{BD} \sqcap \frac{BD}{DF}$. Ergo $GD + DE \sqcap \frac{10x^2}{9\sqrt{2ax - x^2} + 6\ \sqrt{2ax}} + \sqrt{2ax - x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{ax}$. $GD + DE \sqcap \frac{BD^2}{DF \sqcap \frac{9}{10}DE} + DE \sqcap \frac{\overline{BD}^2 + \overline{DE}^2}{\frac{9}{10}DE}$. $\overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 \sqcap \boxed{x^2} + 2ax\boxed{-x^2} + \frac{4}{6}2ax + \frac{4}{3}x\sqrt{4a^2 - 2ax} \sqcap \frac{10}{3}2ax + \frac{4}{3}x\ \sqrt{4a^2 - 2ax}$. Ergo $GD + DE \sqcap \frac{200ax + 40x\sqrt{4a^2 - 2ax}}{27\sqrt{2ax - x^2} + 9\sqrt{2ax}} \sqcap \frac{200\sqrt{ax} + 40a\sqrt{4ax - 2x^2}}{27\sqrt{2a^2 - ax} + 9a\ \sqrt{2}}$.

2 rectus *(1)* EG *(2)* AG *L*

5 $+2ax - 2\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}$: Richtig wäre $+\frac{18}{25}ax - \frac{27}{25}\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}$. In der Folge unterlaufen Leibniz weitere Versehen, die das Ergebnis beeinträchtigen.

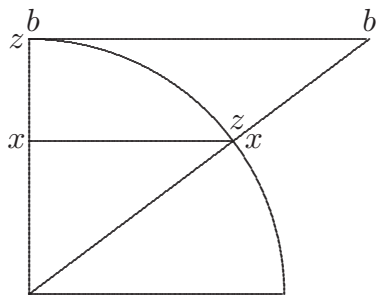
47. DE SERIEBUS AD ARCUM CIRCULI

[Mai – September 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 129. 1 Ausschnitt von 16,7 × max. 9,7 cm. 2 S. Teil 1 auf Bl. 129 r°, Teile 2, 3 und 4 auf Bl. 129 v°, teilweise ineinander geschrieben. Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Teil 1 der Aufzeichnungen könnte vor dem Brief an Oldenburg vom 12. Mai 1676 (vgl. III, 1 N. 80_1 S. 375) geschrieben sein, in dem Leibniz auf die in S. 465 Z. 1 erwähnte Mitteilung von Mohr Bezug nimmt. Es könnte sich aber auch um Notizen für die Beantwortung von Oldenburgs Brief vom 5. August 1676 (III, 1 N. 88) handeln, den Leibniz am 24. August 1676 erhalten hat und am 27. August 1676 beantwortete (vgl. III, 1 N. 89_1 S. 566 u. N. 89_2 S. 577 f.). Jedenfalls ist die in Teil 4 diskutierte Näherung für den Kreisbogen Oldenburgs Brief vom 5. August 1676 entnommen. Teil 2 könnte im Verlauf eines Gesprächs etwa mit Tschirnhaus oder Mohr entstanden sein. Teil 3 ist vermutlich nach N. 26 geschrieben worden.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

Dato sinu x invenire arcum z. posito radio 1.

$$z \sqcap \frac{1}{1}x + \frac{1,1}{1,2,3}x^3 + \frac{1,1,3,3}{1,2,3,4,5}x^5 + \frac{1,1,3,3,5,5}{1,2,3,4,5,6,7}x^7 \text{ etc.}$$

vel $z \sqcap 1x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ etc.

Dato Arcu z invenire sinum x posito radio 1.

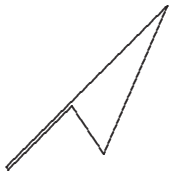
$$x \sqcap \frac{1}{1}z - \frac{1}{1,2,3}z^3 + \frac{1}{1,2,3,4,5}z^5 - \frac{1}{1,2,3,4,5,6,7}z^7 \text{ etc.}$$

vel $x \sqcap \frac{1}{1}z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ etc.

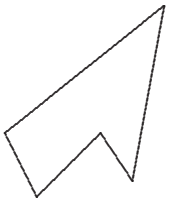
Collinius hoc Mohrio communicavit.

Mea expressio haec est: Data tangente invenire arcum: Sit tangens b. arcus z. Radius 1, erit $z \sqcap \frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc.

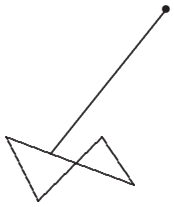
[*Teil 2*]



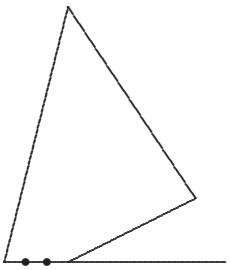
[*Fig. 2*]



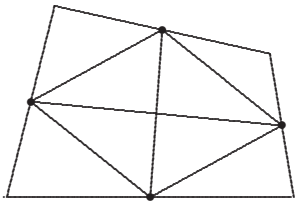
[*Fig. 3*]



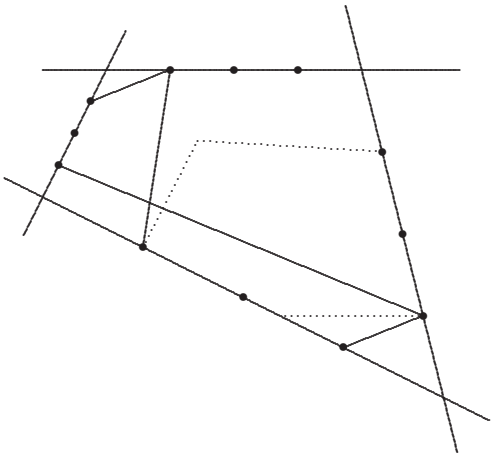
[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]



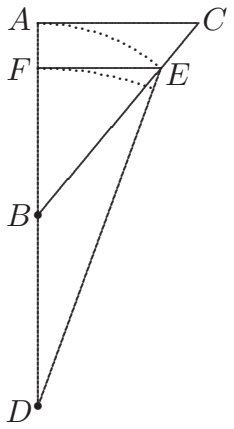
[*Fig. 6*]



[*Fig. 7*]

1 communicavit: s. Leibniz an Oldenburg, 12. Mai 1676 (III, 1 N. 80_1 S. 375) und Leibniz an Oldenburg, 27. August 1676 (III, 1 N. 89_1 S. 566 bzw. N. 89_2 S. 577 f.).

[*Teil 3*]



[*Fig. 8*]

Si $b \sqcap \frac{3}{4}$ erit $\frac{b^{11}}{11} \sqcap \frac{204147}{461737344}$ ergo si $\frac{b^{11}}{11}$ negligatur, non erit error unius bismillesimae. Si scilicet posito $AB \sqcap 1$. $AC \sqcap \frac{3}{4}$ quaeratur arcus AE, suffecerit iri usque ad $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9}$.

2 *Nebenrechnungen:*

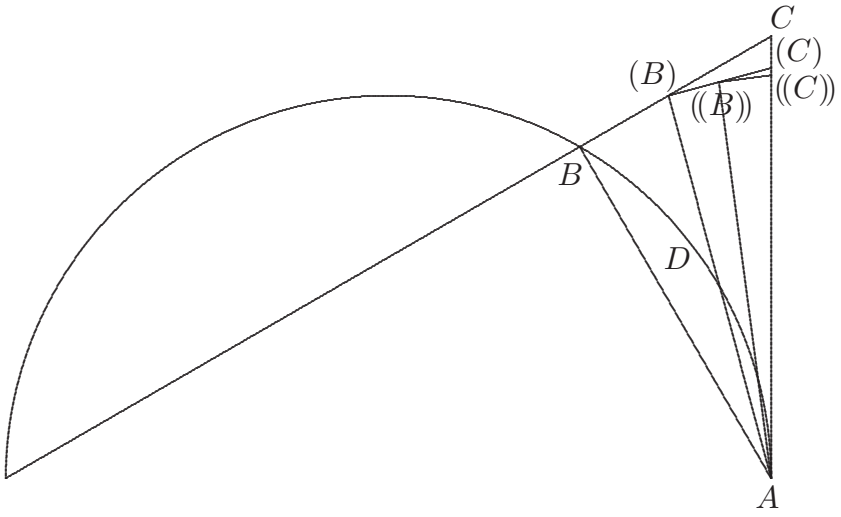
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	22683
10	68049
11	204147

64
16
384
64
1024

1	4
2	16
3	64
5	1024
6	4096
11	

2–5 Si ... $+\frac{b^9}{9}$: vgl. N. 26 S. 299 Z. 11–18. 2 $\frac{b^{11}}{11} \sqcap$: Leibniz überträgt den Nenner $11 \cdot 4^{11}$ falsch aus der Nebenrechnung. Dies beeinträchtigt die anschließende Fehlerabschätzung. 6 *Fig. 8*: Die Zeichnung bestand zunächst nur aus dem oberen Dreieck ABC. Leibniz hat sie dann für die Diskussion S. 468 Z. 4–10 um das Dreieck DEF erweitert. 16 22683: Es müsste 19683 lauten. Leibniz rechnet konsequent weiter.

[*Teil 4*]



[*Fig. 9*]

$A(B)$ bisecat angulum BAC. Angulus CBA rectus. Arcus ADB cadit inter
$A((B))$ . . . . . $(B)A(C)$. $(C)(B)A$
etc. etc. etc.
rectas AB minores justo et AC majores justo.
$A(B)$ $A(C)$
$A((B))$ $A((C))$
etc. etc.

4096	4194304
1024	11
16384	4194304
8192	4194304
40960	46137344
4194304	

2–9 Vgl. Oldenburg an Leibniz und Tschirnhaus, 26. Juli (5. August) 1676 (III, 1 N. 88_4 S. 519).

Si Radius a. tangens y. erit tangens arcus dupli $2a^2y \smile a^2 - y^2$. Ergo contra, si tangens sit z. erit tangens arcus dimidii, seu $y \sqcap \dfrac{a\sqrt{a^2+z^2}-a^2}{z}$ id est secans radio minutus in radium divisus per tangentem.

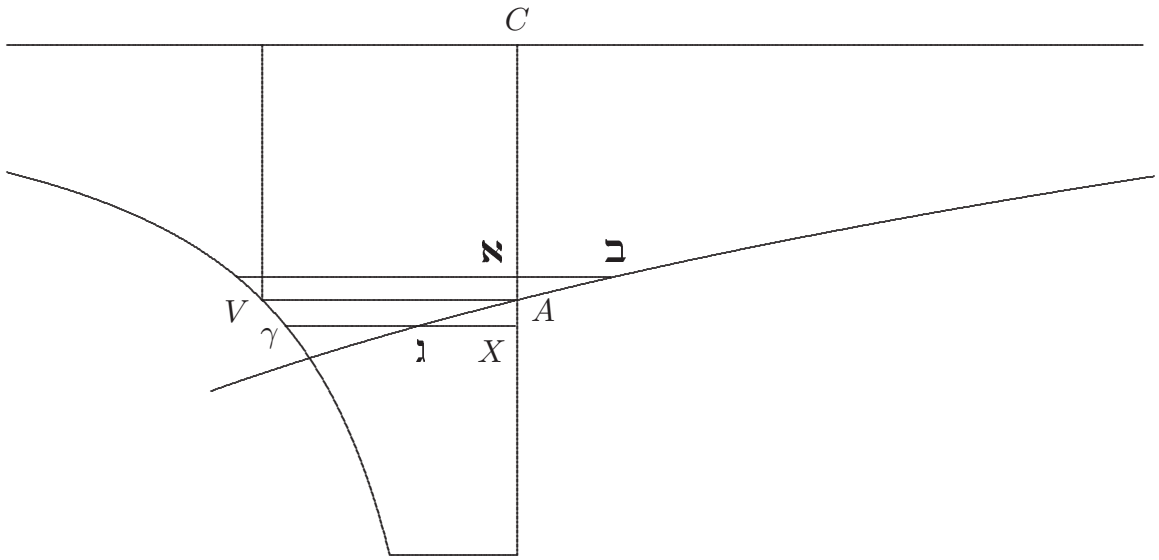
Sed ecce praeterea subnatam methodum perpulchram qua quaestio reducatur ad Triangulum minus, et tractabilius. Nimirum in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ CAB. cujus latera omnia in numeris data sunt, ut pro praxi suppono, nimiam habet rationem AC ad AB. minus latus ad majus. Producatur AB in D. ut sit BD aequalis AB. jungatur ED. Cum sit FE ad $(BE \sqcap)BA$ ut AC ad BC. dabitur FE. Eodem modo habebitur et FB. Datur ergo et FD. Ergo in Triangulo EFD. datis lateribus EF, et FD. sumto FD pro radio FE pro tangente, dabitur angulus FDE. qui est quaesiti dimidius.

5 $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ CAB: s. Fig. 8 und zugehörige Erläuterung.

48. DE CALCULO LOGARITHMORUM HYPERBOLICORUM
[August – September 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 121–122. 1 Bog. 2°. 4 S. quer beschrieben (ursprünglich 1 Bl. 1° mit 2 S.). Textfolge Bl. 121 v°, 122 r°, 121 r°, 122 v°.
Cc 2, Nr. 1430

Datierungsgründe: Leibniz greift im vorliegenden Stück auf Rechenergebnisse aus N. 34 u. N. 43, Teil 2, zurück. Einige Resultate aus N. 48 verwendet er in prop. L von N. 51 S. 667 Z. 8 – S. 669 Z. 5.



[*Fig. 1*]

$CA \sqcap 1$. Rectang. $CX\gamma$ aequ. quad. CA sive 1.

Sit $CX \sqcap \frac{11}{10}$. erit $AX \sqcap \frac{1}{10}$. et $CX \sqcap 1 + \frac{1}{10}$ et $\gamma X \sqcap \frac{1}{1+\frac{1}{10}} \sqcap \frac{1}{1} - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{10,000} - \frac{1}{100,000}$ et spatium $VX \sqcap \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{4,0,000} \Big| + \frac{1}{5,00,000}$ etc. $1,2,3,4 \sqcap 24$. $1,2,3, \sqcap 6$. $2,3,4 \sqcap 24$. $1,3,4 \sqcap 12$. $1,2,4 \sqcap 8$. Quare

8 *Fig. 1*: vgl. N. 34 Fig. 2.

spatium $VX \sqcap \dfrac{2,3,4000,, -1,3,400+1,2,40-1,2,3}{1,2,3,4\,0000} \sqcap \dfrac{24000-1200+80-6}{240\,000} \sqcap l \sqcap$

$$\left.\dfrac{\left.\begin{matrix}+\ 24080\\ -\ \ 1206\end{matrix}\right\} \sqcap 22874}{240\,000}\right| \dfrac{11437}{120\,000}.$$

C**א** $\sqcap X\gamma \sqcap \dfrac{10}{11}$. Erit **בא** $\sqcap X$**ג** et A**א** $\sqcap \dfrac{1}{11}$. Jam ex dato **בא** $\sqcap l$. erit A**א** $\sqcap$ $n \sqcap \dfrac{l}{1} - \dfrac{l^2}{1,2} + \dfrac{l^3}{1,2,3}$ etc. Est autem $l \sqcap \dfrac{1}{10}$. Ergo $l^3 \sqcap \dfrac{1}{1000}$. et $\dfrac{l^3}{1,2,3} \sqcap \dfrac{1}{6000}$. et $\dfrac{l^4}{1,2,3,4} \sqcap \dfrac{1}{240\,000}$. Ergo si addamus $\dfrac{l}{1} - \dfrac{l^2}{1,2} + \dfrac{l^3}{1,2,3}$ habebimus n tam prope ut error sit minor quam $\dfrac{1}{240,\,000}$.

$11437 \sqcap \omega$. et $\dfrac{11437}{120\,000} \sqcap \dfrac{\omega}{12\ 4} \sqcap l$. Ergo $\dfrac{l}{1} - \dfrac{l^2}{2} + \dfrac{l^3}{6} \sqcap \dfrac{\omega}{12,\ 4} - \dfrac{\omega^2}{2,144,\ 8} + \dfrac{\omega^3}{6,1728,\ 12}$ et reducendo ad unum denominatorem $\dfrac{864\overline{0}^8\omega - 36\overline{0}^4\omega^2 + \omega^3}{6,1728,\ 12}$.

7–472,2 *Nebenrechnungen:*

12	144
12	6
24	864
12	
144	
12	1728
288	6
144	10368
1728	

4 etc *(1)* est autem l $\sqcap \dfrac{11437}{120000} \sqcap \dfrac{11}{120}$. *(2)* est autem *(a)* l $\sqcap \dfrac{1}{11}$ *dazu umrahmte Nebenbetrachtung, nicht gestr.*: $\dfrac{11437}{120000} \sqcap \dfrac{1}{11}$. nam $11437,11 \sqcap 120000$ $\quad 11437,11 \sqcap \begin{matrix}11437\\ \hline 125807\end{matrix}$ *(b)* l $\sqcap \dfrac{1}{10}$ L

$$
\begin{array}{lr}
864\ \omega\ \sqcap & 11437 \\
 & 864\overline{0}^{8} \\ \hline
 & 45748 \\
 & 68622 \\
 & 91496 \\ \hline
 & +988156800{,}000{,}000 \\
 & +\ \ 1496016\ 430\ 453 \\ \hline
 & +989652816\ 430\ 453 \\
 & -\ \ 47089788\ 840\ 000 \\ \hline
 & 942563027\ 590\ 453
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
942563027590453 \\
942563027590453 \\ \hline
10368203303494983
\end{array}
\ \sqcap\ 103680000{,}0000.
$$

potius

$$
\begin{array}{rrl}
 & 11437 & \\
 & 11437 & \\ \hline
 & 80059 & \\
 & 34311 & \\
 & 45748 & \\
 & 11437 & \\
1 & 1437 & \\ \hline
1 & 30804969 & l^2 \\ \hline
144.0000.0000 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrl}
 & 130804969 & \\
 & 11437 & \\ \hline
 & 915634783 & \\
 & 392414907 & \\
 & 523219876 & \\
 & 130804969 & \\
1 & 30804969 & \\ \hline
1 & 496016430453 & l^3 \\ \hline
1728{,}0000{,}0000{,}0000 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
130804969 \\
360000 \\ \hline
784829814 \\
392414907 \\ \hline
47089788840000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
10368 \\
11 \\ \hline
10368 \\
10368 \\ \hline
114048
\end{array}
$$

13 10368203303494983: Richtig wäre 10368193303494983. Der Fehler wirkt sich nicht auf die Abschätzung aus.

Ergo $n \sqcap 10\frac{l}{1} - \frac{l^{[2]}}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} \sqcap \frac{942\ 563|0\ 2759\ 0453}{10368,000|0,0000,0000} \sqcap \frac{1}{11}$.

Differentia: $\frac{2|033\ 0349\ 4983}{1140480|000,0000,0000}$ id est excessus paulo major quam $\frac{1}{570240}$.

Invenimus Logarithmum Hyperbolicum numeri $\frac{11}{10}$. Quaeramus et logarithmum Hyperbolicum numeri $\frac{101}{100}$. ut duos nostra methodo Logarithmos habeamus, quorum eadem proportio, quae Logarithmorum tabularium esse debet. Sit ergo $CX \sqcap \frac{101}{100}$ erit $AX \sqcap \frac{1}{100}$. et $\gamma X \sqcap \frac{1}{\frac{101}{100}} \sqcap \frac{100}{101} \sqcap \frac{1}{1+\frac{1}{100}}$. Ergo spatium VX erit $\frac{1}{100} - \frac{1}{20\,000} + \frac{1}{3\,000\,000} - \frac{1}{400,00,00,00}$ etc. seu $\frac{2,3,4,0^6 - 1,3,4,0^4 + 1,2,4,0^2 - 1,2,3}{1,2,3,4,00000000} \sqcap$

$$\frac{24000000 - 120000 + 800 - 6}{2400000000} \sqcap \frac{\left.\begin{matrix} +\ 24000800 \\ -\ \ \ 120006 \end{matrix}\right\} \sqcap 23880794}{240000,0000} \sqcap \frac{11940397}{1200,00,0000}$$

qui est Logarithmus Hyperbolicus ab $\frac{101}{100}$.

At supra logarithmus Hyperbolicus ab $\frac{11}{10}$ erat $\frac{11437}{120\,000}$, vel $\frac{114370000}{120000\,0000}$. Ejus Ratio $\frac{\text{logarithmus Hyperbolicus ab } \frac{11}{10}}{\text{ad Logarithm. Hyperb. ab } \frac{101}{100}} \sqcap \frac{11437\,0000}{\text{ad } 11940397}$. Jam Logarithmus Tabularis ab $\frac{11}{10}$ est differentia inter logarithmum ab 11. qui est $\frac{10413927}{10000000}$ et logarithmum a 10 qui est $\frac{10000000}{10000000}$, ea differentia est $\frac{00413927}{10000000} \sqcap$ log. Tabul. ab $\frac{11}{10}$. Et logarithmus Tabularis ab $\frac{101}{100}$ est differentia inter logarithmum ab 101, qui est: $\frac{20043214}{10,000,000}$ et logarithmum ab 100 qui est $\frac{20,000,000}{10,000,000}$. Quae differentia est $\frac{00043214}{10000000} \sqcap$ log. Tab. ab $\frac{101}{100}$. Ergo

2 est *(1)* error nondum est: *(2)* excessus L

Ratio $\dfrac{\text{log. Tab. ab } \frac{11}{10}}{\text{ad Log. Tab. ab } \frac{101}{100}} \sqcap \dfrac{\cancel{00}413927}{\cancel{00}043214}$. Quae ratio debet esse aequalis Rationi Logarithmorum Hyperbolicorum supra inventae: $\dfrac{114370000}{011940397}$. Ergo multiplicando per crucem debet circiter prodire idem[:]

$$\begin{array}{r} 11940397 \\ 413927 \\ \hline 83582779 \\ 23880794 \\ 107463573 \\ 35821191 \\ 11940397 \\ 47761588 \\ \hline 4942452709019 \\ -4942385180000 \\ \hline 0000067529019 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 114370000 \\ 43214 \\ \hline 45748 \\ 11437 \\ 22874 \\ 34311 \\ 45748 \\ \hline 4942385180000 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Differentia inter} & 4942452709019 \\ \text{et} & 4942385180000 \\ \text{est} & 0000067529019. \end{array}\right\} \text{quae prodeunt}$$

Ergo error est $\dfrac{0000067529019}{43214 \text{ in } 11940397}$ vel $\dfrac{0000067529019}{413927 \text{ in } 114370000}$. Prius est error si ponimus $\dfrac{\text{Log. Tab. ab } \frac{11}{10}}{\text{ad Log. Tab. ab } \frac{101}{100}} \sqcap \dfrac{\text{Log. Hyp. ab } \frac{11}{10}}{\text{ad Log. Hyp. ab } \frac{101}{100}}$. Posterior error si ponimus $\dfrac{\text{log. Tab. ab } \frac{101}{100}}{\text{ad log. Tab. ab } \frac{11}{10}} \sqcap \dfrac{\text{log. Hyp. ab } \frac{101}{100}}{\text{log. Hyp. ab } \frac{11}{10}}$. Unus scilicet si ponendo Tabulares accuratos: log. Hyperbolicum ab $\frac{11}{10}$ ex datis duobus Tabularibus et Hyperbolico ab $\frac{101}{100}$ quaerimus; alter si contra. Priore modo certum est errorem esse minorem quam $\frac{1}{7000}$. Nam

22 contra. *(1)* suntqve hi duo errores inter se ut 43214 ad 11940397 sed utrovis modo *(2)* priore *L*

pro 43214 in 11940347 circiter sumendo 43000 in 11940000 fit 51342|0000000 et pro 67529019 faciendo 67530000 fit error minor quam $\frac{6753}{51342000}$. Jam $\begin{array}{c}\cancel{9}\\ \cancel{5}\cancel{1}342000\\ \cancel{6}\cancel{7}53\end{array}$ ⨍ 7. Ergo error non est $\frac{1}{7000}$. Sin sumamus 413927 in 114370000 et pro 413927 faciamus 413000. fit 47234810000000 et pro 67529019. ponendo 70000000 error erit minor quam $\frac{7}{4723481}$ id est minor quam $\frac{1}{600000}$. Uno ergo modo error est minor quam $\frac{1}{7000}$, altero minor quam $\frac{1}{600,000}$.

Imo res accuratius discutienda[:]

Nimirum si quaeramus logarithmum Hyperbolicum ab $\frac{11}{10}$ ex datis Tabularibus ab $\frac{11}{10}$ et $\frac{101}{100}$ et Hyperbolico ab $\frac{101}{100}$ fit $\frac{LH\frac{\overline{11}}{10}}{LH\frac{\overline{101}}{100}} \sqcap \frac{LT\frac{\overline{11}}{10}}{LT\frac{\overline{101}}{100}}$. et $LH\ \frac{\overline{11}}{10} \sqcap \frac{LH\ \frac{101}{100}, \text{in } LT\ \frac{11}{10}}{\text{LT}\ \frac{101}{100}} \sqcap$

1–4 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 1194 \\ 43 \\ \hline 3582 \\ 4776 \\ \hline 51342 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{1} \\ \cancel{2}56 \\ \cancel{4}\cancel{5}77 \\ \cancel{4}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{9}\cancel{8} \\ \cancel{9}\cancel{4}\cancel{9}\cancel{1}\cancel{2}94 \\ \cancel{5}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \\ \cancel{6}\cancel{7}\cancel{5}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{6}\cancel{7}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5} \\ \cancel{6}\cancel{7}\cancel{7} \\ \cancel{6} \end{array} \quad ⨍\ 7602 \qquad \begin{array}{r} 11437 \\ 413 \\ \hline 34311 \\ 11437 \\ 45748 \\ \hline 4723481 \end{array}$$

2 minor qvam *erg. L* 7 Imo ... discutienda *erg. L*

$\frac{11940397,413927}{12,0000,0000,\text{in } 43214}$ ☽ at debet esse ⊓ $\frac{114370000}{1200000000}$ ☉ et reducendo ad communem denominatorem fiet: pro priore ☽ $\frac{4942452709019}{518568,0000,0000}$. pro posteriore ☉ $\frac{4942385180000}{51856800000000}$. Differentia est $\frac{6752\ 9019}{518568,0000,0000}$ minor quam $\frac{1}{500,000}$. Qua differentia logarithmus Hyperbolicus ab $\frac{11}{10}$ inventus ex assumtis tabularibus, excedit eum qui directe ex ipsa Hyperbola inventus est.

Quaeramus contra LH ab $\frac{101}{100}$ ex dato LH ab $\frac{11}{10}$ et LT ab $\frac{101}{100}$ et ab $\frac{11}{10}$. fiet LH $\frac{101}{100}$ ⊓ $\frac{LT\ \frac{101}{100}, LH\ \frac{11}{10}}{LT\ \frac{11}{10}}$ ⊓ ☿ $\frac{43214,114370000}{120000,0000,\text{in } 413927}$. At debet esse $\frac{11\ 940\ 397}{12,0000,0000}$ ♂. Reducendo ad communem denominatorem fiet pro priore, ☿ $\frac{4942385180000}{4967124,0000,0000}$, et pro posteriore ♂ $\frac{4942452709019}{4967124,0000,0000}$. Differentia est $\frac{67529019}{4967124,0000,0000}$ minor quam $\frac{1}{4000,000}$. Qua differentia Logarithmus Hyperbolicus ab $\frac{101}{100}$ inventus ex assumtis Tabularibus deficit ab eo qui directe ex ipsa Hyperbola inventus est.

Quoniam ergo demonstrationes nostras experientia confirmatas habemus, nec amplius errorem calculi metuere cogimur, jam operae pretium erit Logarithmum binarii Hyperbolicum invenire.

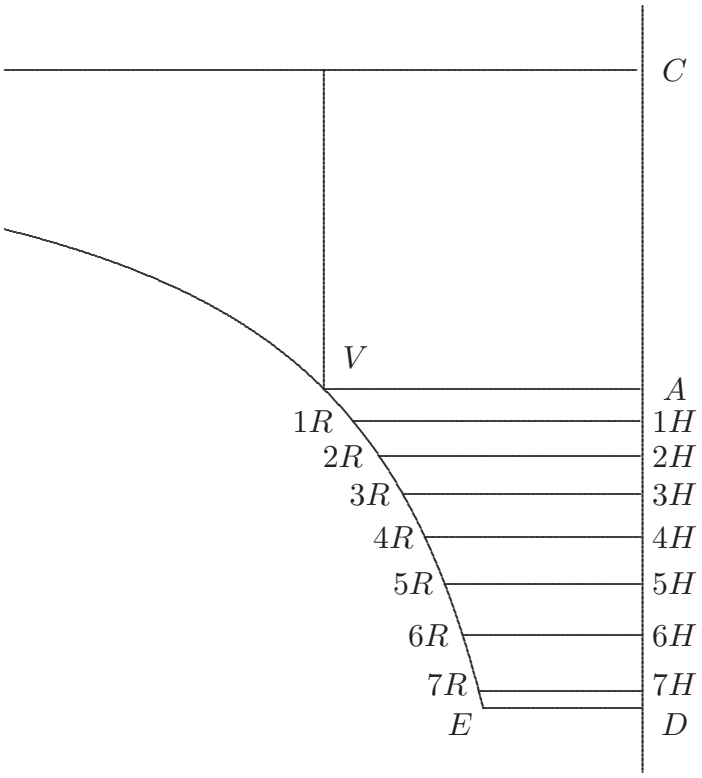
---

2 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} 43214 \\ 12 \\ \hline 86428 \\ 43214 \\ \hline 518568 \end{array}$$

8 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} 413927 \\ 12 \\ \hline 827854 \\ 413927 \\ \hline 4967124 \end{array}$$



[*Fig. 2*]

$CA \sqcap AV \sqcap 1$. ut ante. $AD \sqcap 1$. erit $CD \sqcap 2$. Quaeritur logarithmus binarii, seu spatium $ADEV$, sive VD. Quod ut facilius inveniamus ita procedere utile erit: $C1H$ sit $\frac{11}{10}$ erit spatium $V1H$ logarithmus ab $\frac{11}{10}$. Quem invenimus esse $\frac{11437}{120000}$ vel $\frac{22874}{240000}$ ita ut error non sit $\frac{1}{100,000}$.

Sit

$C1H$	$C2H$	$C3H$	$C4H$	$C5H$	$C6H$	$C7H$.
$\frac{11}{10}$	quad. $\frac{11}{10}$	cub. $\frac{11}{10}$	qq. $\frac{11}{10}$	surdes. $\frac{11}{10}$	qcub. $\frac{11}{10}$	$\boxed{7}\frac{11}{10}$

Est autem $\boxed{7}\frac{11}{10}$ seu septima potentia ab $\frac{11}{10}$ aequal.: $\frac{19487171}{10000000} \sqcap C7H$. Ergo quia $C7H \sqcap \frac{19487171}{10000000}$. et CD est 2 vel $\frac{20000000}{10000000}$ erit $D7H$ (seu $CD - C7H$) $\sqcap \frac{512829}{10000000} \sqcap d$. et ejus

8 $\frac{19487171}{10000000}$: Leibniz hat den Wert in N. 43 S. 448 Z. 8–20 berechnet.

quad. $d^2 \sqcap \frac{262993583241}{10000000,0000000}$. et ejus cubus d^3 erit $\frac{134870736299898789}{10000000,0000000,0000000}$. Quibus potestatibus a d. opus habebimus ut mox patebit.

Spatium $V1H$ est $\frac{22874}{240000}$. logarithmus scilicet a $C1H$. vel $\frac{11}{10}$. Et quia CA, $C1H$, $C2H$, $C3H$ etc. usque ad $C7H$ sunt continue proportionales, erunt spatia $V1H$, $1R2H$, $2R3H$, etc. usque ad $6R7H$, aequalia, ergo spatium $V7H$, erit septuplum spatii $V1H$, seu erit $\frac{160118}{240000}$. Ergo ad inveniendum spatium VD logarithmum Binarii hyperbolicum superest inveniri tantum spatium residuum $7RD$. (vel $7HE$). Id vero ita fiet: $C7H$ vocetur f. et $7HD$, vocetur d. erit $DE \sqcap \frac{1}{f+d}$ vel $\frac{1}{f} - \frac{d}{f^2} + \frac{d^2}{f^3} - \frac{d^3}{f^4}$ etc. et summa omnium ordinatarum inter $7R7H$, et ED. seu area spatii $7RD$ erit $\frac{d}{1f} - \frac{d^2}{2f^2} + \frac{d^3}{3f^3} - \frac{d^4}{4f^4}$ etc. Et quoniam d est circiter $\frac{1}{20}$. et f circiter $\frac{19}{10}$. erit $\frac{d}{f}$ circiter $\frac{1}{38}$ et $\frac{d^4}{4f^4}$ seu error erit longe minor quam $\frac{1}{1000,000}$. si tribus primis terminis utemur. Est autem $\frac{d}{f} - \frac{d^2}{2f^2} + \frac{d^3}{3f^3} \sqcap \frac{6f^2d - 3fd^2 + 2d^3}{6f^3}$. et pro f ponendo $2-d$ (nam $C7H$ est $CD-7HD$) fiet $f^2 \sqcap 4-4d+d^2$. et $f^3 \sqcap 8 - 12d + 6d^2 - d^3$. et $df^2 \sqcap 4d - 4d^2 + d^3$. et $6df^2 \sqcap 24d - 24d^2 + 6d^3$. et $fd^2 \sqcap 2d^2 - d^3$. et $3fd^2 \sqcap 6d^2 - 3d^3$. et ex his $\frac{6f^2d - 3fd^2 + 2d^3}{6f^3}$ erit

$$\begin{array}{r} 24d - 24d^2 + 6d^3 \\ -\ \ 6d^2 + 3d^3 \\ +2d^3 \\ \hline +48 - 72d + 36d^2 - 6d^3 \end{array}$$

---

10 *Nebenbetrachtung:* $\frac{d}{f} \sqcap \frac{512829}{19487171}$

8 vel ... etc *erg. L* 10 $\frac{19}{10}$. *(1)* | sive 2 *nicht gestr.* | erit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{f}}$ circiter $\frac{1}{40}$ et $\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{f}^4}$ erit $\frac{1}{256000}$ *(2)* erit *L*

---

1 $d^2 \sqcap$: Leibniz hat den Wert in N. 34 S. 392 Z. 2–11 berechnet, eine Rechnung zum folgenden Wert für d^3 findet sich dort nicht.

seu $\dfrac{24d - 30d^2 + 11d^3}{48 - 72d + 36d^2 - 6d^3}$.

$$
\begin{array}{lll}
+\ 24d & \sqcap & 123078960000000,0000000 \\
+\ 11d^3 & \sqcap & 148357809929\ 8886679 \\
-\ 30d^2 & \sqcap & 7889807497230,0000000 \\
\hline
 & & 115337510312699,8886679
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
+\ 48 & \sqcap & 480000000,0000000,0000000 \\
+\ 36d^2 & \sqcap & 946776\ 8996676\ 0000000 \\
-\ 72d & \sqcap & 36923688,0000000,0000000 \\
-\ 6d^3 & \sqcap & 8092\ 2441779\ 9392734 \\
\hline
 & & 444014996\ 6554896\ 0607266
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
3 & \\
\cancel{4}6\ \ 58 & \\
\cancel{7}\cancel{1}0\cancel{6}\cancel{3}6 & \\
\cancel{1}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{0}\cancel{9}\cancel{7} & \\
\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{6}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{9} & \\
\cancel{3}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{0} & \\
\hline
316:02:: & \\
\cancel{3}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{3}7: & \\
\cancel{6}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{0}: & \\
\hline
1\qquad :: & \\
6\cancel{2}6255:: & \\
\cancel{6}\cancel{9}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{6}4:: & \\
\cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{0}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{8}\cancel{0}:: & \\
\hline
1230\ \ 55:: & \\
\cancel{3}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{6}\cancel{8}:: & 4 \\
\cancel{5}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{2}\cancel{9}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} & \not{f}\ 263162 \\
\cancel{1}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} & \\
\cancel{1}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7} & \\
\cancel{1}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} & \\
\cancel{1}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{7} & \\
\cancel{1}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{8} &
\end{array}
\qquad
\frac{d}{f} \sqcap \frac{263162}{10000000}
$$

---

22 263162: Das Ergebnis der Division ist richtig, obwohl Leibniz in der Rechnung Versehen unterlaufen.

Ergo $\frac{11533751|03126998886679}{444014996|65548960607266}$ erit area spatii $7RD$ ita ut error sit minor quam $\frac{1}{1000,000}$. Cui addamus spatium $V7H$, seu logarithmum ab $\frac{11}{10}$ septuplicatum. Equidem pro illo logarithmo habuimus $\frac{11437}{120000}$. Sed quoniam error circiter est $\frac{1}{500000}$, isque septuplicatus est, adeoque major factus quam $\frac{1}{100,000}$. Ideo utile erit logarithmum $\frac{11}{10}$ invenire paulo exactius. Log. $\frac{11}{10}$ est $\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{500000} - \frac{1}{6000000}$. Quatuor priores termini dedere $\frac{11437}{120000}$. Addatur $\frac{1}{500000} - \frac{1}{60|00000}$ seu $\frac{11}{600|0000}$. Est autem $\frac{11437}{120000}$ idem quod $\frac{571850}{6000000}$ et log. $\frac{11}{10}$ erit $\frac{571861}{6000000}$. cujus septuplum $\frac{4003027}{6000000}$. Si loga-

---

5 f. *Nebenrechnung:* $\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40,000}$

$$\begin{array}{rr}
+\ 24000 & -1200 \\
+\ \ \ \ \ 80 & -\ \ \ \ 6 \\
\hline
+\ 24080 & \\
-\ \ \ 1206 & \\
\hline
\frac{22874}{24000} & \frac{11437}{12000}
\end{array}$$

7 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r}
11437 \\
5 \\
\hline
571850 \\
11 \\
\hline
571861 \\
7 \\
\hline
4003027
\end{array}$$

rithmum ab $\frac{11}{10}$ placeat reducere ad fractionem decimalem fiet: $\frac{571861}{6|000000} \sqcap \frac{\aleph}{100|000000}$ et $\aleph \sqcap \frac{\cancel{3}\,\cancel{4}\cancel{4}}{\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}\,\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}} \int 953101666$ etc. et erit $\frac{571861}{6000000} \sqcap \frac{953101|66|66\text{ etc.}}{1000000|00|00\text{ etc.}}$ Log. ab $\frac{11}{10}$.

Eodem modo $\frac{11533751}{444014996}$ est $\frac{\beth}{1000,000,000}$ et $\beth \sqcap 25976039$. Addendo $\beth$ et $7\aleph$ fiet $\frac{693147201}{1000,000,000}$ log. binarii.

---

3 f. *Nebenrechnungen:*

```
      268155388
      ----------
      ::::553::
      26::66648:
      59819203:
     337626036:
     ----------
      ::::2::::
      33::3603::
      77767599::
     433376100::
     ----------
      ::::7::::::
      ::::8:10:::
      43:306533:::
     2653451008:::
     ------------
      26::4510:::::
      375:57328
     115337510:::68
     ------------
     11533751000000000 ∫ 2597
     ------------
      444014996666666
       44401499999999
        4440149999999
         444014999999
          44401444
           44401
```

```
   147319156
   ----------
    ::::191::
    14::2025:
    587368016
   4143454120
   ----------
    41::4541::
    524:68732:
   1746390400:
   ----------
    ::::3:::::
    1::6490:::
   247499444:::
2681553880000 ⨍ 6039        25976039
   4440149966666
    444014999999
     44401499999
      4440149999
       444014
```

```
   אמ  95310166
              7
   ----------
 7 אמ 667171162
   ב   25976039
   ----------
       693147201
```

[*Zusatz 1*]

6 9 3 1 4 7 1 8 0 5 | 5 9 9 4 5 2 9 1 4 1 7 1 9 1 7 | 0 Log. 2

2 3 0 2 5 8 5 0 9 2 9 9 4 0 4 5 6 2 4 0 1 7 8 7 0 0 Log. 10

1 0 9 8 6 1 2 2 8 8 6 0 $\frac{1}{2}$ Log. 3

$$\frac{b}{1f} - \frac{b^2}{2f^2} + \frac{b^3}{3f^3} - \frac{b^4}{4f^4}$$

						1	
	1 2 1				2 8		
1 6 7 6	ƒ	3 3 5	1 6 0 0	1 6 0 0	ƒ	2 1	
5 5 5				7 6 6			
				7			

[*Zusatz 2*]

$$\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3} \Big| + \frac{a^5}{1,2,3,4,5}$$

$$\text{comp. sin. } \sqcap\ 1 - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4} \Big| - \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6}$$

2 *(1)* 2371652661731604211830 67. log. 10 *(2)* 6931471805|5994529141719170 *L* 12 f. *(1)* $\frac{1}{1} - \frac{a^2}{1,2}$ *(2)* $\frac{a}{1}$ *L*

sin ⊓ 0 comp sin ⊓ 1

2–4 Log. 2: Die Werte für *ln* 2 u. *ln* 10 hat Leibniz aus J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, S. 49–53, entnommen, den Wert für *ln* 3 aus N. Mercator, *Some illustration of the Logarithmotechnia*, in: *Philosophical Transactions* III Nr. 38 vom 17./27. August 1668, S. 760.

49. DISSERTATIO EXOTERICA DE USU GEOMETRIAE, ET STATU PRAESENTI, AC NOVISSIMIS EJUS INCREMENTIS

Die beiden Stücke gehören zu den Vorarbeiten für ein Vorwort zu N. 51. N. 49_1 beinhaltet die beiden letzten Teile „de usu ac statu praesenti Geometriae“ des Plans in L^2 von N. 39 S. 430 Z. 4–7, wobei der Abschnitt über den aktuellen Stand der Geometrie mit Ausführungen über die neuesten Entdeckungen ergänzt wurde (vgl. S. 508 Z. 17 – S. 514 Z. 15). N. 49_2 ist ein Entwurf zur Erweiterung des Abschnitts von S. 494 Z. 6–23.

49_1. DISSERTATIO EXOTERICA DE USU GEOMETRIAE, ET STATU PRAESENTI, AC NOVISSIMIS EJUS INCREMENTIS

[August – September 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 20 Bl. 1–2 u. LH 35 VIII 13 Bl. 1–4. 3 Bog. 2°. 10 S. Auf Bl. 4 v° N. 50. — Teildr.: 1. *LMG* VII, 1863, S. 316–326 (= S. 484 Z. 1 – S. 497 Z. 8); 2. Gerhardt, *Leibniz in London*, 1891, S. 11–19 (= S. 497 Z. 9 – S. 514 Z. 15); 3. (engl. Teilübers. von 2. = S. 510 Z. 14 – S. 514 Z. 15 mit Regest von S. 497 Z. 9 – S. 510 Z. 13) Child, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 186–190; 4. VI, 3 N. 54_1 S. 437–450 (= S. 484 Z. 1 – S. 497 Z. 8).
Cc 2, Nr. 1224 A, D

Datierungsgründe: Der Hinweis auf Fermats Quadratur der höheren Parabeln und Hyperbeln in N. 28 (S. 320 Z. 15–18 erscheint in N. 49_1 (S. 507 Z. 11–15) mit der zusätzlichen Nennung Robervals als Quelle, in N. 51 ist der Hinweis im Scholium zu prop. XXV gestrichen (vgl. die Variante zu S. 588 Z. 22 bis S. 590 Z. 1). Der Fehler bei der Kreisbogenapproximation für einen Winkel mit einem Tangens kleiner als dem zehnten Teil des Radius wird am Ende von N. 49_1 (S. 512 Z. 10 – S. 514 Z. 6) genauer abgeschätzt als in N. 28 (S. 347 Z. 22 – S. 348 Z. 4), in N. 51 gibt Leibniz dagegen in prop. L eine Abschätzung der Approximation für Winkel, bei denen der Tangens kleiner als der fünfte Teil des Radius ist (S. 660 Z. 18 bis S. 661 Z. 1). Dies spricht dafür, dass N. 49_1 nach N. 28 und vor dem entsprechenden Abschnitt in N. 51 entstanden ist. N. 49_1 beinhaltet Übernahmen aus L^1 von N. 39 und wurde gegenüber dem Plan in L^2 von N. 39 um einen Abschnitt über die neuesten Entdeckungen in der Geometrie (S. 508 Z. 17 bis S. 514 Z. 15) ergänzt. Die Bemerkungen über die unterschiedlichen Leistungen von geometrischem und kombinatorischem Geist in N. 40 (S. 436 Z. 9–24) werden in N. 49_1 (S. 487 Z. 22 – S. 494 Z. 5) breit entfaltet. Außerdem bildet der wesentliche Inhalt von N. 41 in modifizierter und stark erweiterter Form die Grundlage für die Ausführungen von N. 49_1 S. 503 Z. 12 – S. 514 Z. 15. N. 49_1 dürfte also nach N. 39, 40 u. 41 entstanden sein.

Dissertatio exoterica
De usu Geometriae, et statu praesenti,
ac novissimis ejus incrementis

Quae saepe mihi cum Variorum Studiorum hominibus communicatio est, audire subinde fecit querelas de vanitate Geometriae, quibus illa frustra opponat demonstrationes suas, quando non de veritate sed usu quaeritur. Scilicet non omnino inepte jactatur, laborare nos intemperantia studiorum, unde nihil redundet in vitam: utilia pleraque dudum inventa esse, aut si qua supersint, non esse speranda a Geometria. Pro Scholasticorum nugis (sic enim illi vocant, nescio an jure), nunc passim explosis alias introduci nugas, magis speciosas, sed et magis difficiles. Parum accessurum generi humano, si duae proportione mediae inveniantur inter duas datas, nisi forte redeunte oraculo Delphico pestem aliquando accurata cubi duplicatione depelli regionibus posse credamus. Illam vero toties imprudenter jactatam, toties vane promissam Circuli Quadraturam, quid tandem producturam putemus, an forte aurum philosophicum sive Lapidem illum mirificum, quatuor Elementorum velut lateribus in unius circuli circumferentiam coëuntibus, indissolubiliter compaginatum, quemadmodum disserebat Michael Mayerus Chymista, Rosae-Cruciorum assecla, peculiari tractatu de circulo quadrato. Sunt qui vix risum continent si de parabolis aut Hyperbolis loquare; quid facerent si scirent Geometras, ad quartas dimensiones, et sursolida ascendere, quae adeo nusquam sunt, ut nec intelligi possint. Campum aliquem metiri, aut horologium Solare describere, aut castelli formam delineare, in eo om-

2 f. *Darunter, vorher geschrieben:* De Statu praesenti et incrementis novissimis deque usu Geometriae.

2 f. De ... incrementis *erg.* *L* 9 nugis | *(1)* ut illi ajunt, *(2)* (sic ... jure) *erg.* | nunc *L* 16 qvemadmodum *(1)* Michael Mayerus Chymista Germanus, Rosae-Cruciorum jurisconsultus, aliqvando peculiari tractatu rationaliter | de circulo qvadrato *erg.* | disserebat. *(2)* disserebat *L* 19 sursolida | et alia spatia imaginaria *erg. u. gestr.* | ascendere *L* 19 possint. | Mirum in chimaeras imperceptibiles cum suis autoribus ad spatia imaginaria relegandas censerent. *gestr.* | Campum *L*

8–485,4 Pro ... brevis: vgl. N. 39, Stufe *(1)* der Variante zu S. 428 Z. 11 f. 16 disserebat: M. Maier, *De circulo physico quadrato*, 1616; die von Leibniz beschriebene Figur ist auf dem Titelblatt abgebildet.

nem Geometrae laudem sitam putant. Algebrae vero sunt qui nec nomen ferre possint, quemadmodum de se ait Fortinus de la Hoguette in testamento. Scilicet crucem ingeniis figi, et novas excogitari scientias, quasi non satis veteres praebeant, quod agamus, aut quasi vita longa sit, ars brevis. Et memini egregios quosdam Viros mirari Cartesium de se fassum, quam male ut multis videri possit tempus collocaverit, sex septimanis integris in una Pappi quaestione consumtis. Alii quando Geometras ad naturae opera explicanda accedere vident, et de apum cellis, aut sexangula nivis forma, aut aquae salientis linea ratiocinari, Aristophanis jocos renovant, qui Socratem introducit pulicum saltus curiose metientem. De Mechanicis autem ita sibi aliisque persuadent, parum profici Geometrarum subtilitatibus, quibus materia reluctetur: inutilem eorum diligentiam fuisse, qui Cartesii autoritate aut rationibus persuasi, Hyperbolas polire aggressi sunt; et inventa pulcherrima casui potius, aut superficiariis ratiocinationibus quam Mathematicorum profunditati deberi. Testimonio esse posse Tubi optici concinnatorem primum, hominem literarum expertem. Denique Cartesium ipsum, in flexu aetatis, versis ad phy-

7 f. aut ... linea *erg. L*

2 ait: vgl. P. Fortin de la Hoguette, *Testament, ou conseils fideles d'un bon pere à ses enfans*, 1648, seconde partie, chap. VIII (2. Aufl. 1648, S. 147). 2 f. crucem ... figi: vgl. L. Vives, *De disciplinis*, 1531, lib. V, cap. III (Vives, *Opera* VI, S. 197) sowie N. 39 S. 428 Z. 26. 4 mirari: Leibniz bezieht sich wohl u. a. auf R. Boyle, *The excellency of theology*, 1674, S. 61, u. *ders.*, *Some considerations about the reconcileableness of reason and religion*, 1675, S. 70 (*BW* VIII S. 36 u. 271); vgl. VI, 3 N. 16 S. 224 u. 236. 5 fassum: vgl. R. Descartes, *Lettres*, Bd 2, 1666, S. 340 (*DO* I S. 244). 7 de ... metientem: In der Aufzeichnung *Geometria amoenior* (Cc 2, Nr. 939; LH 35 VIII 30 Bl. 151), dat. April 1675, erwähnt Leibniz auf Bl. 151 r° damals noch nicht publizierte Forschungen von Thévenot zur „Geometria apum" (vgl. M. Thévenot, *Discours sur l'art de navigation*, 1681, problème IV, S. 21-27) und auf Bl. 151 v° von Mariotte zur Hydraulik: „De linea sexti gradus admonente Mariotto in jactibus aquarum observata" (vgl. E. Mariotte, *Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides*, 1686, u. ders., *Regles pour les jets d'eau*, 1693). Auf Bl. 151 v° verweist Leibniz weiter auf R. Bartholin, *De figura nivis dissertatio*, 1661. Bartholin nennt auf S. 4 u. a. R. Descartes, *Les Météores*, 1637, discours 6, S. 216-236, bzw. *Meteora*, 1644, cap. 6, S. 259-278 (*DO* VI S. 291-311 bzw. S. 681-692), und J. Kepler, *Strena seu de nive sexangula*, 1611 (*KW* IV S. 259-280); Kepler spielt außerdem auf S. 5 (*KW* IV S. 264) auf die von Leibniz erwähnte Sokratesszene in Aristophanes, *Nubes*, 144-152, an und untersucht auf S. 6-11 (*KW* IV S. 265-270) die Form der Bienenwaben. 10 f. inutilem ... sunt: R. Descartes, *La dioptrique*, 1637, S. 100–121, bzw. *Dioptrice*, 1644, S. 157–177 (*DO* VI S. 176–196 bzw. 626–634), behandelt die Vorzüge hyperbolisch geschliffener Linsen, die jedoch erst im 19. Jh. in ausreichender Qualität hergestellt werden konnten. 13 concinnatorem: Gemeint ist Jacob Metius; s. u. S. 491 Z. 21 – S. 492 Z. 2.

sicam studiis, Geometriae solenniter renuntiasse. Haec et his fortiora dicuntur passim, a Viris etiam doctis et prudentibus: tum vero inprimis cum causas irarum habent, ut Scaliger in Clavium et Vietam, nec abnuo subesse aliquid veri, et saepe plus promittere Geometras, quam praestare possit Geometria: et magna theorematum farragine memoriam obrui, et acriore figurarum contemplatione, animi vigorem labefactari, qui rebus agendis servari debet: quare operae pretium erit paucis exponere, quantum ab accuratis rerum aestimatoribus ⟨Geometriae pretium po⟩nendum sit, quis sit verus ejus in vita usus, et quousque ab homine indulgendum videatur scientiae pellaci.

Geometrae nomen ut hinc ordiar, video semper latius apud eruditos, quam apud vulgus patuisse. Geometria enim plerisque videtur scientia figurarum tantum; de Lineis, de Triangulis, de Circulis, de Solidis, de Cylindro, Cono, Sphaera. Docti vero ita judicant,

2 f. tum ... Vietam *erg. L* 5 figurarum *(1)* imaginatione, animi attentionem periculose *(2)* contemplatione *L* 6 f. qvantum ... sit *erg. L* 8 f. pellaci. *(1)* Geometria ut hinc ordiamur scientia est de magnitudine eorum qvae situm habent, sive de extensis. | A duabus scientiis generalioribus praesidia petit, *(a)* de magnitudine in universum, qvam vulgo Analysin vocant, et de si *(b)* ab una de magnitudine sive *(aa)* ratione *(bb)* proportionibus mensuraqve et numeris in universum, qvam vulgo Analysin vocant, *(aaa)* cuius portio est arithmetica *(bbb)* et si ad mensuram | communem *erg.* | referatur Arithmeticam et ab altera de similitudine in universum, sive de formis, qvam Combinatoriam appellare soleo. *gestr.* | *(aaaa)* Cumqve vel situs eorum qvo *(bbbb)* Theoremata eius hunc habent usum, ut vel situm eorum inveniamus qvorum magnitudo data est, sive ut data magnitudine fiant data positione; vel contra ut eorum magnitudinem *(aaaaa)* dimetiamur *(bbbbb)* inveni *(ccccc)* definiamus, et velut in calculos referamus, qvae jam positione data ac descripta habentur. Illud constructio, hoc dimensio appellatur. Ut si cui inveniendam proponam lineam | in proposito plano describendam *erg.* |, *(aaaaaa)* cuius perpendiculares *(bbbbbb)* a cuius punctis omnibus ductae *(aaaaaaa)* perpendiculares *(bbbbbbb)* ad datum punctum minimae sint datae magnitudinis ejusdem, adeoqve aeqvales inter se: patet has minimas dari magnitudine, nondum dari positione, anteqvam appareat *(2)* Geometriae *(3)* Geometrae nomen | ut hinc ordiar *erg.* |, video *(a)* apud veteres pariter et nostros latius *(b)* semper *L* 11 Circulis, | de agrorum aut doliorum dimensione *gestr.* | de *L*

1 renuntiasse: vgl. R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 402 (*DO* II S. 95). 2 habent: J. J. Scaliger, *Cyclometrica elementa duo*, 1594, wurde u. a. von Fr. Viète, *Munimen adversus nova cyclometrica*, 1594 (*VO* S. 436–446), widerlegt, worauf Scaliger im *Appendix ad Cyclometrica*, 1594, antwortete. Nachdem er in *Elenchus et castigatio Anni Gregoriani*, 1595, die von Chr. Clavius in päpstlichem Auftrag durchgeführte Gregorianische Kalenderreform kritisiert hatte, antwortete Clavius mit *Elenchus et castigatio calendarii Gregoriani castigata*, 1595, und publizierte 1609 eine *Responsio ad convicia et calumnias Jos. Scaligeri in calendarium Gregorianum: item Refutatio cyclometriae eiusdem*. 11–487,4 Docti ... facit: vgl. Th. Hobbes, *Elementorum philosophiae sectio tertia de cive*, 1642, epistola dedicatoria, a iii r° (*HOL* II S. 137).

unam eandemque esse scientiam illam quae per omne rerum genus diffusa, accuratas et in longum protractas ratiocinationes exercet. Quemadmodum enim Oceanus idem est, qui prout varia litora alluit, nunc Atlanticus, nunc Aethiopicus, nunc Indicus appellatur; ita eadem sciendi ars omni argumento apta variorum theorematum velut sinus facit. Unde constat veteres cum Apollonium Geometrae nomine velut praecipuo honestassent, omnibus doctrinae solidioris laudibus a se cumulatum credidisse: et hodieque si quem hoc nomine homines in his studiis versati appellent, ab ingenio illo mathematico laudare quod per longinqua et difficilia, non tentandi arte, aut divinandi felicitate; sed quodam animi vigore, sibi viam facit. Itaque et Aristotelis *Analytica* Geometrice scripta dicere ausim, quae in demonstrationes redigere non difficile, et si quis res Metaphysicas pari rigore tractaverit, ei Geometrae laudem non abnuerim, etsi nec aequationes unquam nec figuras cogitavit. Diophantum quoque fateor et Fermatium in mediis numeris Geometras egisse, et Archimedem, ac nostro tempore Galilaeum non minora in Mechanicis quam in Tetragonisticis, aut Centrobarycis Geometriae specimina dedisse: Cartesium autem magno ingenio id egisse, ut Physica ipsa quantum licet Geometrica esset. Nec dubitem de eo quod justum aut utile est, de republica, de numero habitantium, de pretio rerum, de re mercatoria aliisque multis dici posse quae Geometriam sapiant, certitudine pariter dogmatum, et eruendi difficultate. Geometriam ergo tueri idem est ac ratiocinandi severitatem defendere, quae longo mentis itinere characterum aut figurarum auxilio incorrupta decurrat. Unde sunt aliqui qui se Geometras esse ignorant ipsi, cum severe tamen et profunde in eo quod intelligunt argumento ratiocinentur.

Ego qui me non ante autores capere arbitror, quam origines intelligam, fontesque unde egregia cujusque inventa manarint; duo eorum qui inventores habentur summa genera notavi, aliisque ingenia Geometrica aliis Combinatoria esse. Qui Geometrico sunt

4 sciendi | velut *erg. u. gestr.* | *(1)* forma in omni argumento variorum theorematum formam induit *(2)* ars *L* 13 et *(1)* Archimedes ac Galilaeu *(2)* Archimedem ac Galilaeum *(a)* maximos Viros in Hyd *(b)* atqve Heronem, *(3)* ac ... Galilaeum | et Pascalium *gestr.* | non minora in | Hydrostaticis et Pneumaticis, qvam vel ipsi vel alii in *gestr.* | Mechanicis *L* 20 f. Unde ... ratiocinentur *erg. L*
24 esse. *(1)* Qvi Geometrico sunt ingenio multas per ambages, asperaqve et praerupta progressi, vincunt obstacula, et *(a)* erunt *(b)* tandem in ardua enituntur: nulla eos difficultas deterret, ubi satis persuasi sunt de possibilitate coeptorum; qvae ab eos producuntur in lucem, s *(2)* Qvi *L*

22–494,5 Ego ... pendet: vgl. N. 40 S. 436 Z. 9–24.

ingenio eorum inventa difficilia sunt, et profunda, et multa meditatione expressa. Qualia nec facile enuntiantur, nec statim a quovis auditore aut spectatore intelliguntur, unde Exemplum elegans habemus in Machina textrice, nunc passim frequentata, Scoti cujusdam invento, quod novennio integro occupavit autorem suum, aut in Arithmetico instrumento, quod omnem animi laborem in rotas transfert.

Combinatoria ingenia plus habent felicitatis, minus laboris; simplicia sunt inventa eorum, et paucis verbis tota dicuntur; ut plerumque animadversione potius quam meditatione, indigeant ac levi magis animi ictu, quam subtili indagatione parentur. Petuntur enim fere ex rebus e medio positis, certa quadam relatione connexis; aut experimentis, quae hactenus pro sterilibus habita, felici conjunctione subito usum inveniunt. Acus Magneticae vim directricem, credibile est, diu incultam jacuisse opinione inutilitatis; donec genius aliquis non vulgaris vidit, quanti esset notam semper habere mundi plagam. Quid facilius quam vaporem e rebus calore sublatum in corpus densare; exempla balneorum ante oculos erant, nemini tamen Graecorum Romanorumque in mentem venit spiritum e vino elicere, quamvis testatus esset Galenus quantum illi debiturus esset, qui separationem partium vini docere posset, qualis lactis jam tum habebatur. Quod nuper prodiit artificium motus aequabilis pure mechanicum, felicis tantum combinationis opus est, ut mirari queas nulli in mentem venisse, fieri posse ut dum elateria per vices agunt, prima in eundem semper statum restituantur, antequam ad ipsa ⟨r⟩evertatur ordo, quo fit, ut

2 facile *(1)* illis ab aliis praeripiuntur, nec facile qvisqvam attribuat sibi; unde *(a)* necessario composita esse solent, non qvod simpliciora esse possunt, sed qvod ita jubeat *(aa)* res ipsa *(bb)* natura rei qvae desideratur: Tale *(b)* in *(aa)* media ⟨na⟩ *(bb)* necessaria compositione *(aaa)* nec *(bbb)* qvamvis non ideo semper composita sunt, nisi *(aaaa)* qvantum *(bbbb)* qvoad *(2)* enuntiantur *L* 4 f. aut ... transfert *erg. L* 13 qvam *(1)* fumum illum e rebus igne sublatum *(2)* vaporem *L* 16–489,2 Qvod ... plane *(1)* statum *(2)* formam ... fiant *(a)* isochronae *(b)* aeqvidiuturnae *erg. L*

---

3 Machina: Vermutlich ist die von William Lee aus Nottinghamshire erfundene Strickmaschine gemeint. 4 Arithmetico instrumento: Leibniz arbeitete etwa seit 1670 an seiner Rechenmaschine (vgl. Leibniz' Aufzeichnung *Instrumentum panarithmicon – Lebendige Rechenbank*, gedr. in Mackensen, *Vorgeschichte*, S. 128–138. 15 testatus: vgl. z. B. Galen, *De simplicium medicamentorum temperamentis ac facultatibus*, I, 19. 16 nuper: Ein Auszug aus dem Brief von Leibniz für La Roque über seine Erfindung zur Uhrenregulierung war im *Journal des Sçavans*, Nr. 8 vom 25. März 1675, S. 93–96, und in engl. Übersetzung in den *Philosophical Transactions* X, Nr. 113 vom 26. April / 6. Mai 1675, S. 285–288, gedruckt worden (III, 1 N. 45_{3+4}).

⟨p⟩ost breves admodum periodos ⟨ad⟩ eandem plane formam machina redeat, adeoque idem quoque redeat effectus, periodique fiant aequidiuturnae. Unde intelligi potest, aliquando homines longinqua prospicere, quae ante pedes sunt non videre. Saepe tamen non combinatione simplici, sed experimento opus est, ut aliquid egregium eruatur, quo casu manifestum est, fortunam venire in partem juris; tantum enim quisque invenisse videbitur, quantum praejudicare potuit ante tentamentum: et hujus generis inventa fuere quorundam Alchymistarum qui saepe frivolis admodum rationibus ducuntur, et destituti, non ideo absistunt; quod si aliquando in nonnullis quae ipsi non quaerebant eventus respondeat conjecturae, tum illi vero mirifice triumphant, et prudentiam venditant suam, cum misericordiam potius naturae parentis laudare deberent, quae tam assiduos sui cultores noluit esse perpetuo infelices.

Sed illi prae caeteris apti ad indagationem veritatis, pariter, et inventa vitae utilia in lucem producenda, qui combinatorio ingenio, studium acre Geometriae, et profundae meditationis aut etiam si materia postulet experiundi patientiam junxere. Nam si paucae quaedam ac faciles paratu combinationes, tot praeclara nobis inventa dedere; dubitari non debet, majora erutum iri, cum interiores rerum latebrae excutientur: Medicam certe artem nemo speret nisi ab ingenio utrumque complexo valde augeri posse: subtilior est causarum implicatio, quam ut levi inspectu detegi possit, et nisi in natura rerum, Geometrarum exemplo theoremata condantur, et morosa diligentia consequentiae in longinquum producantur, semper in cortice haerebimus. Imitemur summos viros, Pythagoram, Democritum, Hippocratem, Aristotelem, Archimedem, Galilaeum, Cartesium, Pascalium, quibus habet quos addat tempus praesens. Geometriam exemplo Conditoris in ipsa natura exerceamus. Consideremus quantum illa Copernico profuerit et Keplero;

4 ut ... eruatur *erg. L* 6 f. fuere *(1)* Chymicorum *(a)* , qvae plerumqve *(b)* : nam horum vulgus *(aa)* levissimis *(bb)* frivolis admodum rationibus ducitur *(2)* Auripetarum *(3)* qvorundam Alchymistarum | vulgarium *gestr.* | qvi *L* 8 in ... qvaerebant *erg. L* 14 aut ... experiundi *erg. L* 15 tot *(1)* praeclaras nobis machinas produxere *(2)* praeclara *L* 23 Consideremus *(1)* qvam praeclara de Magnete di *(2)* qvantum *L*

3 homines ... videre: vgl. z. B. Cicero, *Tusculanae disputationes*, V, 39, 114, bzw. ders., *De re publica*, I, 30.

quantum a Scheinero, et Cartesio incrementi acceperit Optica; quid Mechanici Stevino debeant, et Galilaeo, quam ipsis Medicis facem Sanctorius praeluxerit.

Cochleae cylindricae, sive ut vulgo vocant fine carentis, utique fortissimae potentiarum usus uniformitate lineae ejus nititur qua fit, ut sibi per omnia congruat; alioqui enim nec moveri possit cochlea, nisi linea ejus in suis ipsa vestigiis labi posset, quod praeter ipsam soli linearum rectae ac circulari datum est. Hoc vero consideratio utique Geometrica erat. Pulcherrimum Antliae genus cochleiforme, in qua corpora ipso in speciem descensu attolluntur, ad Archimedem fama publica refert, quanquam memorabile sit quod de Mediolanensi quodam cive refert Cardanus, qui prae nimio gaudio in delirium incidit, quod primum a se inventam putaret. Speculorum urentium miracula etsi fama inferiora, magna tamen, nec nisi Geometriae operatricis effecta sunt. Graphicen, qui imaginationi potius felici quam Geometriae tribuit, videat quantum inter nostratium et Chinensium delineationes intersit. Chinensibus natura favens colores admirandos suppeditat, quorum gratiam facile nostri arte vincunt: arte, inquam filia Geometriae. Graeci non ante artes coluere, quam Geometriam, et Arabes tum maxime in his studiis excelluere, cum potentia Asiam atque Africam complexi sine aemulis floruere; et non ante barbar⟨ies⟩ ⟨desiit⟩ in occidente, quam redux ab Exilio Geometria, etiam Architecturam et pictoriam, et statu⟨ariam⟩ ⟨add⟩uxit. Astronomia autem quid nisi Sphaericae doctrinae translatio est ad Mundum; et Planetariae Hypotheses Geometrica ratiocinia sunt, quo motus astrorum calculo subjicerentur. Qu⟨id⟩ ⟨v⟩ero Trigonometria mirabilius, cujus u⟨sus⟩ nemo indoctus, utcunque summo ingenio praeditus intelligat. Quis enim credat,

1 qvantum a | Galilaeo, et *gestr.* | Scheinero | et De Dominis, *gestr.* | et Cartesio | et Desarguesio *erg. u. gestr.* | incrementi *L* 2 f. Galilaeo, | qvam ... praeluxerit *erg.* | *(1)* Sed operae pretium erit nonnullis illustribus inventis originem vindicare suam, qvae ad obscuros homines | aut casum parentem *erg.* | a nonnullis revocatur. Ac primum qvis facile cogitasset, *(a)* nisi a *(b)* fortissimae potentiarum, *(aa)* nisi a Geometris accepisset, *(bb)* a Geometra in usum vocatam cochleam cylindricam, sive ut vulgo vocant fine carentem, *(aaa)* si ⟨—⟩ *(bbb)* uniformem esse figuram, sibiqve per omnia congruentem | compererat *erg.* |; *(2)* Credibile est de Cochlea *(3)* Cochleae *L* 6 f. est. | Hoc ... erat *erg.* | Pulcherrimum | sive scalae sive *gestr.* | Antliae *L* 11 sunt. *(1)* Delineandi *(2)* Artem *(a)* Scenographicam *(b)* Graphicam *(3)* Graphicen *L* 19 Mundum; *(1)* et motuum compositiones, ⟨—⟩ veteres *(2)* et *L* 20 f. mirabilius, *(1)* cuius ⟨—⟩ *(2)* qvae nos sideribus admovet, aut potius coelum ad nos dedicat *(3)* cuius | admirandos *gestr.* | u⟨sus⟩ *L*

6 consideratio: vgl. Proklos, *In primum Euclidis elementorum librum commentarii* (ed. Friedlein S. 112 f.). 8 fama: vgl. Diodorus Siculus, *Bibliotheca historica*, I, 34,2 u. V, 37,3 f. 9 cive: G. Rossi, vgl. G. Cardano, *De subtilitate libri XXI*, 1554, lib. I, S. 18 (Cardano, *Opera* III, S. 366).

campum mensurari posse ex duabus stationibus dati intervalli, aut quis Indis persuasisset, Columbum ex Ephemeridibus potius quam coelesti instinctu Eclipsin praedixisse. Certum est solam fuisse Geometriam Astronomiae habitu indutam, quae Christianis aditum aperuit in Sinas; et si Martinio credimus, nihil magis affecerat ingeniosos quosdam Mandarinos, quam inviolabilis certitudo Geometricorum quorundam theorematum, quae apud Societatis Jesu patres didicerant. Quid navigatoriam scientiam et velificatoriam artem memorem, perpetuum exercitium Geometriae cujusdam non-scriptae? Limenereutica longius fortasse provecta esset, quam quidam sperant, si praesidiis Geometriae, quantum licet, uteremur. Hoc enim unius Geometriae officium est, quae ex datis duci possint docere: cum ostendat quaenam problemata determinata sint, et ex ipsis indeterminatis aliquid eliciat certum; locum scilicet, cujus omnia puncta satisfaciant. Quo fit, ut datis binis solutionibus aut aliquando pluribus imperfectis inter se diversis, una perfecta inveniatur. Quanti hoc sit, sciunt talium intelligentes. Mihi certe semper ita visum est, notum jam et veteribus artificium de Locis inter humanae subtilitatis summa specimina censeri debere. Quid pulchrius aut utilius Hydrostatica Archimedis, quam Torricellius et Pascalius, Geometrae tantis accessionibus auxere. Circa Pneumaticen autem Egregius Gerickius nostrae Antliae aëreae autor primus, et qui fertilis ingenii felicitate nulli facile cesserit, celeberrimus Boylius, saepe ratiocinia vere Geometrica, et irrefragabiles demonstrationes dedere.

Quod ipsi nobis supra objeceramus Telescopium hominis plebeji mathematica indocti opus esse, non aeque certum est, ac quidam putant. Certe Metius ille quem Cartesius memorat, in re optica speculisque ac lentibus conficiendis erat diu versatus, ut credibile sit

12 diversis, *(1)* duorum locorum intersectione qvaesitum inveniatur *(2)* una *L* 13 intelligentes |, alii credere possunt *gestr.*|. *(1)* Est hoc veterum artificium ipsa Algebra mirabilius, *(2)* Mihi *L* 16 f. auxere. *(1)* Pneumatica autem et Balistica Heronis, *(2)* Circa Pneumaticen autem *(a)* Gerickius noster Machinae Magdeburgicae *(b)* Egregius *L*

---

2 praedixisse: vgl. z. B. G. Benzoni, *La historia del mondo nuovo*, 1572, Bl. 28 v°–29 r°; lat. Fassung *Novae novi orbis historiae*, 1578, S. 60. 4 affecerat: vgl. z. B. M. Martini, *Novus atlas sinensis*, 1655, S. 31 f. 7 f. Limenereutica: vgl. VIII, 1 N. 13. 15 f. Hydrostatica ... auxere: Vgl. Archimedes, *De corporibus fluitantibus*; Bl. Pascal, *Traitez de l'Equilibre des Liqueurs, et de la Pesanteur de la Masse de l'air*, 1663; E. Torricelli, *Opera geometrica*, 1644, S. 191-203 (*TO* II S. 185-197). 16–19 Circa ... dedere: vgl. vor allem O. v. Guericke, *Experimenta nova*, 1672; R. Boyle, *New Experiments Physico-Mechanicall, touching the Spring of the Air*, 1660 (*BW* I S. 141-301). 22 memorat: R. Descartes, *La Dioptrique*, 1637, S. 1 f., bzw. *Dioptrice*, 1644, S. 71 (*DO* VI S. 82 bzw. S. 584), nennt Jacob Metius als Erfinder des Teleskops.

radiorum naturam et opticas demonstrationes intellexisse, mathematicis enim non inepti sunt etiam aliarum literarum imperiti. Sed aliud habeo quod de hoc negotio dicam, vel ideo memorabile quod a paucis video adverti. Keplerus in Epistola ad Galilaeum, qua *Nuntio Sidereo* respondet, haec narrat, Rudolphum Imperatorem, qui ut constat his studiis mire delectabatur, jam dudum antequam de Telescopio quicquam auditum esset, ostendisse sibi descriptionem Machinae duobus vitris instructae, inter Portae collectanea repertam, obscuriuscule traditam; hanc se obiter considerasse, ait Keplerus, et familiari eruditis fastidio, quoties aliena, et suspecta inventa offeruntur, statim rejecisse: nunc vero poenas dare temeritatis et judicii praecipitati. Quae cum ita sint, credibile est Telescopii ideam esse foetum Optici, rationalis, sed cujus conatibus, ut solet, fortuna non respondit. Unde, cum aliis forte communicasset laborem ex quo nihil amplius speraret, quid vetat consilii rationem aeque in primi executoris ac Portae manus venisse. Certe Porta jam a decimo octavo aetatis anno se devoverat conquisitioni arcanorum, omni librorum genere lustrato, itineribus susceptis.

Porro Microscopium, quantum intelligere potui, inventum est summi artificis Cornelii Drebelii Alcmariensis. Satis ergo vindicasse videbor industriam Geometrarum, ubi unum Chronometron adjecero. Mirum est omnium hominum oculos ad Galilaeum usque adeo fuisse ἀγεωμετρήτους, ut de isochronismo oscillationum penduli, quo nihil frequentius oculis obversatur, nemo somniaret. Galilaeum autem non conjectura quadam levi inductum, sed rationali via progressum mirabile usque adeo arcanum produxisse, patet ex illa quam tenuit, inquirendi ratione. Scilicet a Motu uniformi et uniformiter accelerato orsus, arcana descensus gravium aperuit primus; quae cum plano inclinato applicuisset, ingeniosissime pervenit, ad praeclarum illud theorema, quod chordis quotcunque intra

1 f. mathematicis ... imperiti *erg. L* 9 temeritatis *(1)* , re ab aliis producta in lucem, aliisqve exemplo esse posse, ut de rebus a qvocunqve venientibus aeqvius et maturius judicent. Qvae si vera esse credimus uti certe *(2)* et *L* 16 Alcmariensis. *(1)* Et P. Antonius Rheita Capucinus binoculos Tele *(2)* Haec satis vindicasse mihi vide *(3)* Satis *L* 18 de *(1)* vibration *(2)* oscillationum Pendulo *(3)* isochronismo *L*

4 narrat: vgl. J. Kepler, *Dissertatio cum Nuncio sidereo*, 1610, S. 6–9 (*KW* IV S. 291–293). 6 collectanea: J. Kepler, *a. a. O.*, verweist auf G. B. Porta, *Magiae naturalis libri viginti*, 1589, lib. XVII, cap. X u. XI, S. 269 f. 12–14 Certe ... susceptis: vgl. *a. a. O.*, praefatio, [a3 r°]. 15 intelligere potui: vgl. den Brief von Leibniz an Ramazzini, 24. Januar 1690, III, 4 N. 230 S. 452 f. 23 theorema: vgl. G. Galilei, *Dialogo*, 1632, S. 444 f. (*GO* VII S. 476).

circulum ductis ad idem punctum in imo concurrentibus; descensus a circumferentia circuli ad punctum imum per cordam quamlibet, minorem majoremve sit isochronus. Unde sequebatur cum oscillationes pendulorum exiguae essent, circuli autem quos describerent magni, descensum in corda, a descensu in ipsa circumferentia sensibiliter non differre. Huc usque rem produxit Galilaeus, duoque posteritati absolvenda reliquit, applicationem Penduli ad Horologium, quo numerandi abesset labor, et inventionem lineae curvae, cujus evolutione alia rursus curva describeretur a pendulo, quae cordarum circuli proprietatem haberet, id enim arcus circuli praestare non poterat, unde repetitae diu vibrationes pendulorum haud dubie erroneae fiebant. Porro alterum praestare Combinatorii, alterum Geometrici ingenii erat utrumque immortali opere Hugenius pulcherrime absolvit.

Satis experientia praeteritorum confirmasse videor usum in vita Geometriae profundioris, nunc paucis addam, superesse illi etiamnum, quod agere possit, ne quis sibi persuadeat Trigonometriam aut Sinuum canonem ad egregia praestanda sufficere. Sane non est dubitum, Elateres, et Sonos, et ipsam Musicen Geometricis legibus subjici, et artem projiciendi perfici posse, et tempus venturum quo ignis ipse jugum subibit, quod caetera Elementa jam patiuntur. Multa restant dicenda de motu liquidorum, quae Geometram expectant; sed et in solidis detrimenta quae machinae a frictione patiuntur aliaque quae vulgo experientiae committuntur, aestimationem ferunt, quae ubi absoluta erunt, perfectum de machinarum vi judicium in nostra potestate erit: nunc enim illud saltem possumus, ne nimium promittamus; tunc licebit machinas calculo subjicere ad instar numerorum, ubi primum experimenta quaedam fundamentalia diligenter capta erunt. Porro

3 f. circuli ... magni *erg. L* 8 haberet, *(1)* qvod arcus circuli praestare non posset. Hanc vero lineam *(a)* evolvenda *(b)* evolutam pariter et evolutione descriptam esse Cycloeidem *(2)* id ... diu *(a)* pendula haud dubie erronea *(b)* vibrationes *L* 10 utrumqve *(1)* pulcherrime absolvit Hugenius, ac mea sententia, si nihil aliud unqvam egisset, meruit immortalitatem. *(2)* immortali *L* 11 experientia | praeteritorum *erg.* | confirmasse videor *(1)* usum Geometriae profundioris, in vita ne qvis *(2)* Geometriae non-perfunctoriae utilitatem *(3)* usum *L* 16 patiuntur | , legum scilicet Mechanicarum *gestr.* | . Multa *L* 17 expectant; *(1)* et primum atqve intimum Motus arcanum, videtur ex uno theoremate contineri, qvod non nisi Geometria demonstret *(2)* primaqve *(3)* unica naturae *(4)* Lex naturae arcanumqve motus, Geometrica theoremata sunt, et si qvis compositas nonnihil machinas suscipiet, qvanti aestimabit vires machinae *(5)* sed *L* 17 f. patiuntur | aliaqve ... committuntur *erg.* | , aestimationem *(1)* merentur diligentem, et de variis materiis *(2)* ferunt *L*

10 absolvit: vgl. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673 [Marg.] (*HO* XVIII S. 69–365 u. XVI S. 315–318).

observavi problemata pleraque ⟨Mechanicae⟩ subtilioris, ubi ad Geometriam puram reducta sunt, resolvi in quadraturas, et certorum quorundam spat⟨iorum curvil⟩ineorum dimensionem. Unde necessitas quaedam nobis imposita est, hanc Geometriae partem inprimis perficiendi; vel ideo quod nondum in calculi potestate est, nec ex Cartesii inventis pendet.

⟨D⟩uplex est Geometriae utilitas, nam una ad augendas vitae commoditates pertinet, altera in ipsa Mentis perfectione consistit. De priore tantum diximus hactenus: quam quivis capit, posteriorem non nisi intelligentes aestimabunt. Illam Geometrae omnibus communicant, hanc servant sibi, ut scilicet sit aliquod illis pretium operae etiamsi nemo gratiam haberet. Nemo dubitare potest potissimum unicuique esse mentem ejus, qui vero profundius ista contemplantur, etiam illud ajunt, quod nos ipsos esse dicimus, id mentem esse. Perfectio ergo nostra potissima eadem est cum perfectione Mentis praesertim cum Mens perpetua sit corpus visibile dissolvatur. Perfectio Mentis vera et solida, consistit in inveniendi atque judicandi quam facultate maxime aucta. Utramque puram et in se reductam, pulcherrimis Speciminibus perficit Geometria. Nam et si quid inveniendum sit, ostendit quantum sit in potestate, quave sit eundum via; et ubi de demonstratione ac judicio agitur, severissimae ratiocinationis exempla praebet. Geometria una omnium formas illas medias, et in caduca licet materia aeternas ac per se subsistentes contemplatur, quarum ideae menti nostrae velut insitae perire non possunt; etsi omnis scientia historiarum et experimentorum extingueretur. Potest enim in eum mens nostra venire statum, ut experimenta sumere non possit, aut eorum nullam habeat rationem, quae in hac vita sumsit; sed ut extensionis et motus aliarumque formarum separatarum ideas exuat, fieri nullo potest modo. Itaque inventum de Circulo ad omnem mentis statum pertinet; contra experimenta naturae corpori ac sensibus illigatam supponunt animam; certumque est, neque colores neque sonos nisi cum relatione ad sentientis organa intelligi posse, et aliis alia apparere. Ex quibus facile intelligi potest, ad perfectionem mentis perpetuam non conferre, quae memoriam nostram locupletant, sed quae cogitandi facultatem augent.

7 ipsa *(1)* intellectus *(2)* Mentis *L* 7 f. De ... aestimabunt *erg. L* 19 possunt; *(1)* cum omnis scientia historiae et experimentalis non nisi ad huius vitae commoda pertineat *(2)* etsi *L* 22 ut *(1)* Circuli, aut Rectae *(2)* extensionis *L* 26 f. mentis | perpetuam *erg.* | non *(1)* pertinere *(2)* conferre *L* 27 qvae *(1)* mentis *(2)* cogitandi *L*

6–23 ⟨D⟩uplex ... modo: vgl. N. 49_2.

Quod mirifice facit Geometria. Ea vero ratio est, ni fallor, cur veteres tanti putaverint sejunctas a materia formas contemplari, et cur prope indignum facinus duxerint, res divinas in mortales usus prostitui. Nam Pythagoras et Socrates persuasi erant de immortalitate animi, de insitis ideis incorruptibilibus. Unde Platonem Architae pene indignatum ajunt quod Geometriam in machinis exerceret, et Archimedem referunt non nisi aegre, Hieronis precibus ad ea quae in communi usu versantur descendisse. Ego qui Motus ideam inter formas illas aeternas censeo, (: nam et circa motum non minus quam circa figuram demonstrationes habemus :) machinae elegantis inventionem, inter pulchra theoremata numerari posse puto, nec video cur minus memorabilis sit generatio parabolae, per motum projectorum, quam per Coni planique sectionem: Et naturae indagationem (quae in perpetua Geometriae applicatione consistit) ad perpetuam quoque mentis perfectionem pertinere arbitror, nam quoties divina illa artificia penitus intelligimus, quibus admirandos quosdam effectus praestitit autor rerum, non tantum admiratione ejus percellimur, et amore inflammamur quod ad voluntatem regendam pertinet, sed et artem inveniendi discimus a summo praeceptore, intellectusque nostri facultatem augemus. Illud enim pro certo habendum est naturam rerum simplicissimas problematum constructiones semper elegisse. Physica ergo, quatenus perficere Mentem potest, desinit in Geometriam, nec ante ullum phaenomenon penitus in corporibus intelligimus, quam ex primis figurae motusque ideis derivavimus. Haec non tantum a maximis viris Galilaeo et Cartesio, ne Democritum et Aristotelem memorem, inculcata sunt, sed et agnita illustri viro Francisco Bacono. Cui illud tamen concedo Physicam experimentis solis comprehensam, utcunque Mentem non afficiat, tamen et sensus recreare et plurimum ad vitae commoditates posse, et quemadmodum contemplationes ad amorem Dei referuntur, ita experimenta utilia, caritatis

1 f. sejunctas a *(1)* caduca f *(2)* materia *L* 3 et *(1)* Socrates *(2)* Plato *(3)* Socrates *L* 4 incorruptibilibus *(1)* , qvorum contemplatio tantum reminiscentia esset, ut *(a)* Socrati apud posteriorem *(b)* Platoni *(c)* Socrati *(d)* Platoni videbatur *(2)* Addiditqve Plato et *(a)* contemplationem *(b)* scientiam formarum tantum reminiscentiam esse *(3)* Unde *L* 5 et *(1)* Plutarchus refert *(2)* Archimedem *L* 6 ad *(1)* Mec *(2)* materiam *(3)* ea *L* 7 qvam circa *(1)* Geometriam *(2)* figuram *L* 10 Coni *(1)* sectionem *(2)* planiqve *(a)* intersectionem *(b)* sectionem *L* 10 f. (qvae ... consistit) *erg. L* 14 qvod ... pertinet *erg. L* 17 ergo, *(1)* in tantum Geometrica est, in *(2)* per⟨f⟩ *(3)* qvousqve perfici s *(4)* in qvantum perfici potest *(5)* qvatenus *L*

4 f. ajunt ... referunt: vgl. z. B. PLUTARCH, *Quaestionum convivalium libri novem*, VIII, 2,1; ders., *Vitae parallelae*, *Marcellus*, 14.

illius quam homo homini debet instrumenta esse. Certe Medicinam plane rationalem reddere, non nostri certe, forte nullius seculi felicitas erit; ego semper Semi-Empiricam fore credo, in tanta causarum complicatione, quas etsi intelligeremus fortasse, non possemus calculo subjicere ob nimiam prolixitatem. Tametsi illud pro certo habeam, ab hominibus sagacibus et severe atque ordine, et ut ita dicam geometrice ratiocinantibus, et experimenta non casu, sed consilio sumentibus, plus effici posse uno decennio, quam multorum decursu Seculorum actum sit.

Ut hanc ergo concludam tractationis nostrae partem, quare magni usus Geometriam esse arbitror, non tantum ob ingentia beneficia, quae inde accepit, aut expectat humana vita, sed et quod animum ad altiora et divina, et a materia sejuncta elevat; et accuratis rationibus assuefacit. Credo esse homines qui nunquam quicquam in vita certo et accurate sibi persuasere praeter sensibilia, defectu Geometriae, quod vel ideo periculosum, quoniam unicuique et Autor rerum Deus, et natura animae, et officia virtutum, non impulsu quodam, fortuito, aut consuetudine, sed firmis rationibus explorata esse deberent; quales in rerum natura esse, illi qui Geometriam nunquam salutavere, ne capiunt quidem. Etiam qui Mathematicas artes vulgari modo discunt, usus tantum causa, illa fere pulcherrima Geometrarum theoremata casu et experimentis reperta arbitrantur, sed et magnae certe eruditionis vir Josephus Scaliger sibi persuasit ab Archimede quadraturam parabolae tentando repertam. Qui sic animati sunt, Geometriam non alia probatione indigere putant, quam perpetuo successu, demonstrationibus vero nec si exhibeas, afficiuntur. Qui mentis habitus Metaphysicis sive divinis, contemplationibus ineptus est, quibus tamen, ex veterum quoque sententia vera et duratura continetur perfectio animae, ad quam paulatim elevat Geometria. Nam filum Labyrintho de Compositione Continui, deque maximo et minimo, ac indesignabili atque infinito, non nisi Geometria praebere pot-

5 et ut ... geometrice *erg.* *L* 6 sed *(1)* destinatione *(2)* consilio *L* 12 praeter sensibilia *erg.* *L* 13 et Autor ... natura *(1)* pietatis *(2)* animae, et *erg.* *L* 16 qvi *(1)* Geometriam practicam, et Mathematicam *(2)* Mathematicas *L* 17 arbitrantur, *(1)* nec aliis probationibus opus habere qvam perpetuo successu demonstrationibus autem *(a)* nec qvaerunt, nec *(b)* non afficiuntur *(2)* sed *L* 21 sive divinis *erg.* *L* 23 Nam *(1)* explicatio Labyrinthi *(2)* evolutio *(3)* filum *L* 23 f. Continui, *(1)* non nisi a Geometra expectari potest; *(2)* deqve *(a)* indivisibili atqve infinito *(b)* maximo ... nisi *(aa)* a Geometra expectari potest, *(bb)* Geometria *L*

18 sibi persuasit: vgl. J. J. Scaliger, *Cyclometrica elementa duo*, 1594, S. 122.

est, ad Metaphysicam vero solidam nemo veniet, nisi qui illac transiverit. Cum ergo ratio dictet, ut quisque naturae suae perfectionem curet, quantum in ejus potestate est, perfectio autem nostra sit inprimis perfectio ejus quod in nobis potissimum est, id est mentis, Mentis autem vim ac judicandi atque inveniendi potestatem egregie augeat geometria, consequens est homini cui vitae ratio meditationem permittit, Geometriae interioris rationem habendam; at in ea non magis quam in dialectica quiescendum esse, cum ipsa media scientiarum, hinc ad divina et ⟨sublimia⟩ aditum faciat, illinc ad humanas artes et compendia vitae jucundo admodum suavique descensu mentem demittat.

Qui de Geometriae utilitate persuasi erunt, statum ejus praesentem, et novissima incrementa nonnihil ad se pertinere putabunt. Haec vero ut exponantur rectius, quaedam ex vetustate delibanda sunt. Si ut ajunt primus mortalium Pythagoras invenit theorema illud famosum, Hecatomba dignum, quod in Triangulo rectangulo quadratum Hypotenusae aequatur summae ex quadratis laterum, fatendum est recentem admodum rem esse Geometriam, et Graecis debitam. Pythagoram itaque credibile est Elementa, et rectilinearem Geometriam dedisse. Qui primus invenit Circulos esse in duplicata ratione diametrorum; et Pyramidem esse trientem Cubi, mihi plurimum Scientiae adjecisse videtur; quemadmodum et qui numerum Corporum regularium definivit. Ad altiorem Geometriam excitatas mentes credibile est Problemate Delphico de duplicatione Cubi: tum primum enim instrumenta videntur inventa, quibus aliae quam Circulares lineae

1 transiverit. | Fateor qvae hic a me *(1)* dicun *(2)* dicta sunt *(3)* dicuntur, non nisi paucos lectores afficere posse; sed reliqvis *(a)* qvae prius *(b)* spero satisfacient, qvae paulo ante dixi. Qvae nunc de Statu praesenti et novissimis incrementis Geometriae dicam, cum sint historica tantum *(aa)* gratiora fore *(bb)* familiaria magis et grata fore arbitror *gestr.* | *(aaa)* Qvare concludo eum, qvi rationis ductum secutus, perfectionem eius qvod in se potissimum est, id est mentis qv *(bbb)* Cum ergo *(aaaa)* ipsa ratio, qvasi qvae *(bbbb)* ratio sit vox qvaedam Dei connata nobis, *(aaaaa)* unde *(bbbbb)* qvae revelationi contradicere non potest, *(cccc)* et rationi *(dddd)* ratio *L* 7 divina *(1)* ⟨—pertum⟩ *(2)* et *L* 8 demittat. | Superest, ut aliqvid de illis qvae a me hic ad *(1)* perfectionem *(2)* Geometriam promovendam ⟨—⟩untur *gestr.* | *L*

11 ajunt: vgl. z. B. PLUTARCH, *Moralia*, 1094b u. DIOGENES LAËRTIUS, *De vitis, dogmatis et apophthegmatis clarorum philosophorum*, VIII, 12. 11 f. theorema: vgl. EUKLID, *Elemente*, I, 47. 15 invenit: vgl. *a. a. O.*, XII, 20 u. XII, 7; XII, 20 wird Hippokrates von Chios zugeschrieben. 17 definivit: vgl. *a. a. O.*, XIII, 18a; der Satz wird Theaitetos zugeschrieben. 18 de duplicatione Cubi: Nach EUTOKIOS, *Commentarii in libros Archimedis*, (*AO* III S. 54–106, insbesondere S. 88) hat sich erstmals Hippokrates von Chios mit dem Problem der Würfelverdopplung befasst.

describerentur. Quadraturarum primus exemplum dedisse videtur Hippocrates Chius, Lunularum Circularium dimensione feliciter reperta. Hic erat Aristotelis tempore, status Geometriae adhuc adolescentis; donec annis volventibus perventum est ad Archimedem, sub quo nova derepente scientiarum facies enituit. Archimedem ego semper in tantum miratus sum, in quantum licet mortalem; usque adeo insignia ejus inventa, et profunda, et superioribus dissimilia, et in omnem posteritatem valida fuere. Indivisibilia certe, aut si mavis infinite parva, Geometriae sublimioris clavem, adhibuit primus, tecte licet, et ita, ut admiratio inventis, et rigor demonstrationibus constaret.

Porro cum de Geometria indivisibilium loquor longe aliquid Cavaleriana amplius intelligo, quae mihi non videtur esse nisi portio mediocris Archimedeae. Nam Cavaleriana Geometria, ad exemplum solius Quadraturae Parabolae Archimedis et dimensionis Ellipseos conformata est, nec Cartesius aliam agnovit, cum quadraturarum inventiones ordinatarum relatione cognita circumscripsit. At majora longe animo complexus est Archimedes. Nam Guldini Principium Mechanicum e Centrobarycis Archimedis ejusque momento Parabolae, et soliditate Sphaerae, ac Conoeidibus et Sphaeroidibus haud dubie natum est. Habet his omnibus subtilius quiddam atque arcanius dimensio Superficierum Sphaerae et Coni, ubi ordinatarum relatio Cartesiana, indivisibilibus Cavalerii juncta minime suffecerit. Helicis dimensio Archimedea, etiam P. Gregorio a S. Vincentio admirationi fuit, qui primus ejus cum Parabola collationem dedit; et determinationem Quadraturae Circuli ex data Helicis tangente, non sine causa suspexit Franc. Vieta.

7 Geometriae | interioris et *gestr.* | sublimioris *L* 8 f. constaret. *(1)* Qvadra *(2)* Eqvidem qvi indivisibilium usum semel *(a)* in⟨—⟩erit *(b)* intellexerit, ei qvadratura Parabolae non erit difficilior, qvam Cubatura Pyramidis Nec pauca in his atqve obvia, attigit, ut solent inventores; *(3)* Porro *L* 10 mediocris *erg. L* 20–499,1 Vieta. *(1)* Compositio vero motuum et Mechanicae *(2)* Porro *(a)* Centri gravitatis nec nomen auditum ante Archimedem a *(b)* Hydrostatica *L*

---

11 exemplum: vgl. Archimedes, *Quadratura parabolae* u. ders., *De conoidibus et sphaeroidibus*, prop. IV. 13 circumscripsit: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39 f. [Marg.]. 14 Principium Mechanicum: vgl. P. Guldin, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. II, cap. VII, prop. III, S. 147. 14–16 e Centrobarycis ... natum: vgl. Archimedes, *De aequiponderantibus*; ders., *Quadratura parabolae*; ders., *De sphaera et cylindro*; ders., *De conoidibus et sphaeroidibus*. 16 dimensio: Archimedes, *De sphaera et cylindro*, I, prop. XXXIII u. XIV. 18 Helicis dimensio: Archimedes, *De lineis spiralibus*, prop. XXIV. 19 primus ... dedit: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, S. 664–702; schon vorher wurde eine von G. P. de Roberval gefundene Reduktion der Bogenlänge der archimedischen Spirale auf die Bogenlänge der Parabel gedruckt in M. Mersenne, *Cogitata physico-mathematica*, 1644, S. 129–131 (erste Zählung). 20 suspexit: vgl. Fr. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593, Bl. 5 r°–6 r° (*VO* S. 355 f.).

Porro Hydrostatica autem demonstrant admirabile Viri ingenium in applicanda Geometria ad naturam. Si ab Archimede abieris, pauca in omni vetustate occurrent, quae his comparari possint. Apollonius Geometrae magni nomen non injuria meruit, quod primus ut arbitror Conicae Elementa absolvit, ac tres tantum Coni sectiones esse, nec alias ab obliquo quam recto Cono oriri ostendit. Conchoides et Cissoides figuras majoris facerem, si autores ad earum dimensiones pervenissent; quod cum nequiverint, argumento est Archimedeam Methodum cum Archimede fuisse extinctam, nam si artes ejus fuissent cognitae veteribus, aliqua in tanto Geometrarum numero, similia Archimedeis ingenii specimina, prodiissent: nunc vero mirum, quam insolens illis res fuerit, τετραγωνισμός, et curvae cujusdam aut superficiei dimensio, ut vel ex Pappo et Eutocio patet. Archimedis aliorumque veterum calculus analy⟨ticus⟩ ⟨curvarum⟩ videtur ⟨a⟩ nostro plurimum diversus fuisse, et per lineas potius et rationes pro⟨cessi⟩sse quam per magnitudines abstracte po⟨sitas⟩ literasque. Ex uno Diopha⟨nto⟩ discimus, non igno⟨tam⟩ illis fuisse ⟨Algebram,⟩ nam etsi non ⟨nisi⟩ rationales quanti⟨tates⟩ tractaverit; ⟨nemo⟩ tamen facile ⟨—⟩ irrationa⟨les⟩ quantitates, qua⟨rum⟩ non nisi in lineis ⟨usus⟩ elucet, parum novi⟨sse⟩ qui eas evitandi ⟨—⟩ methodum tenet. Fateor ⟨tamen⟩ si Diophan⟨tus⟩ ⟨non⟩ extaret, du⟨bitaremus⟩ nos an⟨—⟩ veteribus ⟨—⟩ ut vel ⟨— —⟩ qua⟨—⟩ ⟨—⟩ ⟨—⟩bus compen⟨—⟩ quam facile ⟨—⟩ interiri ⟨poss—⟩.

Graeci ad postremum scientias cum imperio ad Arabes transmisere. Praestantes Geometras inter Arabes fuisse, etsi paucos, vel solus Alhazen, indicio esse potest, cujus problema Opticum, ab ipsomet autore non male tractatum, nuper duo excellentes viri, laudabili ingenii certamine, per solas Conicas eleganter solvere. Friderici II^{di} Caesaris, et Alphonsi Aragonum Regis munificentia factum est, ut quae Arabes in Graecis hauserant

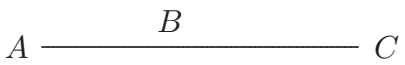
10–18 aut ... ⟨poss—⟩ *erg. L*

1 Hydrostatica: ARCHIMEDES, *De corporibus fluitantibus*. 3 f. primus ut arbitror: Nach PAPPUS, *Mathematica collectio*, lib. VII, prooemium, ersetzten die ersten vier Bücher von APOLLONIUS, *Conica*, eine ältere Darstellung der Kegelschnitte von Euklid. 5 ostendit: *a. a. O.*, I, 1–13. 6 autores: Die Konchoide wird Nikomedes, die Kissoide Diokles zugeschrieben. 10 ex Pappo et Eutocio: PAPPUS, *Mathematica collectio*; EUTOKIOS, *Commentarii in libros Archimedis*. 13 Ex uno: DIOPHANT, *Arithmetica*. 21 tractatum: vgl. IBN-AL-HAYTHAM, *Optica*, lib. 5, prop. 39. 22 solvere: Auszüge aus dem Briefwechsel von Chr. Huygens und R.-Fr. de Sluse zum Alhazenschen Problem sind gedruckt in den *Philosophical Transactions* VIII Nr. 97 vom 6./16. Oktober 1673, S. 6119–6126, und Nr. 98 vom 7./17. November 1673, S. 6140–6146; vgl. VII, 1 N. 10. 23 Alphonsi Aragonum Regis: König Alfons X. v. Castilien u. Leon.

auxerantque, in Europam postliminio redirent. Nec Alphonsinas tabulas, aut Regiomontani ac Rhaetici, aliorumque utilissimos labores memoro, neque enim illud mihi hoc loco exponere propositum, quid praxi, sed quid inventioni Geometricae accesserit. Superiori seculo Algebra novos spiritus sumsit, Geometria nostro.

Veteres credibile est non nisi aequationes quadraticas solvere potuisse. Ferunt Mahometem quendam Arabem omnium primum, radicem aequationis quadraticae generalis una quadam formula fuisse complexum, ut sciretur scilicet (si hodierno more enunties) data aequatione $x^2 + px + q \sqcap 0$ fore $x \sqcap \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - p$. Rem ipsam nec Graecis fuisse ignoratam credo, pendet enim ex solis *Elementis*, tametsi forte ejusmodi formulis non uterentur.

At Aequationis Cubicae resolutionem, et radices etiam irrationales, superiori seculo unice deberi constat.



[*Fig. 1*]

Nimirum quidam Scipio Ferreus Bononiensis, cum eleganter observasset, linea quadam recta AC in duas partes AB, BC secta; cubum totius AC excedere cubos partium AB, BC simul sumtos; triplo parallelepipedo $ABCA$ sub rectangulo partium ABC in totam CA, hinc pulcherrima ac plane analytica ratione deduxit: data qualibet aequatione cubica secundo termino carente, quem semper tolli posse, nec ille ignorabat, nempe

---

8 *Nebenrechnungen auf LH 35 I 20 Bl. 2 v°:* $x^2 + px + q[\sqcap\ 0]$. $x^2 + px + \frac{p^2}{4} \sqcap \frac{p^2}{4} - q$. $x + p \sqcap \mp\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - p$.

---

5 Ferunt: Gemeint ist Muḥammad al-Khwārizmī; Leibniz bezieht sich vermutlich auf G. Cardano, *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, 1545, Bl. 3 (Cardano, *Opera* IV S. 222) u. R. Bombelli, *L'algebra*, 1579, Bl. d2 r°. 8 $x \sqcap$: Richtig wäre $x \sqcap \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2}$. Leibniz übernimmt den Fehler aus den Nebenrechnungen. 9 pendet: vgl. Euklid, *Elemente*, VI, 28 u. 29. 14 observasset: vgl. Cardano, *a. a. O.*, Bl. 29 v° (Cardano, *Opera* IV S. 249).

$x^3 * qx + r \sqcap 0$. fore $x \sqcap \sqrt[3]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$. Hoc inventum autore vivente latuisse videtur. Bona autem fortuna accidit, ut quidam ejus discipulus cum Nicolao Tartalea, insigni, ut tunc erant tempora, Mathematico in certamen descenderet, et aequationem cubicam resolvendam proponeret, quae non nisi Scipionis artibus explicari poterat. Haesit Tartalea, sed non ideo animum despondit, erat enim ingeniosissimus. Cumque aliquid lucis hausisset ex sermone adversarii, tandem ad idem inventum pervenit, quod Cardano tunc amico sub silentii fide credidit. Cardanus gloriae cupidus, cum demonstrationem a Tartalea celatam reperisset de suo, multaque alia invenisset, atque illud inprimis late ostendisset, omnem aequationem Cubicam ad hanc denique formam reduci, et modo q non sit quantitas negativa, nec cubus ab ejus triente excedat quadratum ab ipsius r. semisse, ea ratione solvi posse, volumen sub *Artis Magnae* titulo, invito Tartalea publicavit, unde postea inter ipsos simultates natae.

Atque ea est breviter historia formulae, quam Cartesius sub nomine Regulae Cardani celebrem fecit. Origo tamen ejus ex alio longe, atque uberiore manat, fonte, quem si perspectatum habuisset Cartesius, inventum Scipionis reddidisset generalius pariterque ad altiora protulisset. Quid autem mihi circa ista contigerit, alias erit dicendi locus.

Porro cum Problemata Solida non semper ad cubicas aequationes reducantur, sed saepissime quadrato-quadratica prostent forma, restabat modus aequationes quadrato-quadraticas reducendi ad cubicas. Idque etiam inventum fuit seculi superioris. Plerique qui non nisi ex Cartesio et ejus interpretibus Algebram didicere, inventorem hujus reductionis primum credidere Cartesium, nec abnuo, Cartesium ex suis principiis ad eam pervenire potuisse; aut etiam, si mavis, pervenisse. Nam si aequationem quadrato-quadraticam datam, cum factitia, ex radicum assumtarum in se ductu excitata conferas, quo omnis Cartesii methodus redit, aequatio collatitia novissima singulari quadam felicitate, ac velut casu desinet in Cubicam. Ad casum tamen hoc refero, non ad vim methodi, nam si aliarum dimensionum aequationes eodem tractes modo,

24 qvo ... redit *erg. L*

2–12 Bona ... publicavit: vgl. N. Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse*, 1546, lib. 9, quesito XXV, Bl. 107 v°; G. Cardano, *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, 1545, cap. I, Bl. 3 r° u. cap. XI, Bl. 29 v°–30 v° (Cardano, *Opera* IV, S. 22 u. 249–251). 2 discipulus: A. M. Fiore.
14 fecit: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 93–95. 16 contigerit: vgl. III, 1 N. 96 u. VII, 2 N. 51.

radicum quidem qualitates, et veraene sint an falsae, an imaginariae, et his similia (ab autore novissimae Algebrae Gallicae perquam commode explicata) disces, a resolutione autem ipsa procul adhuc aberis. Cujus rei rationem mihi ex intimis artis principiis manifeste compertam, ac perquam facilem, et augendae scientiae viam multis jam successibus comprobatam, alias exponam. Quam autem credideram a Cartesio primum datam aequationum quadrato-quadraticarum reductionem ad cubicas; mox in posthumis Francisci Vietae ab Aleaumio publicatis reperi: ac postea novissime didici, hoc quicquid est superiori seculo deberi, et Ludovicum Ferrarium Bononiensem Cardano supparem invenisse viam ac modum quibus Radices aequationum quadrato-quadraticarum irrationales interventu Cubicarum exhiberentur. Alia illi, ac non minus elegans, quam Cartesio postea, inventi origo, sed et ipse modus non parum, si bene memini diversus. Superiore igitur Seculo aequationum Cubicarum et quadrato-quadraticarum analysis, et problematum Solidorum algebraica solutio, absoluta videtur.

Nostro seculo novis characterum formis usus Algebrae in Geometria amplior et manifestior redditus est. Magnus profecto Vir Franciscus Vieta, cum omnes magnitudines literis exprimere, et speciebus sive symbolis perinde ac numeris computare docuisset; novae cujusdam scientiae quam alii Analysin, alii Speciosam vocant, ego Symbolicam malim, fundamenta jecit. Quantus ille Geometra fuerit, quam profunde pleraque introspexerit, quam acute non pauca invenerit, quam elegantes exhibuerit constructiones, quam praeclara saepe theoremata dederit, velim ex ejus scriptis aestimari; quae plus fructus attulissent lectoribus, si familiari potius sermone quam Graecis vocabulis saepe contortis sensa animi vix doctissimus exponere maluisset. Sed scientiae pulcherrimae in clara luce collocatae laus summo Viro, Renato Cartesio debebatur. Quem ego parcius

14 seculo *(1)* Albertus Girardus ostendit qvas *(2)* novis *L*

2 explicata: vgl. J. Prestet, *Elemens des mathematiques*, 1675, S. 413–418. 7 reperi: vgl. Fr. Viète, *De aequationum recognitione et emendatione*, 1615, S. 90–109 (*VO* S. 140–148). 7 didici: Leibniz bezieht sich vermutlich auf R. Bombelli, *L'algebra*, 1579, S. 345; er hat sich die Stellenangabe auf der Rückseite des Vorsatzblattes seines Handexemplars notiert (vgl. VII, 2 N. 49_2 S. 668). 16 docuisset: Fr. Viète, *In artem analyticem isagoge*, 1591 (*VO* S. 1–12). 23 collocatae: R. Descartes, *La Géométrie*, 1637 (*DO* VI S. 367–485). 24 ostendit: Vermutlich sollte ein Hinweis auf A. Girard, *Invention nouvelle en l'algebre*, 1629, folgen.

laudare ingratitudinis genus esse arbitror. Scio in utramque partem peccari nostro tempore, ex quo velut secta quaedam Cartesianorum formari coepit. Ego qui invidiae atque irarum causas procul habeo, equidem in Metaphysicis ejus ac Moralibus contemplationibus non parem ubique certitudinem esse arbitror, sed nec novitatem. Nam desunt aliqua ejus Demonstrationibus et qui Platonem, Aristotelem ac denique Aquinatem[,] magnos certe viros[,] intellexere, nonnulla parcius mirabuntur. In Physicis Materiam nihil omnino addere extensioni, quod est fundamentum totius systematis, nondum evictum est; denique injuriam caeteris Mathematicis facit qui Cartesii inventa extra comparationem posita putat. Si quis tamen summam rerum et inventorum multitudinem spectet, fatebitur ⟨mecum⟩ post Archimedem et Galilaeum nullum extare scriptorem Mathematicum, unde plura et majora disci possent.

Nunc ut ad Analysin Symbolicam redeam unde digressus sum; cum Vieta Scientiae fundamenta, applicationemque ad rectas circulosque dedisset, ductus falsa persuasione de inutilitate linearum altioris gradus medio in cursu subsistit. At Cartesius praeclare

1 f. tempore, *(1)* et saepe viris aeqvissimis *(2)* nam alii pene mihi illud de Magistro jactare videntur, qvod poeta de Epicuro Qvi genus humanum ingenio superavit, *(3)* pars enim invidia caecati, aut instituto sectaqve praecipites aut rumoribus praeventi iniqve de tanto ingenio judicant; alii vero ipso contradicentium numero audaciores, ex homine faciunt nescio qvid mortali maius. Credunt in omni retro posteritate nihil lucis aut certitudinis fuisse; exigua nescio qvae ac minuta a veteribus fortuito reperta esse; a Cartesio prolatam cuncta detegendi artem clavesqve naturae. Systema eius divinum esse inventum, et prope demonstratum Aristotelem esse Sophistam, Scholasticos nugatores; Homines universos magna in caligine fuisse, donec natus sit aliqvis,

Qvi genus humanum ingenio superavit, et omnes
praestrinxit stellas exortus ut aethereus Sol.

Haec tanto cum ambitu factari, etsi vera essent omnia, nocet Veritati, nisi forte homines vi ac clamore sanari posse, atqve illud compelli intrare in philosophia locum habere putemus Ego ita sentio aeqvissimos etiam Viros cogi reprehendere in Cartesio qvae dissimularent libenter nisi immoderata qvorundam studia in Sectam abiissent. Secta autem omnis periculosa veritati. Qvod me attinet, satis laudatum arbitror in Mathematicis Cartesium, si post Archimedem et Galilaeum tertius nominetur Eqvidem illud fatendum arbitror neminem mortalium ad Archimedem propius accessisse Galilaeo Tantis autem viris aeqvari qvae *(4)* alios Cartesium non lauda *(5)* ex *L* 4 f. aliqva *(1)* ut Demonstrationes eius de Deo et Mente, et de ideis *(a)* ⟨divina⟩ qvaedam *(b)* ac Mente, egregia, et vera multa jam a Platone dicta sunt; *(2)* et *L* 9–11 Si ... possent *erg. L*

2–7 Ego ... evictum est: vgl. die kritischen Bemerkungen von Leibniz zu R. Descartes, *Principia philosophiae*, 1644, in VI, 3 N. 15. 12–514,15 Nunc ... relinquo: vgl. N. 41. 14 subsistit: vgl. Fr. Viète, *In artem analyticem isagoge*, 1591, S. 9 (*VO* S. 12). 16 poeta: Lukrez, *De rerum natura*, 3, 1043 f.; vgl. auch VII, 2 N. 67_3 S. 806.

vidit, aequationes duarum triumve incognitarum exhibere veterum Locos Lineares; et ad superficiem. Unde porro non difficile illi fuit judicare, tangentes inveniri posse per aequationes duarum radicum aequalium. Et huc redit quicquid a Cartesio detectum est in Geometria: nimirum data natura vel proprietate Lineae ex earum numero quae per rectarum relationes potentiasque determinantur, invenire ejus aequationem, descriptionem, tangentes; et dato problemate rectilineari, curvas quales dixi invenire, quarum intersectionibus problemati satisfiat. Fatendum est tamen in partem honoris venisse Fermatium, pulcherrima illa de Maximis et Minimis Methodo jam ante inventa, a Cartesiana prorsus diversa, qua et curvarum Tangentes exhibentur. At Methodus generalis problemata rectilinearia omnia per curvarum quales dixi intersectiones construendi, uni Cartesio quantum judicare possum in solidum debetur. Inventum sane pulcherrimum, quo ut ipse recte ait immensus speculandi campus aperitur.

Nollem tamen excidisse summo Viro, voces quasdam paulo jactantiores, quibus minus periti decipiuntur. Quis enim nisi harum rerum ignarus ferat, quod ait libro tertio: *per methodum qua utor id omne quod sub Geometricam contemplationem cadit, ad unum idemque genus problematum reducitur, quod est ut quaeratur valor radicum alicujus aequationis.* Quod tamen non nisi de problematis illis verum est, quae a me rectiliniaria vocantur, quae scilicet non nisi rectarum linearum magnitudines relationesque quaerunt aut supponunt: nam cum linearum curvarum, aut spatiorum ipsis conclusorum magnitudo quaeritur (: quod saepius fit, quam ille forte crediderat, quod animum ad Galileanam Mechanicen, non satis applicuisset :) neque aequationes neque curvae Cartesianae nos expedire possunt; opusque est novi plane generis aequationibus, constructionibus curvisque novis; denique et calculo novo, nondum a quoquam tradito, cujus si nihil aliud saltem specimina quaedam, mira satis, jam nunc dare possem. Sed quid Cartesium in errorem duxerit, judicatu facile est, versatior erat in Apollonio quam Archimede; et in Vieta quam Galilaeo; unde nondum illi occurrerat via ac

---

1 vidit: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 34 f. 2 tangentes: *a. a. O.*, S. 40–50 [Marg.]. 8 Methodo: Fermats Methode war Leibniz zugänglich durch die Darstellungen in P. Herigone, *Supplementum cursus mathematici*, 1642, S. 59–69, und in Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255, sowie durch die Diskussion in R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 300–338 (*DO* I S. 486 bis 493, *DO* II S. 1–13, 103–114, 154–158, 122–134, 169–178). 9 Methodus: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 85–95. 11 recte ait: Gemeint ist wohl Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 170: „infinitae speculationis campus aperitur“. 14 ait: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 96.

ratio perveniendi ad dimensiones curvilineorum: cumque nimia forte sui fiducia, eosdem methodi suae et cognitionis humanae limites esse putaret, oblitus solitae circumspectionis, relationem inter rectas curvasque negavit libro *Geometriae* secundo ab hominibus cognosci posse. Quae postea eventus refutavit. Haec ideo monui, ut intelligant homines, esse quasdam in Geometria inveniendi artes, quas in Cartesio frustra quaerant.

Hactenus secutus orationis filum, cum dixissem Algebram superiori seculo inprimis locupletatam, Geometriam nostro, inde paulatim ad Vietam et Cartesium delapsus sum, qui Algebram Geometriae praeclare junxere, nunc ad eos venio, qui ipsam per se Geometriam nostro seculo insignibus inventis auxere. Primus omnium Galilaeus vir certe maximus et uni Archimedi cessurus Archimedeas artes mihi videtur revocasse in lucem. Certe quae de centris gravitatis, de Motu projectorum, de solidorum resistentia dixit, non alio ex fonte fluxere. Amicus illi Cavalerius fuit, cujus et honorificam facit mentionem, et credibile est hortatu Galilaei excitatum Cavalerium Geometriam indivisibilium dedisse. Indivisibilium vox multos offendit, praesertim cum haesitaret ipse Cavalerius, et nescio quos metueret Gordios nodos. Et Guldinus e Societate Jesu, egregio Centrobarycorum opere celebris, in sermonis potius quam rei novitatem stylum strinxisset. Quod mihi satis manifesto est indicio neutrum satis interiora Archimedis intellexisse. Vidissent enim methodos utriusque ad unum idemque reduci, et quae Guldinus de via centri gravitatis pulcherrimo theoremate enuntiaverat, non nisi partem esse Methodi indivisibilium generalis. Cavalerius quoque indivisibilium suorum aequidistantiam velut rem omnino necessariam non semper exegisset. Equidem fatendum est primam Cavalerii Methodum satis adhuc rudem fuisse et limitatam; donec Torricellius[,] amoenissimi vir ingenii, elegantibus eam inventis auxit, in quibus solidum Hyperbolicum acutum infinitum ipsa rei novitate eminet. Quis enim unquam somniasset, solido cuidam infinitae longitudinis aliud finitum aequale exhiberi posse. Idem Torricellius Cycloeidis mensuram publicavit primus,

9 f. vir ... cessurus *erg. L*

3 negavit: *a. a. O.*, S. 39 [Marg.]. 11 dixit: vgl. G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, 1638, insbesondere S. 289–306, 236–288 u. 1–149 (*GO* I S. 187–208 u. *GO* VIII S. 39–318]: 12 facit: *a. a. O.*, S. 42 (*GO* VIII S. 86 f.). 14 dedisse: G. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635. 16 strinxisset: vgl. P. Guldin, *Centrobaryca*, Bd 2, 1640–1641, S. 3–9 u. 339–351. 19 enuntiaverat: *a. a. O.*, S. 147. 21 primam: G. Cavalieri, *a. a. O.*, lib. II. 23 auxit: E. Torricelli, *Opera geometrica*, 1644; zum solidum hyperbolicum acutum vgl. *a. a. O.*, Tl II, S. 93–135 (*TO* I, 1 S. 173–221). 25 publicavit: *a. a. O.*, Tl II, S. 85–92 (*TO* I, 1 S. 163–172).

quam et in Gallia diligentissimus Geometra Aegidius Robervallius spatii sibi vindicavit, de quo inter ipsos reciprocatae lites magis quam pro rei merito ac difficultate acres. Cum tamen, ut recte ait, amicus quidam meus, in his studiis praeclare versatus, cognita semel indivisibilium methodo, non sit difficilius Cycloeidis quam Trianguli aream metiri. Idem Robervallius spatii Cycloeidalis centrum gravitatis, rem ut tunc erant tempora, non ex facillimis, solidaque circa basin pariter atque axem primus exhibuit.

Haec dum inter Gallos Italosque agitantur, ecce de improviso novum in Belgio Geometriae sidus eluxit. Is erat P. Gregorius a S. Vincentio e Societate Jesu, edito de Quadratura Circuli opere celebris quo etsi propositum non sit consecutus, praeter innumera theoremata elegantia accessionibus novis atque ingentibus scientiae pomoeria protulit, ex quibus mea sententia eminent: doctrina ductuum, doctrina Ungularum, comparatio Parabolae et Spiralis, ac denique Relatio illa admirabilis inter spatia Hyperbolica et Logarithmos. Quodsi P. Gregorius calculum in potestate habuisset, et Mechanica Archimedis et Galilaei inventa pari diligentia fuisset prosecutus, poterat cum omnibus sui aevi mathematicis contendere de principatu. Caeterum inani quadraturae Circuli promisso, debitae laudis plurimum amisit, solita hominum malignitate, ut magis cogitent ubi defeceris, quam quid praestiteris. Intererat tamen Geometriae, admoneri homines ne autoritate tanti scriptoris deciperentur, quod modeste et citra autoris injuriam a doctissimis Viris factum est.

Jam deferbuerat haec contentio, cum ecce novi in Republica Geometrica motus per Galliam excitantur autore Blasio Pascalio, summi ingenii Viro, et quo ad Galilaei et Cartesii laudes nemo tunc propius accessit. Is tecto nomine Problemata quaedam circa centra solidorum Cycloeidis, et solventibus intra praestitutum tempus, praemia proposuit. Ob-

---

1 f. vindicavit ... lites: Leibniz kannte Darstellungen dieses Streits in Bl. Pascal, *Histoire de la roulette* u. *Historia trochoidis*, 1658, S. 8 (*PO* VIII S. 195–223), J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, praefatio, a3 v° (*WO* I S. 494 f.), Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 264, vielleicht auch C. Dati, *Lettera a Filaleti*, 1663. 3 amicus: Möglicherweise ist Tschirnhaus gemeint. Bereits Descartes hatte sich in einem Brief vom 17. u. 27. Mai 1638 an Mersenne ähnlich geäußert; vgl. R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 384 f. (*DO* II S. 135; Mersenne, *Correspondance* VII S. 225). 6 exhibuit: vgl. Bl. Pascal, *Histoire de la roulette* u. *Historia trochoidis*, 1658, S. 8 (*PO* VIII S. 197, 200 bzw. 212, 215); die Ergebnisse von Roberval sind gedruckt in *Divers ouvrages*, 1693, S. 246–278. 9 opere: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647. 11 eminent: vgl. *a. a. O.*, S. 703–864, S. 955–1037, S. 664 bis 702 u. S. 594–597. 18 a doctissimis Viris: Leibniz bezieht sich wohl vor allem auf Chr. Huygens, *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli*, 1651 (*HO* XI S. 281–337), insbesondere S. 314 bis 337 und V. Leotaud, *Examen circuli quadraturae*, 1654. 23 proposuit: Pascal formulierte seine Aufgabenstellung in zwei gedruckten Rundschreiben vom Juni u. Juli 1658 (*PO* VII S. 343–47 u. *PO* VIII S. 17–19).

tulere sese duo praestantissimi Geometrae, Wallisius Anglus, et P. Lalovera Gallus e Soc. Jesu. An in tempore venerint, alterius fori res est; satisfecisse autem, et suo marte unumquemque solvisse dubitari non potest. Pascalius tamen solutionem suam Dettonvillaei nomine publicavit prior, aliaque praeclara inventa in Epistolis subjecit. Factum est autem ut problemata Pascaliana, occasionem aliis longe praestantioribus darent. Nam Geometra eximius Christophorus Wren Anglus cum nescio quid circa Cycloeidem moliretur, ipsius Curvae Cycloeidis primariae dimensionem sane mirabilem detexit. Et Pascalius hoc intellecto longius progressus, secundariarum Curvas aequari Curvis Ellipseos pulcherrime ostendit.

Hic vero Wallisii mentio me admonet *Arithmeticae Infinitorum*, cujus pulcherrimum semper inventum judicavi. Equidem Robervallius mihi retulit, Fermatium parabolas altiores in infinitum dimensum esse primum, et facile crediderim de illis quarum ordinatae sunt rationales ad abscissas; nihil enim aliud ad harum dimensionem requiritur, quam ut summae numerorum quadratorum, cuborum aliarumque potestatum ineantur, quod poterat utique Fermatius. Sed irrationales infinitas, qualis ista esset cujus aequatio est $ax^2 \sqcap y^3$, multasque alias figuras, non aliter facile tractabiles, Wallisius conjectura quidem atque inductione, sed ea certe pulchra atque ingeniosa, mensurabiles deprehendit. Intelligo autem Doctissimum Virum Ismaëlem Bullialdum in eo esse, ut Arithmetica infinitorum demonstrata ac locupletata aliquando prodeat. Quodsi in omnibus illis interpolationibus conjecturalibus, generali demonstratione praestiterit, rem sane pulcherrimam fecerit.

Porro Pascalius sive Dettonvillaeus, cum unam ex literis suis Hugenio inscripsisset, in ea de superficiebus Conoeidum in circulum extensis velut Hugeniano invento, jam tum

6 Geometra eximius *erg. L* 23 in circulum extensis *erg. L*

---

3 solvisse: vgl. J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659 (*WO* I S. 489–569), sowie A. de Lalouvère, *Veterum geometria promota*, 1660. 4 publicavit ... subjecit: Bl. Pascal, *Traitté general de la roulette* (*PO* IX S. 116–133) u. allgemein ders., *Lettres de A. Dettonville*, 1658–1659 (*PO* VIII S. 325–384 u. IX S. 1–149 u. 187–201). 7 detexit: Die Rektifikation der Zykloide durch Chr. Wren ist gedruckt in J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 72–76 (*WO* I S. 535–537). 9 ostendit: Bl. Pascal, *Lettre de A. Dettonville a Monsieur Hugguens de Zulichem*, 1659 (*PO* IX S. 187–201). 12 primum: vgl. den Brief von Fermat an Mersenne von Februar/März 1642, tlw. gedr. in M. Mersenne, *Tractatus mechanicus*, 1644, praefatio, § IV, Bl. a1 v°–a2 r° (*FO* I S. 195–198; Mersenne, *Correspondance* XI S. 55–58). 17 deprehendit: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. XLIV–CVII, S. 35–84 (*WO* I S. 384 bis 412). 19 prodeat: I. Boulliau, *Opus novum ad arithmeticam infinitorum*, 1682.

mentionem injecit. Nimirum Hugenius nova ratione, eaque pulcherrima invenerat haec duo, superficiei Conoeidis parabolici reductionem ad Circulum, et dimensionem Curvae Parabolae ex data Hyperbolae quadratura. Idem postea deprehenderat Conoeidis Hyperbolici superficiem mensurari posse ex data Hyperbolae Quadratura, Sphaeroidis autem lati quidem ex circuli dimensione, compressi vero ex Hyperbolae Quadratura supposita. Horum ipse constructiones in novissimo de Horologiis Oscillatoriis opere dedit. Demonstrationem autem non difficilem scio, nam et mihi de meo comperta inventi origo, quam Hugenianae consentire ab ipso autore didici. Sed et superficierum quibus alia nonnulla generata a Parabolis et Hyperbolis solida circumdantur, nota dimensio est. Idem Hugenius primus quod sciam Cissoeidis pariter figurae atque omnium ejus partium dimensionem invenit, ex data Circuli quadratura, quam et Wallisius ex Hugenii Epistola retulit in Opere de Motu. Quemadmodum ipse Wallisius ex data Hyperbolae Quadratura Conchoeidis figurae quadraturam (ubi scilicet circulum generatorem exemeris) deprehendit. Denique nec Celeberrimi Viri Renati Francisci Slusii praetereundae videntur Margaritae, sive figurae a forma sic appellatae, quarum ille dimensionem invenit, ut patet ex subjectis *Mesolabo,* et quadam ad ipsum Epistola Dettonvillaei.

Eo jam loco res Geometrica erat, ut difficulter incrementum accipere posse videretur, cum ecce de improviso dimensio absoluta curvarum quarundam Analyticarum (res antea plerisque desperata) increbuit. Hanc publicavit ingeniosissimus Heuratius Batavus et

3–5 *Am Rand:* ☙

7 f. qvam ... didici *erg. L*

1 injecit: Bl. Pascal, *Lettre de A. Dettonville a Monsieur Hugguens de Zulichem*, 1659, S. 1 (*PO* IX S. 189). 1 invenerat: vgl. *HO* XIV S. 234–236. 3 deprehenderat: *a. a. O.* 6 dedit: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 72–79 [Marg.] (*HO* XVIII S. 211–221). 7 et mihi: vgl. VII, 4 N. 28 S. 509–515. 8 didici: vgl. Leibniz an Tschirnhaus, Ende Dezember 1679, III, 2 N. 372 S. 933. 11 retulit: J. Wallis, *Mechanica*, 1670–1671, S. 754–756 (*WO* I S. 906–908). 13 deprehendit: *a. a. O.*, S. 534–536 (*WO* I S. 910 f.) sowie J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 122 (*WO* I S. 550). 15 patet: vgl. R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 103–112 sowie Bl. Pascal, *Lettre de A. Dettonville a Monsieur de Sluze*, 1658, S. 1 (*PO* IX S. 137). 19 plerisque: vgl. z. B. Fr. Viète, *In artem analyticem isagoge*, 1591, S. 9 (*VO* S. 12) u. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39; im Handexemplar von Leibniz sind auf dieser Seite einige Wörter unterstrichen. 19 publicavit: Heuraet, H. v., *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520.

primo volumini *Geometriae* Cartesianae cum Schotenii *Commentariis* editae adjecit. Id vero Angliae Mathematici graviter tulere, et Guilielmo Neilio doctissimo juveni (qui non minus ac Heuratius immatura morte mox exstinctus est) inventi honorem vindicavere. Et resuscitata nuper controversia est, cum Hugenius in libro de Horologiis civi suo Heuratio jus quaesitum asseruisset, illustri Viro Guilielmo Brounckero, Societatis Regiae Praeside et Cl^{mo} Wallisio amicum vicissim tuentibus. *Non nostrum inter Vos*. Praesertim cum verisimile sit alterum alterius ignarum se solum ac primum inventorum putasse, quod eo facilius credo quod notus mihi juvenis est, quem suopte Marte ad easdem meditationes venisse scio.

Jam novam studiorum Periodum incipere licet, postquam Regiarum Academiarum sive Societatum institutio coepit. Ex eo Hugenius admirandam illam Cycloeidis proprietatem detexit, qua fit ut ipsa se ipsam describat evoluta, et ut pendula inter cycloeides agitata sint isochrona. At ingeniosissimus Jac. Gregorius Scotus libro de *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, elegantes quasdam et compendiosas appropinquandi rationes dedit, ope serierum convergentium quarum ipse primus naturam examinaverat, veram autem hanc Quadraturam inscripserat, quod alterius cujusdam exacte demonstratam a se putaret impossibilitatem, in quo Hugenium non sine ratione adversantem habuit. Non-

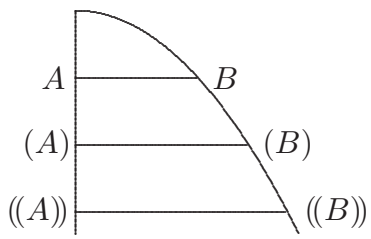
1 secundo *L ändert Hrsg.* 6–9 Praesertim ... scio *erg. L* 13 ingeniosissimus *erg. L* 17–510,1 Nondum ... impossibilitatis *erg. L*

---

3 vindicavere: Vgl. J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 90–98 (*WO* I S. 550–555) u. ders. *Mechanica*, 1670–1671, S. 555 (*WO* I S. 923). 5 asseruisset: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 71 f. (*HO* XVIII S. 209–211). 6 tuentibus: Der Prioritätsanspruch für W. Neile wurde bekräftigt durch die in den *Philosophical Transactions* VIII, Nr. 98 vom 17./27. November 1673, S. 6146–6150, abgedruckten Briefe von J. Wallis, W. Brouncker u. Chr. Wren. 6 *Non ... Vos*: Vergil, *Eclogae*, 3, 108. 8 juvenis: Falls Leibniz nicht sich selbst meint (s. o. S. 508 Z. 7), spielt er vielleicht auf E. W. v. Tschirnhaus an (vgl. VII, 5 N. 52 S. 375). 11 coepit: Die Royal Society (London) und die Académie des Sciences (Paris) wurden 1660 bzw. 1666 gegründet. 12 detexit: vgl. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, insbesondere S. 21–58. (*HO* XVIII S. 125–187); die Entdeckung erfolgte bereits Ende 1659 (vgl. *HO* XVII S. 97–100). 17 putaret: vgl. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, prop. XI, S. 25 bis 28; zu den Diskussionen um den Beweis vgl. die Rezensionen in den *Philosophical Transactions* III, 1668/69, Nr. 33 vom 16./26. März 1667/1668 S. 640–644 und im *Journal des Sçavans* vom 2. Juli 1668 S. 361–368, die Stellungnahme von Huygens, *a. a. O.* vom 12. November 1668 S. 437–444, von Gregory in den *Philosophical Transactions* III, 1668/69, Nr. 37 vom 13./23. Juli 1668 S. 732–735 und Nr. 44 vom 15./25. Februar 1668/1669 S. 882–886 sowie in den *Exercitationes Geometricae*, 1668, Praefatio u. S. 1–8 [Marg.].

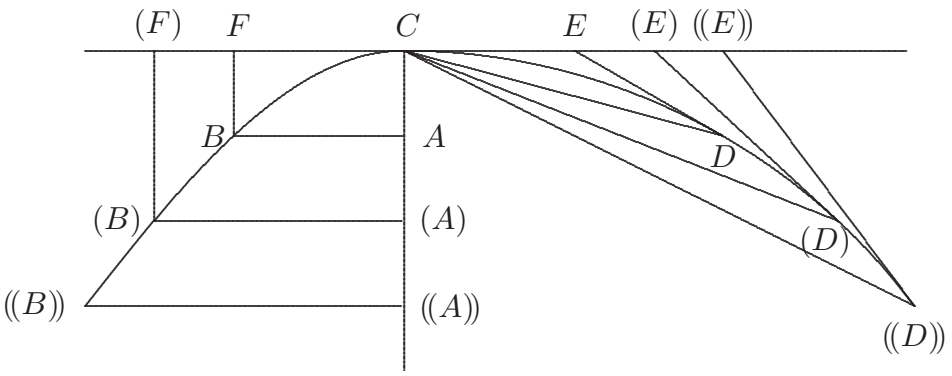
dum enim absoluta demonstratio est impossibilitatis. Vicecomes Brounckerus, Societatis Regiae Anglicanae Praeses primus quod sciam certae portionis Hyperbolae Quadraturam dedit Arithmeticam, per infinitam scilicet Seriem Numerorum rationalium. Novissime Nicolaus Mercator Germanus, Geometra egregius omnium in universum Hyperbolae partium Arithmeticam dedit Quadraturam perelegantem. Circuli autem et partium ejus Magnitudinem infinita numerorum rationalium serie exprimere non ita promtum erat; nam Hyperbola ordinatas in Asymptoton habet rationales, unde Mercatoris inventum fluxit, Circulus autem utcunque tractetur irrationales praebet ordinatas. Ego vero cum Theorema quoddam generalissimum reperissem, cujus ope quaelibet figura in aliam plane diversam sed dimensione aequipollentem converti potest, experiundum statui, an non Circulus aliquando in rationalem transmutari posset figuram, quod vero tandem pulchre successit, quemadmodum in sequente opusculo fusius exponam. Hoc interim loco summam rei paucis perstringere operae pretium erit.

Nimirum plerique qui Geometriam indivisibilium hactenus tractavere, figuras tantum in rectangula aut certe parallelogramma ordinatarum inter se parallelarum ope resolvere consuevere. Mihi semper Desarguesii et Pascalii mire placuit ratio, qui in Conicis, ut universaliter loqui possent, ordinatarum nomine non tantum parallelas comprehendunt, sed et rectas ad unum punctum fixum concurrentes, sive convergentes, praesertim cum parallelae, sub convergentium nomine, si punctum concursus infinite abesse dicatur, contineantur.



[*Fig. 2*]

3 dedit: W. Brouncker, *The squaring of the hyperbola*, in: *Philosophical Transactions* III, Nr. 34 vom 23. April/3. Mai 1668, S. 645–649. 5 dedit: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 28–33 [Marg.]. 9 reperissem: vgl. VII, 4 N. 27 Teil 3 u. N. 39_1. 12 successit: vgl. N. 1. 12 in sequente opusculo: N. 51. 17 f. comprehendunt: Leibniz bezieht sich wohl auf G. Desargues, *Brouillon project*, 1639, S. 1, u. Bl. Pascal, *Essay pour les coniques*, 1640, def. 1 (*PO* I S. 252); vgl. die Erl. zu N. 14 S. 144 Z. 3 f.



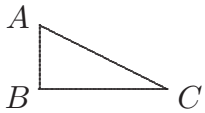
[*Fig. 3*]

Itaque cum alii parallelas tantum ordinatas tractassent, et figuras in parallelogramma $AB(B)(A), (A)(B)((B))((A))$ Cavaleriana methodo resolvissent, ego adhibitis convergentibus resolvo figuram datam in triangula $CD(D), C(D)((D))$, et mox aliam exhibeo cujus ordinatae $AB, (A)(B)$ etc. his ipsis triangulis sunt proportionales. Quod fiet si ipsae AB ipsis CE aequentur posito rectas DE esse tangentes curva datae. Ita enim, ut infra ostendam, efficietur ut spatium $B(B)(A)A$ sit duplum segmenti $C(D)DC$ et cuilibet figurae ut $C(D)DC$ alia aequivalens exhiberi potest. Jam posito curvam $D(D)((D))$ esse circularem, et CA diametri portionem tunc CA vel FB appellata x, et CF vel AB appellata y. et radio circuli, unitate, calculus ostendet $\dfrac{2y^2}{1+y^2}$ esse valorem ipsius x. Adeoque ordinata FB sive x, ex data CF abscissa, sive y, rationaliter haberi potest. Et has figuras, in quibus rationaliter haberi potest ordinata ex data abscissa, voco rationales. Circulo ergo figuram exhibuimus aequipollentem rationalem, quod ad Quadraturam ejus Arithmeticam sufficere mox patebit. Nam ex nota Geometris summa terminorum progressionis Geometricae infinitorum decrescentium, erit $y^2-y^4+y^6-y^8+y^{10}-y^{12}$ etc. in infinitum, idem quod $\dfrac{y^2}{1+y^2}$, seu idem quod $\dfrac{x}{2}$, modo intelligamus y esse quantitatem

7 spatium *(1)* CB(B) *(2)* CB(B)A *L ändert Hrsg.*

Unitate seu radio minorem. Jam cum infinitae $\frac{x}{2}$ in unam sint summam colligendae, ut quadratura dimidiae figurae $C(F)(B)BC$ et quae hinc pendet, circuli habeatur, ideoque et infinitae $y^2 - y^4 + y^6 - y^8$ etc. in unum erunt colligendae, id vero per Methodum indivisibilium atque infinitorum non difficulter fieri potest, posito enim ultimam y ubivis assumtam, ut $C(F)$, esse b, erit summa omnium y^2, idem quod $\frac{b^3}{3}$, et omnium y^4 summa erit $\frac{b^5}{5}$, et omnium y^6 erit $\frac{b^7}{7}$, et ita porro, et summa infinitorum $\frac{x}{2}$ seu infinitorum $y^2 - y^4 + y^6 - y^8$ etc. vel semiarea Spatii $C(F)(B)BC$ erit $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9} + \frac{b^{11}}{11} - \frac{b^{13}}{13}$ etc. Hinc jam ope Geometriae communis non difficulter deducetur Quadratum a Diametro esse ad Circulum ut est 1 ad $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. et generaliter loquendo Tangente posita b erit arcus ipse $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. Unde jam quivis sine tabulis, et perpetuis anguli bisectionibus radicumque extractionibus ad arcus magnitudinem accedere potest quantalibet exactitudine, modo b tangens sit paulo minor radio, ut si sumamus tangentem decima radii parte minorem jam satis exacte habebitur arcus. Ponamus enim tangentem esse 10^{mam} partem radii et quaeri arcus magnitudinem, erit illa

---

6 *Nebenbetrachtung:* 

$\frac{BC \frown BA}{2}$

10 *Nebenbetrachtung:* $\frac{\text{Tang } t}{\text{arc } \sqcap \omega} \sqcap \frac{b}{\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} \text{ etc.}}$. Ergo dato arcu erit $t \sqcap \frac{\omega \cdot b}{\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} \text{ etc.}}$ sed hinc nihil ob $t \sqcap b$. et $\omega \sqcap \frac{b}{1} - \frac{b^3}{3}$ etc. Utrinque termini rationis evanescunt et fit $\frac{1}{1} \sqcap \frac{1}{1}$.

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{3000}+\frac{1}{500,000}-\frac{1}{70,000,000}+\frac{1}{9,000,000,000}-\frac{1}{1100,000,000,000}\text{ etc. reductisque}$$

1–514,2 *Nebenrechnungen:*

1	~~2~~ ~~1~~	~~6~~~~6~~~~4~~
3	~~51975~~ ⨍ 17325	~~51975~~ ⨍ 5775
15	~~33333~~	~~9999~~
5		
75	~~42~~	
7	~~51975~~ ⨍ 10395 ⊙	51975 ⨍ 4725 ⊙
525	~~55555~~	11
9		
4725	~~213~~ ⨍ 7427 •	
11	~~51975~~	
4725	~~7775~~	
4725		
51975 ⊙		

$$e \sqcap \frac{1}{b}.$$

$$\begin{array}{rl}
 & 1,3,5,7,9,11,e^{10} \\
- & 1,5,7,9,11,e^{8} \\
+ & 1,3,7,9,11,e^{6} \\
- & 1,3,5,9,11,e^{4} \\
+ & 1,3,5,7,11,e^{2} \\
- & 1,3,5,7,9,e^{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
519750000000000 \\
10395000000 \\
\underline{577500} \\
+\ \underline{519760395577500} \\
1732500000000 \\
74270000 \\
\underline{4725} \\
-\ \underline{1732574274725} \\
+\ \underline{518027821302775} \\
519760395577500
\end{array}$$

1–514,2 reductisque ... $\frac{518027821302775}{5197500,000,000,000}$: In den Nebenrechnungen unterlaufen Leibniz kleinere Versehen, die zu einer zusätzlichen Erweiterung des Bruches um den Faktor 5 führen und durch die fehlerhafte Division $51975 : 7 = 7427$ (statt 7425) den Zähler des Bruches beeinträchtigen (richtig wäre 518007030167775).

omnibus ad communem divisorem, additisque in unum[,] numeris, neque enim ultra progredi operae pretium est, erit arcus paulo major quam $\frac{518027821302775}{5197500,000,000,000}$, ac defectus hujus valoris a vero erit minor quam $\frac{1}{1000,000,000,000}$ ma pars Radii. Nam si novissime non subtraxissemus $\frac{1}{1100,000,000,000}$, fuisset valor major vero, nunc ubi subtraximus est minor vero, error ergo minor quam $\frac{1}{1100,000,000,000}$, adeoque multo magis minor quam $\frac{1}{1,000,000,000,000}$. Vides quam facili calculo solis additionibus, subtractionibus et multiplicationibus ad quantam exactitudinem sit perventum, quam nec tabulae assequantur. Quodsi aliter tangentis ad radium data sit ratio, poterit arcus inveniri similiter, quod inprimis commode fiet, cum ea in partibus decimalibus erit expressa. Cumque jam Circumferentiae ad radium ratio in numeris quantalibet exactitudine data sit, hinc arcus dati ratio ad circumferentiam, adeoque et quantitas anguli ex data tangente quantalibet exactitudine apparebit. Unde jam Tabulae nullo negotio corrigentur, supplebuntur, et si opus, augebuntur. Et qui regulam hanc satis facilem memoria tenebit, poterit etiam sine tabulis, nullo negotio ad quantamlibet exactitudinem pervenire. Quanta autem haec sit Geometriae accessio, intelligentibus aestimandum relinquo.

49_2. GEOMETRIAE UTILITAS MEDICINA MENTIS
[24. August – September 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 3–4. 1 Bog. 2°. 1 $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 3. — Gedr.: VI, 3 N. 54_2 S. 450–453.
Cc 2, Nr. 1224 C

Datierungsgründe: s. N. 39.

Quoniam vero illi quos introduxi accipient confessionem meam, atque inde concludent rectius igitur illis operam dari, in quibus magna sit materies inveniendi sine diffi-

22 f. concludent *(1)* utilior malle se igitur *(2)* rectius *L*

cultate: praesertim cum utilissimam omnium Medicinam parum a Geometria, ut nunc sunt res humanae, juvari posse constet ideo duo admonenda sunt, unum non esse tantam Geometriae etiam subtilissimae difficultatem quanta fortasse videri possit, alterum Medicinam animae longe quam corporis praestantiorem esse, eam vero Geometria plus quam dici possit juvari. Et primum de Geometriae facilitate propiorem me ipso testem non habeo: equidem sine vanitate credo dicere possum me nonnihil in geometria consecutum, et tamen vix quadriennium est, quod ei serio operam dare coepi; addo quadriennium istud non huic uni studio fuisse destinatum, nec me ejus poenitere, etsi in Geometria obtinuissem nihil; et quod plus est, magnam partem eorum quae nunc primum in publicum hortantibus amicis protrudo, primi anni mei, iisdem amicis testibus, fructum fuisse. Jam enim triennium et ultra est, quod illis propositiones de circuli et arcuum ejus magnitudine communicavi. Quae utcunque sic satis abdita, si mihi unius anni spatio consequi licuit, nullo magistro[,] quid illum paucis mensibus praestare posse putandum est, qui amicum nactus sit, monstratorem fidelem. Itaque nihil Geometria a susceptis negotiis aut naturae indagatione abducet; et qui annum ei dederit, sentiet quantum sibi lumen sit obortum ad recte judicandum. Inde tuto perget ad naturam machinis animandam, nec amplius velut in tenebris incerto exitu inter varia tentamenta palpitabit, et arcanas naturae vias facilius divinabit, quas tum demum liquido nosse dabitur, cum ad puram Geometriam reducentur. Ego quidem ita arbitror effici jam nunc ab hominibus posse, si sua bona nossent[,] ut magna pars problematum mechanicorum et physicorum analysi non minus certa ac determinata solvatur, quam quae in numeris aut lineis proponuntur, saltem ut appareat quid ex notis datisque fieri cum ratione possit, quae ideo adjicio, ut nec medicinam ipsam aliasque scientias conjecturales excludam ubi quidam velut aleae calculus et aestimatio probabilitatis versatur. Sed in eam rem novo characteristicae genere opus est, et non exigui laboris praeparamentis: quae unus homo aegre aggrediatur; pluribus autem adhuc aegrius persuadeat, nisi felici quadam siderum conjunctione eveniat, ut iidem possint qui velint. Equidem inter omnia quae ut nunc sunt res, a privatis in perpetuum generis humani bonum suscipi possint, hoc potissimum arbitror. Quam multa enim optamus quae

7 qvod *(1)* ei serio *(2)* eam disco *nicht gestr.* *(3)* ei *L* 19 si ... nossent *erg.* *L* 21–24 saltem ... versatur *erg.* *L*

7 coepi: vgl. N. 39 S. 430 Z. 9 u. S. 431 Z. 14. 12 communicavi: vgl. N. 39 S. 432 Z. 10 f. und die zugehörige Erläuterung.

habemus, et quam saepe ignoramus quae scire in potestate est. Sed inter vota inertia elabitur vita; et plerique vix unquam serio cogitamus de summa rerum; cumque quotidie ante oculos versentur praecipitatae ignorantia aut errore familiarium vitae, vix per aliquot momenta excitati dum recens memoria est, mox relabimur in soporem, nec unquam bona fide de salute nostra, deque vita ac sanitate ratiocinamur. Quae mihi cogitanti saepe mortalium stuporem mirari subiit, ubivis potius quam ubi opus est ingeniosorum: an enim post tot nostri seculi inventa rarius morimur, aut a morbis tutiores sumus? Nihil lucis a tot ductibus novis; incerti adhuc partium usus, et hepar nuper tumulatum jam sunt qui resuscitent: quae omnia non medicorum sed hominum in universum vitio contingunt. Frustra providentiam incusamus, et coelestia consilia nostris contraria, et jam praeludentibus poëtis Aesculapium fulmine ictum, quod mortuum nescio quem ab inferis revocasset: equidem inania immortalitatis promissa sunt (quis nescit); sed saepe felices, et longaevi et morborum expertes essemus, si hominibus aliquando in mentem veniret sapere; si ratiocinarentur serio, si divinis beneficiis uterentur. Sed in eam rem non sufficit unus utcunque ingeniosus; et utcunque multi, et quantiscunque ingenii aut fortunae praesidiis instructi, non longe ibunt, nec ipsi suis laboribus fruentur, quamdiu sparsa ac fortuita colligent experimenta; et quamdiu non constabit, quid jam habeant, et quomodo ubi opus erit, uti possint opibus suis. Saepe enim, ut dixi, quae longe quaerimus in propinquo haberi ignoramus mercatori male consulto similes, qui ingentibus negotiis sine rationum libello, ubi omnia in conspectu sint, misceretur. Huic malo remedium non ante in humana potestate erit, quam ubi ars illa analyseos universalis constituta habebitur, qua dato quodam problemate certo definiri possit, quidnam circa ipsum ex datis notisque praestari queat. Ea autem quam dixi Characteristicam necessario postulat, quoniam cum ratiociniis longe productis opus est, humanum ingenium in medio itinere deficit,

3 vitae, *(1)* vix unqvam *(2)* ne ratiocinamur qvidem de re in humanis pretiosissima *(3)* vix *L* 8 hepar *(1)* nunc extinctum *(2)* nuper *L* 15 ingenii aut fortunae *erg. L* 17 experimenta; *(1)* nec | ipsis constabit *nicht gestr.* | *(2)* et *L* 18–20 saepe ... misceretur *erg. L*

9 qui resuscitent: Gemeint sind vermutlich L. de Bils und seine Anhänger, die gegen die modernen Anatomen wieder die antike Ansicht vertraten, dass die Leber das Organ der Blutbildung sei; in manchen Titeln von Streitschriften dieser Kontroverse finden sich Wendungen wie „hepar defunctum“, „hepatis exsequiae“, „resurrectio hepatis“, „hepar redivivum“ etc. Vgl. auch Leibniz' Notizen zu J. Swammerdam, *Miraculum naturae*, 1672, S. 29, in VIII, 1 N. 1 S. 12.

nisi characteribus aptis, ac notis sensibilibus quae velut manu tangi possint regatur. Sed hi characteres alterius sunt naturae, quam quis forte suspicetur, eos autem hoc quidem loco inepte, hoc autem tempore inutiliter explicarem, cum nullam successus promti spem videam, nisi plures communibus consiliis utantur, aut pauci majoribus auxiliis subleventur. Ista igitur in gratiam eorum dicta sunto, qui Geometriae, et analyseos cujusdam profundioris usum ad res humanas sublevendas minorem arbitrati sunt; quod non putarent, si omnes ratiocinationes severas in longum protractas, sive in Geometria sive in alio argumento quocunque similibus plane artibus regi animadvertissent.

Sed quandiu spes exigua est obtineri aliquid ab humana somnolentia posse, et parum vitae ac sanitati nostrae a ratiocinatione praesidii est; fatendum Geometriam medicinae corporis non multum adjumenti allaturam posse, et saepe empiricum miracula editurum, dum haerebunt etiam exactissimi ratiocinatores. Quare superest ut de ultima et meo judicio potissima Geometriae utilitate pauca dicam, quae consistit in medicina mentis, quod tamen illi fateor demum intelligent, qui cum ea philosophiam primam et cognitionem passionum animi conjungent. Equidem si Geometrae descriptis terrarum spatiis, et siderum motibus, et tractibus maris, et sensibus brachiisque hominum per tubos et machinas animatis; profuere aliis, aequum est, ut nec desint sibi ipsis: si caetera communicare possunt, hoc unum non possunt non servare sibi, quo sit aliquod ipsis pretium operae etiamsi nemo gratiam haberet. Nemo dubitare potest potissimum uniuscujusque esse mentem ejus, qui vero ista profundius contemplantur, sive veteres, sive recentiores etiam illud ajunt, quod nos ipsos esse dicimus id mentem esse. Perfectio vero nostra potissima eadem est cum perfectione mentis, praesertim cum Mens perpetua sit, corpus visibile dissolvatur. Perfectio autem mentis haud dubie in duobus consistit, cultu ingenii et gubernatione voluntatis, quanquam ex priore posterior sponte sequatur, nam dum quis veritatem liquido agnoscit, non magis peccabit, quam homo sanae mentis sponte in praeceps desiliet. Cultus autem ingenii consistit in aucta cogitandi id est judicandi inveniendique facultate, in quantum a casu ac fortuna non pendet, hanc autem facultatem pulcherrimis utique speciminibus exornat Geometria. Geometria una omnium formas illas

15 Geometrae *(1)* aliis prosunt |armatis sensibus *erg.*|, *(2)* descriptis *L* 16 maris, et *(1)* machinarum viribus; *(2)* armatis sensib *(3)* sensibus *L*

10–13 medicinae corporis ... medicina mentis: vgl. VI, 3 N. 33_4 S. 384. 18–518,5 sit ... rationem: vgl. N. 49_1 S. 494 Z. 6–23.

medias et in caduca licet materia aeternas ac per se subsistentes contemplatur; quarum ideae menti nostrae velut insitae perire non possunt, etsi omnis notitia eorum quae facti sunt, et sensibus apprehensa, historiarum inquam et experimentorum periret aut obscuraretur. Potest enim in eum mens nostra venire statum, ut experimenta non sumat, aut
5 eorum quae in hac vita sumsit nullam habeat rationem.

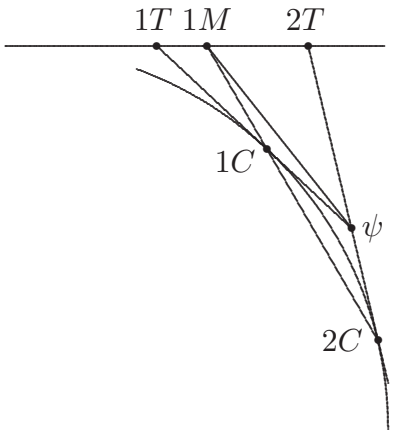
5 nullam | habeat rationem *erg. Hrsg. nach S. 494 Z. 21* | *L*

50. AD PROP. 6. DEMONSTRATIONEM

[August – September 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 13 Bl. 3–4. 1 Bog. 2°. 4 Z. auf Bl. 4 v°. Auf dem Rest des Bogens zweite Hälfte von N. 49_1.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: N. 50 ist nach dem Schluss von N. 49_1 geschrieben worden.



[*Fig. 1, Blindzeichnung*]

Ajo punctum $1M$ cadere intra puncta $1T$. $2T$. Tangentes $1T1C, 2T2C$ se secent in ψ, punctum ψ est extra curvam, pariter et punctum $1M$. Ergo et recta $\psi 1M$.

8 Ajo ... $2T$: vgl. N. 51 S. 529 Z. 28.

51. DE QUADRATURA ARITHMETICA CIRCULI ELLIPSEOS ET HYPERBOLAE

[Juni – September 1676]

Überlieferung: *L* überarbeitete Reinschrift: LH 35 II 1 Bl. 7–38, 115. 15 Bog. 2° u. 3 Bl. 2°. Ca 61 1/2 S. Bl. 32 ist in den Bogen Bl. 31+33 eingelegt. Es bildete ursprünglich mit LH 35 II 1 Bl. 115 einen vollständigen Bogen. Bl. 32 r° enthält in der oberen Hälfte die drei Korollare zu prop. XLVIII (S. 656 Z. 1 – S. 657 Z. 12), in der unteren Hälfte Überlegungen zur Kreisreihe aus Hannoverscher Zeit (Druck in einem späteren Band der Reihe). Auf Bl. 115 befinden sich eine Überarbeitung von Teilen von prop. XLVIII (= S. 648 Z. 6 – S. 651 Z. 8) und N. 37. Bl. 38 r° enthält die Figuren 1, 2, 4, 6–16. Bl. 32 v°, 37 v°, 38 v° leer. — Gedr.: 1. Scholtz, *Grundlegung*, 1934, S. 41–72 (tlw. = S. 521 Z. 1 – S. 538 Z. 14, S. 539 Z. 23 bis S. 544 Z. 13, S. 546 Z. 7 – S. 548 Z. 7, S. 578 Z. 8 – S. 584 Z. 7, S. 585 Z. 20 – S. 586 Z. 18, S. 600 Z. 1–21 u. S. 657 Z. 12 – S. 658 Z. 19; außerdem Fig. 1–3, 8; auf S. 16 dt. Übers. des Index notabiliorum). 2. *LQK*, 1993 (ohne Fig. 15a S. 643 u. S. 648 Z. 6 – S. 651 Z. 8). 3. (nach 2. mit franz. Übers. ohne Textvarianten) *Quadrature arithmétique*, 2004.
Cc 2, Nr. 1233 E, F, 1241 tlw.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers (ausgenommen Bl. 32, 38 u. 115) ist für Juli 1676 belegt. N. 51 ist nach N. 20 u. N. 28 geschrieben worden. Leibniz übernimmt bis einschließlich prop. XIV zunächst im Wesentlichen die überarbeitete Stufe des Textes von N. 20. Bei prop. XV schreibt er zuerst die Anfangszeilen der ersten Fassung aus N. 20 ab, streicht dann und fährt schließlich mit der überarbeiteten (3.) Fassung fort. Ab dem Scholium zu prop. XVIII folgen umfangreichere Überarbeitungen im Text von N. 51. In N. 35, das zwischen Juli und 24. August 1676 entstanden ist, wird auf die prop. XXV u. XXIX verwiesen, die demnach, anders als in N. 28, bereits nummeriert vorlagen. Im nachträglich ergänzten Scholium zu prop. XXIX spielt Leibniz auf Newtons Wurzelreihen an, von denen er am 24. August 1676 Kenntnis erhielt. Prop. XLIII ist nach Teil 3 von N. 31 entstanden. Im Scholium zu prop. XLVI erwähnt Leibniz seine Lösung des Debeauneschen Problems vom Juli 1676 (VII, 5 N. 90 u. 91). Die erste Fassung von prop. XLVIII ist nach N. 35 verfasst worden. Die zweite Fassung der Artikel (1) bis (4) und (8) von prop. XLVIII dürfte bis zum 24. August 1676 geschrieben sein (s. N. 37). In prop. L übernimmt Leibniz Ergebnisse aus N. 27, dat. 29. Juni 1676, aus N. 33, aus N. 42 u. N. 43, die beide in der Zeit von 1.–27. August 1676 entstanden sind, sowie aus N. 48. Die Formulierung der Aussage von prop. LI („Impossibile est meliorem invenire Quadraturam Circuli“) weicht von der Parallelstelle in N. 28 („Impossibile est, Quadraturam Circuli . . . invenire . . . quae . . . perfectioris sit generis“) ab; möglicherweise reagiert Leibniz damit auf die Charakterisierung von Gregorys Approximation in Oldenburgs Brief, den er am 24. August 1676 erhielt: „Non credimus, meliorem circuli quadraturam linearem quam haec est unquam datum iri“ (III, 1 N. 88_4 S. 520). Zwei Abschnitte in den Scholien zu prop. XI u. XXV, die sich inhaltlich mit Passagen in N. 49_1 überschneiden, sind in N. 51 gestrichen (vgl. die Varianten zu S. 548 Z. 1 f. u. S. 588 Z. 22 – S. 590 Z. 1).

De quadratura arithmetica
circuli ellipseos et hyperbolae
cujus Corollarium est
trigonometria sine tabulis
Autore
G. G. L. L.

6 *Am Rand:* Index notabiliorum:

Prop. 1. est lemma, cujus ope triangula ex puncto fixo A incipientia transmutantur in rectangula MNF rectae AMN per punctum fixum ⟨—⟩ transeunti normaliter applicata. fig. 1. 2.

Prop. 2. 3. 4. 5. sunt lemmata valde generalia circa differentiam quatenus ab excessu et defectu animo abstrahitur, et serviunt ad demonstrationes quadraturarum apagogicas per sola inscripta.

Prop. 6. est spinosissima in qua morose demonstratur certa quaedam spatia rectilinea gradiformia itemque polygona eousque continuari posse, ut inter se vel a curvis differant quantitate minore quav⟨is⟩ data, quod ab aliis plerumque assumi solet. Praeteriri initio ejus lectio potest, servit tamen ad fundamenta totius Methodi indivisibilium firmissime jacienda.

Prop. 7. fructum continet omnium praecedentium, et ostendit, quomo⟨do⟩ figurae curvilineae possint resolvi in trian⟨gula⟩ et quomodo si his triangulis aequal⟨ia⟩ exhibeantur rectangula, sector al⟨terius⟩ figurae in quadrilineum alterius fig⟨urae⟩ transformari possit.

8 f. ope *(1)* plura rect *(2)* triangula ex | eodem *gestr.* | puncto | fixo A. *erg.* | incipientia transmutantur in *(a)* totidem pun *(b)* rectangula | MNF *erg.* | rectae | AMN *erg.* | per *L* 21 in | trilineum *ändert Hrsg.* | alterius *L*

4 trigonometria sine tabulis: s. u. prop. L S. 658 – S. 674.

P r o p o s i t i o p r i m a

„Si per trianguli ABC tres angulos totidem transeant rectae parallelae interminatae „AD. BE. CF, triangulum erit dimidium rectanguli, sub CE intervallo duarum par- „allelarum BE. CF, et sub AG portione tertiae AD, intercepta inter puncta, quibus „ea angulo trianguli A, et opposito lateri BC, si opus est producto occurrit.

In BC productam agatur normalis AH[,] erunt triangula AHG. CEB similia[,] ergo ut AH ad AG ita CE ad CB, ac proinde rectangul⟨um⟩ AG in CE aequale rectangulo AH in CB seu duplo Triangulo ABC. Itaque Triangulum ABC rectanguli sub AG et CE dimidium erit. Quod asserebatur.

2 trianguli *(1)* tres angulos totidem transeant rectae parallelae interminatae, triangulum erit dimidium rectanguli, sub intervallo duarum parallelarum et portione tertiae, intercepta inter puncta, qvibus angulo trianguli, et opposito lateri, si opus est producto occurrit.
Sit triangulum ABC f i g. 1. e t 2. per cuius tres angulos transeant rectae parallelae interminatae, sive qvantum satis est productae, AD, BE, CF Duarum ex his (pro arbitrio assumtarum) BE, CF intervallum (seu distantia minima) (a) est (b) sit CE, tertia ipsis parallela AD, qvae occurrit triangulo in angulo A: latus huic angulo oppositum est CB, qvod productum, si opus est, occurrit ipsi AD (etiam productae qvantum opus,) in puncto G. Occurrit, inqvam, qvod sic probo: Si AD ipsi BC, producta productae, non occurrit, erunt parallelae: ipsi autem AD, parallelae sunt EB, FC, ergo et hae ipsi BC parallelae erunt; ergo eam non secabunt in punctis B, vel C. contra hypothesin. O c c u r r u n t e r g o s i b i A D e t B C i n p u n c t o G
His positis, a j o t r i a n g u l u m A B C r e c t a n g u l i s u b A G e t C E, |siue rectanguli MNF (posita MN aequ. CE, et et NF aequ. AG) *erg.*| d i m i d i u m e s s e. Ex puncto A ad rectam BC productam si opus est ducatur perpendicularis AH: manifestum est t r i a n g u l u m A B C r e c t a n g u l i s u b A H altitudine e t B C basi d i m i d i u m esse, qvare et rectanguli sub AG et CE dimidium erit, si ostendamus rectangulo sub AH et BC aeqvari rectangulum sub AG et CE. Id vero ita constabit: tres parallelae, AD, BE, CF ad ipsam BC angulum faciunt vel rectum vel obliqvum. Si rectum, erit angulus CBE, item AGH, rectus; et c o i n c i d e t punctum B cum puncto E, ac punctum H cum puncto G, ergo et r e c t a n g u l u m s u b A G e t C E, r e c t a n g u l o s u b A H e t C B Sin angulus qvem parallelae faciunt ad ipsam BC, sit obliqvus, habebimus duo triangula rectangula, AHG et CEB, ergo anguli in ipsis, praeter rectum, ut AGH, CBE, acuti sunt. Porro hi duo anguli efficiuntur ab eadem recta, (latere scilicet BC producto si opus,) ad duas parallelas AG, EB; duo autem anguli acuti ab eadem recta ad duas parallelas facti, aeqvales sunt. Ergo anguli *(aa)* AGH *(bb)* HGA, EBC aeqvales sunt. Ergo triangula rectangula AHG, CEB sunt similia; eritqve CE ad AH, ut CB ad AG, id est r e c t a n g u l u m C E i n A G r e c t a n g u l o A H i n C B a e q v a l e erit. Rectanguli autem AH in CB, dimidium est triangulum ABC, ut *(aaa)* patet *(bbb)* diximus, et patet, ergo t r i a n g u l u m A B C etiam rectanguli CE in AG |siue rectanguli MNF *erg.*| dimidium erit. Qvod asserebatur. *(2)* ABC *L* 2 totidem |in eodem plano *erg. u. gestr.*| transeant *L* 4 tertiae |si opus productae *erg. u. gestr.*| AD *L* 7 proinde *(1)* AG in EC aeqval *(2)* rectangul⟨um⟩ *L*

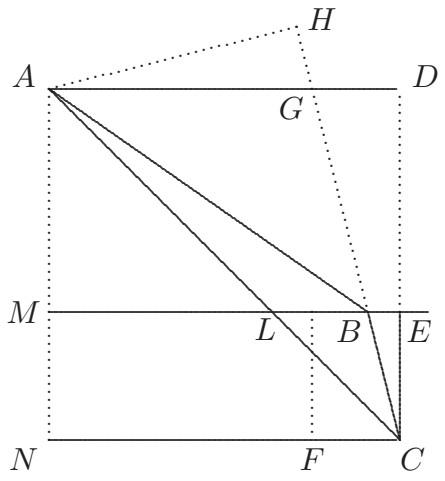


fig. 1.

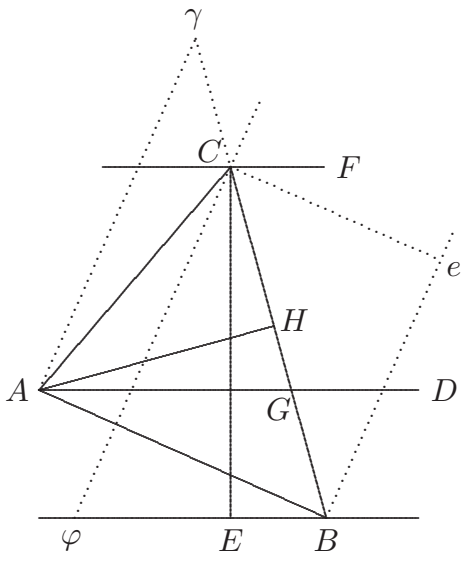


fig. 2.

Scholium

Cum infinitis modis in eodem triangulo et parallelae duci, et intervalla eligi possint, patet omnia rectangula hujusmodi, (cum uni eidemque triangulo duplo aequentur) etiam fore aequalia inter se; ut rectangula CD in LB, CE in AG, Ce in $A\gamma$; si idem in fig. 1. et 2. ponatur esse triangulum ABC.

Porro propositio, quam hic demonstravimus, Lemma est, facile utique, et in proclivi positum, sed quod usus tamen habet late patentes: quoniam enim rectanguli et trianguli naturas in unum conjungit, utique foecundius esse debet, quam si non nisi alterutram contineret. Ejus enim auxilio, figurae curvilineae etiam in triangula utiliter resolvuntur, cum Cavalerius aliique doctissimi Viri eas in parallelogramma tantum partiri soleant, generalem certe in triangula resolutionem, quod sciam, non adhibuerint. Sed haec clarius ex prop. 7. patebunt.

1 fig. 1: Leibniz hat in fig. 1 die gepunkteten Lote über F und N einschließlich der Punktbezeichnungen M u. N nachträglich getilgt. Dies wurde rückgängig gemacht, da sich Leibniz im Index notabiliorum auf diese Bestandteile der Figur bezieht. 11 Cavalerius: vgl. B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635, S. 1 f. u. 9–12.

Propositio II.

„Series differentiarum inter quantitates ordine pertubato dispositas, major est serie „differentiarum inter quantitates easdem ordine naturali aut minus pertubato collo- „catas.

Ordinem naturalem voco, cum proceditur a minori ad majus tantum, vel a majori ad minus tantum: perturbatum cum modo ascenditur a minori ad majus, modo descenditur a majori ad minus.

Sint ordine naturali dispositae

Quantitates	A	$A+B$	$A+B+C$
Differentiae	B	C	

Summa differentiarum, seu tota differentiarum series est, $B+C$. Sint rursus ordine perturbato dispositae

Quantitates	$A+B$	A	$A+B+C$
Differentiae	B	$B+C$	

Summa seu series harum differentiarum, $2B+C$ major utique quam $B+C$ series prior. Idemque in serie longiore saepius perturbata, saepius fiet. Ergo generaliter summa differentiarum in ordine perturbato major quam in naturali, aut minus, sive rarius, perturbato. Quod asserebatur.

1 | Idem ad alia qvoqve theoremata Geometrica condenda, aut problemata non vulgaria resolvenda utile comperi, qvale hoc est: invenire summam compositam ex areis omnium triangulorum super eadem basi constitutorum, verticesqve habentium in punctis, qvibus circuli concentrici qvotcunqve, rectas interminatas | qvotcunqve *erg.* | in eodem circulorum centro concurrentes secant. Qvorum sexcentis facillime rectangulum aeqvale exhibebimus. Ut si invenienda sit summa triangulorum (fig. 3) 1BC, 2BC, 3BC, 4BC etc. usqve ad 16BC. qvod ope lemmatis nostri nullo negotio invenietur. Idem est, si eadem semper servata basi, vertices sint in intersectionibus parallelarum qvotcunqve, occurrentium parallelis qvotcunqve et summa qvaeratur triangulorum (fig. 4) 1BC, 2BC, 3BC etc. usqve ad 9BC Qvae velut ab hoc loco aliena, ut verbis parcam, explicare, tunc supersedeo. *gestr.* | Propositio *L* 3–5 collocatas *(1)* Sint qvantitates ordine *(2)* Ordinem *L*

3 aut minus pertubato: Dieser Teil der Behauptung ist i. Allg. nicht richtig. Davon abgesehen gelten die prop. II–V (vgl. die Erl. zu N. 14 S. 134 Z. 1). 20 hoc: vgl. in N. 20 die gestrichene Lesart zu S. 182 Z. 3 – S. 184 Z. 1.

Propositio III

„In serie quotcunque quantitatum, differentia extremarum non potest esse major „quam summa differentiarum intermediarum sive continuarum.

Sint Quantitates	A	B	C	D	E	A	E
Differentiae	f	g	h	l		m	

Differentiae scilicet continuae inter A et B, B et C, C et D, etc. sint f. g. h. etc. At Differentia extremarum A et E, sit m. Ajo m non esse majorem quam $f+g+h+l$.

(1) Nam termini, sive quantitates A. B. C. D. E. vel ordine naturali collocantur, vel perturbato. Si naturali, tunc constat m esse aequalem summae $f+g+h+l$.

Nam si alterutra extremarum, ut A, posita sit minima, altera, ut E, maxima, tunc erit

series		A	B	C	D	E
eadem	isti	A	$A+f$	$A+f+g$	$A+f+g+h$	$A+f+g+h+l$

et differentia inter A et E, nempe m, erit $f+g+h+l$. Eodem modo licet ratiocinari si E sit major quam A, et D major quam C, etc. tantum enim seriem invertere, sive literas capitales mutare opus est. Utroque ergo casu in ordine naturali, m, differentia inter A et E terminos maximum et minimum idem valebit quod $f+g+h+l$, summa differentiarum intermediarum sive continuarum; non est ergo m major quam haec summa.

(2) At si ordo quantitatum A. B. C. D. E. sit perturbatus, tunc major est series differentiarum, $f+g+h+l$, quam si esset naturalis, per prop. 2. major ergo quam differentia termini maximi et minimi, quia ut ostendimus artic. 1. hujus prop. ea differentia aequatur seriei differentiarum ordinis naturalis.

(3) Quoniam autem in casu situs perturbati summa differentiarum intermediarum, $f+g+h+l$. major est quam differentia terminorum duorum, qui inter hos A. B. C. D. E. maximi et minimi sunt, per artic. 2. erit et major quam differentia duorum aliorum, (quippe minus differentium, quam maximus et minimus), ergo generaliter erit major quam differentia duorum quorumcunque hujus seriei terminorum, ergo et major quam differentia inter A et E, seu major quam m. Ergo m minor erit quam $f+g+h+l$. Cum ergo in casu ordinis naturalis m sit huic summae aequalis per artic. 1. in casu ordinis perturbati minor, ut hic ostendimus, neutro casu major erit. Quod ostendendum sumseramus.

Scholium

Hae duae propositiones, 2. et 3. generalius conceptae sunt, quam necesse erat ad institutum nostrum, neque enim ad propositiones sequentes opus habebam nisi casu trium quantitatum: A. B. C. Malui tamen generaliter potius enuntiare et demonstrare; praesertim cum usque adeo universales sint, ut nullam omnino quantitatum varietatem morentur.

Propositio IV

„Differentia duarum quantitatum non potest esse major quam summa differentiarum „tertiae a singulis.

Nempe sint duae quantitates A. E. quarum differentia f: Sit alia C, et differentia inter A et C sit b. inter E et C sit d. ajo f non posse excedere $b+d$. Reducantur in unam seriem:

Quantitates	A	C	E	A	E
Differentiae	b	d		f	

Ergo per prop. praeced. ipsa f differentia extremarum, non potest esse major quam summa differentiarum intermediarum seu continuarum, sive quam $b+d$. Quod ostendendum erat.

Propositio V

„Differentia duarum quantitatum minor est quam summa duarum aliarum quantita- „tum, quarum una unius, altera alterius priorum differentiam a tertia excedit.

Schema ita stabit:

Quantitates	A	C	E	Ergo ipsarum	A	E
Differentiae verae	b	d		differentia vera	f	
minores quam	g	h		minor quam	$g+h$	

Nimirum ajo f differentiam quantitatum duarum A. E. minorem esse quam $g+h$, summam duarum aliarum quantitatum, g. h. si g excedat b. differentiam ipsius A a tertia C, et h, excedat, d, differentiam ipsius E ab eadem tertia C. Nam g est major quam b, et h major quam d ex hypothesi, ergo $g+h$ est major quam $b+d$, at f non est major quam $b+d$ per prop. 4. Ergo f est minor quam $g+h$.

Scholium

Has propositiones quartam et quintam, etsi valde claras attente consideranti adjiciendas duxi tamen, tum quod servient ad facilem admodum per sola polygona inscripta sine circumscriptis demonstrationem apagogicam qua prop. 7. utar, tum quod operae pretium videatur ipsius per se differentiae proprietates considerare, quatenus ab excessu vel defectu animo abstrahitur; cum scilicet non exprimitur quaenam ex differentibus quantitatibus altera major minorve sit.

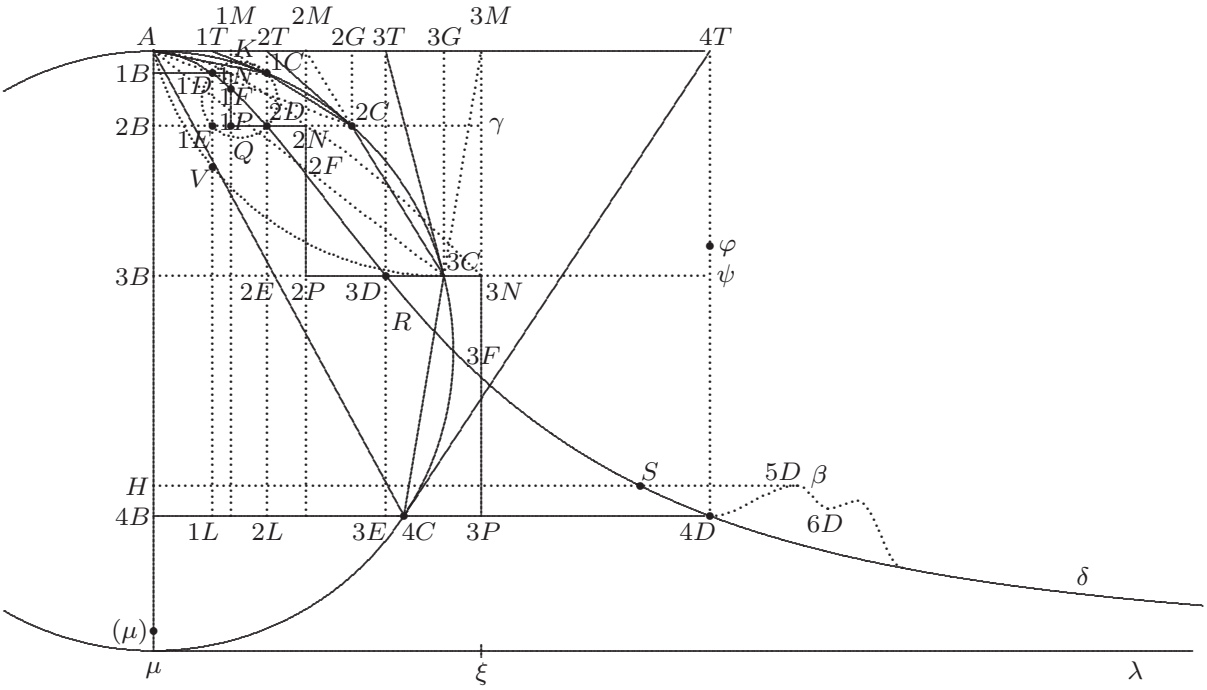
Propositio VI.

[Hujus propositionis lectio omitti potest, si quis in demonstranda prop. 7. summum rigorem non desideret. Ac satius erit eam praeteriri ab initio, reque tota intellecta tum demum legi, ne ejus scrupulositas fatigatam immature mentem a reliquis, longe amoenioribus, absterreat. Hoc unum enim tantum conficit duo spatia, quorum unum in alterum desinit si in infinitum inscribendo progrediare; etiam numero inscriptionum manente finito tantum, ad differentiam assignata quavis minorem sibi appropinquare. Quod plerumque etiam illi sumere pro confesso solent, qui severas demonstrationes afferre profitentur.]

Si a quolibet curvae cujusdam propositae, $1\,C\,2\,C$ etc. $4\,C$. (fig. 3.) puncto C. ad unum anguli cujusdam recti $T\,A\,B$ in eodem cum ipsa plano positi, latus $A1B2B$ etc. $4B$. velut ad axem, ducantur ordinatae normales $C\,B$ ad alterum latus $A1T2T$ etc. $4T$. tangentes $C\,T$ et ex punctis occursus tangentium, T, agantur perpendiculares TD ad ordinatas respondentes et curva nova $1\,D\,2\,D$ etc. $4\,D$. per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat. Rursus si quaelibet in curva priore designata puncta proxima, ut $1C$ et $2C$ vel etc. vel $3C$ et $4C$, aliave quotcunque inter haec prima et ultima paria interjecta, rectis inscriptis sive chordis $1C2C$, etc. usque ad $3C4C$ jungantur, quae productae $C\,M$ eidem, cui tangentes Anguli illius recti TAB. lateri AT. occurrant in punctis M. quae cadunt intra puncta T, ut $1M$ inter $1T$ et $2T$, et $3M$ inter $3T$ et $4T$. et ex hic occursuum punctis M similiter perpendiculares $1M1N1P$, aliaeque, usque ad

9 qvis | methodo indivisibilium contentus *gestr.* | in *L* 17 propositae, *(1)* fig. 5. puncto 1C *(2)* 1 C 2 C etc. 4 C. (fig. *(a)* 5 *(b)* 3.) *L*

9–16 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.



[fig. 3.]

$3M3N3P$, demittantur, quarum una quaelibet duorum punctorum ad M pertinentium ordinatis occurrat, ut $1M1N1P$. (cujus punctum $1M$, pertinet ad puncta curvae $1C$. $2C$.) occurrere debet, ordinatae $1C1B$ in puncto $1N$, et ordinatae $2C2B$ in puncto $1P$. idemque in caeteris fieri debet; unde hae perpendiculares ab ordinatis abscindent portiones quasdam inde ab axe sumtas, ut $1N1B$, aliave usque ad $3B3N$.

„His ita praescriptis ac praeparatis, a j o in c u r v i s p u n c t a C inter $1C$ et „$4C$ et puncta D inter $1D$ et $4D$ t a m s i b i v i c i n a t a n t o q u e n u m e r o „a s s u m t a i n t e l l i g i p o s s e, u t s p a t i u m r e c t i l i n e u m g r a- „d i f o r m e $1N1B4B3P3N2P2N1P1N$

compositum ex rectangulis $1N1B2B1P$, aliisque usque ad $3N3B4B3P$ quae sub ordinatarum si opus est productarum rescissis portionibus $1B1N$, aliisve usque ad $3B3N$, et sub intervallis $1B2B$, aliisve, usque ad $3B4B$. comprehenduntur;

1 *Zu* fig. 3. *auf Bl. 38 r°:* NB. figura propositionis sextae *mangelt.*

1 fig. 3: Die zugehörige Figur fehlt in der Vorlage, wie Leibniz nachträglich auf Bl. 38 r° notiert hat; sie wird nach N. 20 ergänzt.

„ab ipso spatio Quadrilineo $1D1B4B4D3D$ etc. $1D$ (axe $1B4B$, ordi-
„natis extremis $1B1D, 4B4D$ et curva nova $1D2D$ etc. $4D$ comprehenso) diffe-
„rat quantitate minore quavis data. Et eadem demon-
„stratio locum habet in quovis alio spatio mixtilineo
„et gradiformi continua rectarum ad quendam axem applicatione formatis.
„Adeoque methodus indivisibilium, quae per summas
„linearum invenit areas spatiorum, pro demonstrata
„haberi potest. Requiritur autem Curvas aut saltem
„partes in quas sunt sectae, esse ad easdem partes ca-
„vas, et carere punctis reversionum.

Definitio

Puncta Reversionum voco, in quibus coincidunt ordinata et tangens, seu ex quibus ordinata ad axem ducta curvam tangit: talia sunt, in curva $1D2D$ etc. $4D5D6D$, puncta $4D$. $5D$. $6D$. quia in illis curva cum antea descenderet ab A versus $4B$, nunc rursus ascendit versus A vel contra. Quae differunt a punctis flexuum contrariorum, quale est R, in quo tantum curva ex concava fit convexa, et contra atque ita non est ad easdem partes cava.

Porro Puncta Reversionum in areis spatiorum per summas rectarum ordinatarum inveniendis ideo nocent; quia ita fit, ut diversae ordinatae ejusdem curvae, ut HS, $H5D$ inter se, saltem ex parte, coincidant. Huic malo remedium est, ut tota curva in tot dividatur portiones, quot habet puncta reversionum, hoc pacto singulae portiones, ut $1D2D$ etc. $4D$, et $4D5D$, et $5D6D$, nulla habebunt reversionum puncta inter extrema sua interjecta; et in singulis locum habebit nostra propositio.

Caeterum, ut obiter dicam, ex his patet curvam eandem habere aut non habere puncta reversionum prout ad diversos axes refertur: quod secus est in punctis flexuum contrariorum.

Demonstratio Propositionis VI.

(1) Punctum $1M$ positum est inter puncta $1T$. $2T$. ex constructione. Ergo et recta $1M1N1P$ cadit inter rectas $1T1D$, $2T2D$, seu recta $1N1P$ de parallela $1B1N$ ad paral-

16 f. atqve ... cava *erg. L*

lelam $2B2D$ perveniens cadet intra duo puncta in his diversis parallelis posita, $1D, 2D$, ita ut a puncto $1D$ ad punctum $2D$ nulla possit duci linea, recta vel curva, quin vel rectam $1N1P$ secet alicubi in F, vel supra infrave duas parallelas $1B1N, 2B2D$ evagetur, adeoque modo ascendat, modo descendat, ut curva $1DQ2D$, descendens ab $1D$ ad Q et rursus ascendens a Q ad $2D$. vel curva $1DK2D$, ascendens ab $1D$ ad K, et descendens a K ad $2D$; quae adeo habebit puncta reversionum, Q vel K. Sed talia puncta non habet curva aut ejus portio $1D2D$, ex hypothesi; ergo rectam $1N1P$ secabit in $1F$. Eodem modo alia portio $2D3D$ rectam $2N2P$ secabit in $2F$. etc.

(2) Producta jam intelligatur $1T1D$, dum ordinatae sequenti $2B2C$ occurrat in $1E$. eodem modo $2T2D2E$ ordinatae sequenti $3B2E3C$ occurrat in $2E$. His positis ajo primum ipso rectangulo quod vocabo complementale $1D1E2D$. minorem esse differentiam inter unum Quadrilineum partiale $1D1B2B2D1D$, et inter unum rectangulum ei respondens $1N1B2B1P$, quod quia cum caeteris similibus spatium gradiforme componit, vocabo Rectangulum Elementare, quibus vocabulis tantum in hujus propositionis demonstratione utar, ut compendiosius loqui liceat. Assertum ita probo: ab utroque differentium, Quadrilineo partiali et rectangulo elementari auferatur quod utrique commune est, scilicet (quoniam per artic. 1. aliquod intelligi potest punctum $1F$,) Quinquelineum $1D1B2B1P1F1D$, quatuor rectis $1D1B$, et $1B2B$, et $2B1P$ et $1P1F$, ac curva $1F1D$ comprehensum: tunc residuorum, trilinei $2D1P1F2D$ ex quadrilineo partiali; et trilinei $1D1N1F1D$ ex rectangulo elementari remanentium, eadem utique differentia erit, quae ipsorum totorum differentium, Quadrilinei partialis, et rectanguli elementaris. Generaliter enim ea est differentia residuorum, quae totorum ex quibus sublata est quantitas communis.

(3) Suffecerit ergo ostendi differentiam horum duorum trilineorum minorem esse rectangulo complementali $1D1E2D$, quod patet quia utrumque simul, distincte, trilineum scilicet $1D1N1F1D$ et trilin. $2D1P1F2D$, adeoque et summa eorum, intra rectangulum hoc complementale cadit: majus est ergo rectangulum complementale quam eorum summa, ergo et majus quam eorum differentia; quare et majus quam id quod per artic. 2. cum ea coincidit, differentia scilicet inter Quadrilineum partiale, et rectangulum ei respondens Elementare, quod primum probare susceperam.

12 unum *erg. L* 13 inter *erg. L*

(4) Eodem modo ut in artic. 3. probabitur Quadrilinei partialis sequentis, $2D2B3B3D2D$, et rectanguli ei respondentis elementaris $2N2B3B$ differentiam minorem esse rectangulo sequenti complementali $2D2E3D$, et ita si alia quotcunque sequantur vel interjiciantur. Itaque generaliter summa omnium differentiarum partialium, vel quod idem est differentia totorum, id est differentia summae Quadrilineorum partialium omnium, seu Quadrilinei totalis $1D1B4B4D3D$ etc. *1D.* a summa omnium ejusmodi rectangulorum elementalium, seu a spatio rectilineo gradiformi $1N1B4B3P3N2P2N1P1N$ minor erit quam summa omnium rectangulorum complementalium $1D1E2D$, aliorumve similium usque ad $3D3E4D$.

(5) Haec rectangula quae complementalia vocavi, bases habent, $4D3E$, vel $3D2E$ (id est $3E2L$); aliasve, usque ad $2D1E$, (id est $2L1L$). Summa autem harum basium aequatur ipsi $4D1L$ seu (per prop. 3. artic. 1.) differentiae inter $1B1D$ (vel $4B1L$), et $4B4D$, inter primam scilicet et novissimam ordinatarum ad curvam $1D2D3D[4D]$. Quod eodem modo fieret, si quotcunque alia puncta ordinataeque interjicerentur. Itaque si jam ponamus horum rectangulorum complementalium $1D1E2D$, $2D2E3D$, aliorumque, altitudines, $1D1E$ (vel $1B2B$) et $2D2E$ (vel $2B3B$) usque ad $3D3E$ (vel $3B4B$, vel $\psi 4D$), seu intervalla ordinatarum, aequari inter se, utique summa omnium rectangulorum complementalium aequalis erit rectangulo $\psi 4D1L$ ex summa basium $1L4D$ in altitudinem communem $\psi 4D$ (aequalem ipsi $3B4B$, et $2B3B$,) ducta: vel si inaequales sint altitudines, utique summa rectangulorum complementalium minor erit rectangulo sub summa basium in maximam altitudinum: Ponatur ergo altitudinum harum maxima, vel certe cuique caeterarum aequalis, esse ultima $3B4B$, utique summa horum rectangulorum complementalium minor erit vel certe aequalis summae basium, $4D1L$, ductae in altitudinem maximam $3B4B$ vel $\psi 4D$ seu rectangulo $\psi 4D1L$.

(6) Quoniam differentia Quadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est summa rectangulorum complementalium per artic. 4. et summa rectangulorum complementalium aequalis est vel minor rectangulo $\psi 4D1L$ per artic. 5. Ergo differentia Quadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est rectangulo $\psi 4D1L$.

(7) Porro hoc novissimarum ordinatarum, $3B3D, 4B4D$, intervallum (nempe altitudo $3B4B$ sive $\psi 4D$,) tametsi caeteris majus, aut certe non minus sit assumtum inter-

13 ipsi | 3DL *ändert Hrsg.* | seu | (per ... 1.) *erg.* | differentiae *L*

vallis, tamen assignata quantitate minus assumi potest; nam ipso sumto utcunque parvo caetera sumi possunt adhuc minora. Posito ergo rectam $\psi 4D$ assignata linea minorem sumi posse, (quoniam in nostra est potestate puncta $3D4D$, aliaque sumere utcunque sibi propinqua, et numero quantolibet,) sequetur et rectangulum $\psi 4D1L$, altitudinem habens quae data recta minor sumi possit, etiam data aliqua superficie reddi posse minus. Sit enim data superficies, rectangulum βHA, si placet, aliudve quodcunque: assumatur ei aequale vel minus rectangulum $\varphi 4D1L$, super basi $4D1L$. Jam hac recta $\varphi 4D$ minor sumatur $\psi 4D$, erit rectangulum $\psi 4D1L$ minus rectangulo $\varphi 4D1L$, adeoque et spatio dato seu rectangulo βHA.

(8) His jam positis demonstratio ita absolvetur: differentia Quadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est rectangulo $\psi 4D1L$ per artic. 6. Et puncta in curva tam exiguo intervallo tantoque numero assumi possunt, ut rectangulum $\psi 4D1L$ sit dato spatio minus per artic. 7. Ergo eadem opera etiam Differentia hujus Quadrilinei, (de quo et Propositio loquitur) et spatii gradiformis data quantitate minor reddi potest. Q. E. D.

Haec propositio prolixiore indiguit demonstratione, quia non parum a communi indivisibilium methodo nostra in hoc quidem casu differt. Si vero, in casu alio a nostro, curva aliqua $1N2N3N$ per ipsa spatii gradiformis puncta, $1N$ et $2N$ et $3N$ transiisset, ut in communi methodo indivisibilium, ubi figurae curvilineae tantum in parallelogramma resolvuntur, fieri solet; longe facilior fuisset demonstratio. Differentia enim spatii gradiformis $1N1B3B2P2N1P1N$, et mixtilinei $1N1B3B3N2N1N$, constaret exiguis trilineis $1N1P2N1N$, et $2N2P3N2N$, utique minoribus quam rectangula ipsis circumscripta, $1N1P2N, 2N2P3N$, quae hic etiam vocabo complementalia, ergo et differentia dicta minor erit quam summa horum rectangulorum complementalium, summa autem horum rectangulorum complementalium nunquam major erit rectangulo facto ex summa basium, $1P2N$, $2P3N$, (quae nunquam major recta $3B3N$) ducta in altitudinem unius, si omnium altitudo aequalis est (ut in methodo indivisibilium communi assumi solet) vel si inaequalis, in maximam. Ergo si maxima vel certe caeteris non minor, ponatur esse novissima, dicta differentia nunquam erit major rectangulo $2B3B3N$, cujus altitudo cum possit fieri quantumlibet parva; etiam haec differentia inter spatium gradiforme et mixtilineum dato aliquo spatio minor reddi potest.

20 f. gradiformis | 1N1B4B3P3N2P2N, *ändert Hrsg.* | et *L* 25 facto *erg. L* 25 f. basium, | 1P1N, 2P2N *ändert Hrsg.* |, (qvae ... recta | 3D3N *ändert Hrsg.* |) ducta *L*

Jam summa rectangulorum elementarium, $1N1B2B1P$, et $2N2B3B2P$ (aliorumque etc.) id est spatium gradiforme $1N1B3B2P2N1P1N$ constituentium, aequatur summae basium (nempe ordinatarum $1B1N, 2B2N, 3B3N$, ad curvam $1N2N3N$;) ductae in altitudinem communem (si $1B2B$, vel $2B3B$ intervallum ordinatarum ponatur semper aequale) ergo et spatium gradiforme metiri possumus summa applicatarum ducta in intervallum duarum proximarum semper aequale. Spatium autem gradiforme eousque produci potest, ut differentia ejus a mixtilineo fiat minor quavis data, ut ostendi. Ergo si quid de summa linearum sive area spatii gradiformis ita demonstrari poterit, ut locum habeat utcunque producatur spatium gradiforme, sive ut tum maxime locum habeat, cum spatii gradiformis applicatarum intervalla quantum satis est exigua sunt, id etiam de mixtilineo verum erit, sive error si quis committi potest, erit minor quovis errore assignabili. Quare methodo indivisibilium quae per spatia gradiformia seu per summas ordinatarum procedit, ut severe demonstrata uti licebit.

Scholium

Hac propositione supersedissem lubens, cum nihil sit magis alienum ab ingenio meo quam scrupulosae quorundam minutiae in quibus plus ostentationis est quam fructus, nam et tempus quibusdam velut caeremoniis consumunt, et plus laboris quam ingenii habent, et inventorum originem caeca nocte involvunt, quae mihi plerumque ipsis inventis videtur praestantior. Quoniam tamen non nego interesse Geometriae ut ipsae methodi ac principia inventorum tum vero theoremata quaedam praestantiora severe demonstrata habeantur, receptis opinionibus aliquid dandum esse putavi.

Propositio VII.

„Si a quolibet curvae cujusdam puncto ad unum anguli recti in eodem plano positi „latus ducantur ordinatae normales, ad alterum tangentes, et ex punctis occursus „tangentium ducantur perpendiculares ad earum ordinatas, si opus est productas; „et curva alia per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat; „erit spatium inter axem (ad quem ductae sunt ordinatae,) duas ordinatas extremas,

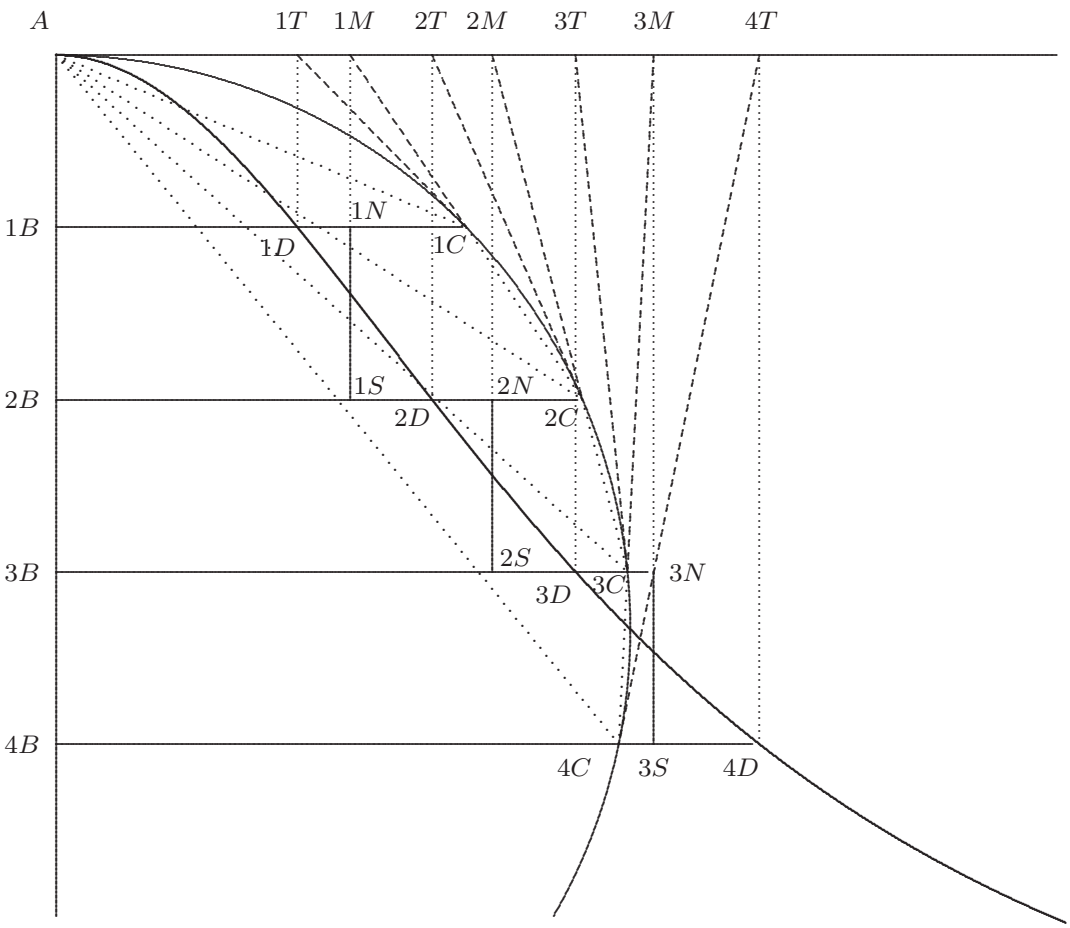
2 f. summae *(1)* horum rectangulorum; sive summae ordinatarum 1B1N, ad *(2)* basium *L*

„et curvam secundam compehensum, spatii inter curvam primam et rectas duas ejus „extrema cum anguli recti propositi centro jungentes, comprehensi duplum.

2 *Am Rand:* Formanda figura peculiaris pro hac propositione.

2–535,2 duplum | Definitiones. *erg.* | | In fig. 8. *erg. u. gestr.* | Latus L

3 figura peculiaris: Leibniz hat sich zunächst an fig. 3 von N. 20 orientiert, dann aber Punktbezeichnungen geändert (vgl. die Variante zu S. 535 Z. 21 f.). Eine neue Figur wurde nicht gefunden. Dem Text der prop. VII entspricht folgende Rekonstruktion:



Definitiones.

Latus cui ordinatae $1B1C$, $2B2C$ occurrunt vocare soleo axem, $A1B2B$, alterum latus, $A1T2T$, ejusdem anguli recti TAB voco Axem conjugatum, cui hoc loco occurrunt tangentes CT. Portiones $A1T$. $A2T$ ab axe conjugato a tangentibus abscissas, inde a puncto A sumtas, voco Resectas, figuram ad curvam secundam $1D2D3D$, ex resectis $A1T$, $A2T$, in ordinatas novas, $1B1D$, $2B2D$ translatis factam, figuram Resectarum. Qualis translatio fiet, si ex T. occursibus tangentium, perpendiculares TD ad ordinatas CB si opus est productas demittantur, et per puncta intersectionum D. transeat curva $1D2D3D$. His positis ajo spatium Quadrilineum $1D1B3B3D2D1D$, parte axis $1B3B$, ordinatis extremis $1B1D$, $3B3D$, et curva nova $1D2D3D$ comprehensum, seu figuram Resectarum esse sectoris sive spatii trilinei $1CA3C2C1C$ duabus rectis, ex anguli centro A ad curvae prioris extrema, $1C$ et $3C$ ductis, nempe $A1C$, et $A3C$, ac ipsa curva priore $1C2C3C$, comprehensi duplum.

(1) Ponatur non esse duplum, et differentia inter Trilineum duplum et Quadrilineum simplum sit Z. Inscribantur ipsi curvae $1C2C3C$ polygona numero finita quotcunque libuerit, quantumque satis erit, et ultimum ex ejusmodi inscriptis Polygonis sit figura rectilinea $A1C2C3CA$, quod rectis $A1C$, $A3C$ ex centro A, ad curvam ductis, et rectis curvae inscriptis sive chordis $1C2C$, $2C3C$ comprehensum est. Hae inscriptae producantur, ut antea tangentes, donec ipsi AT in punctis $1M$, vel $2M$ occurrant rectae productae $2C1C1M$, vel $3C2C2M$. Ex quibus punctis M demissae perpendiculares $1M1N1S$, vel $2M2N2S$ etc. secent ordinatas si opus productas, $1B1C$. $2B2C$ etc. in punctis $1N$. $2N$ et ordinatas $2B2C$. $3B3C$ etc. in punctis $1S$. $2S$ etc.

(2) Ponamus nunc inscriptionem Polygonorum eousque productam, donec polygoni $A1C2C3CA$ differentia a Trili-

1 *Zum erg.* Definitiones *mit Hinweis auf die durch einen Asterisk markierte Einfügungsstelle: (NB. il faut écrire ce mot au milieu à l'endroit où est l'étoile.)*

8 si ... productas *erg. L* 21 f. perpendiculares *(1)* 1M1N1P vel 2M2N2P etc. secent ordinatas 1B1N1C *(a)* et 2B1P2C, vel 2B2N2C et 3B2P3C in punctis 1N et 1P, vel 2N et 2P *(b)* et 2B1S2C, vel 2B2N2C et 3B2S3C in punctis 1N et 1S, vel 2N et 2S *(2)* 1M1N1S vel 2M2N2S etc. secent ordinatas si opus productas, | 0B0C. 1B1C. *ändert Hrsg.* | *(a)* 2B2C. in punctis 1N. 2N. 3N. *(b)* etc. *L* 22 ordinatas | 1B1C. 2B2C. *ändert Hrsg.* | etc. *L* 22 f. 1S. | 2N *ändert Hrsg.* | etc. *L*

neo $1CA3C2C1C$, itemque spatii rectilinei Gradiformis $1B1N1S$ $2N2S3B1B$, differentia a Quadrilineo $1D1B3B3D2D1D$, unaquaeque singulatim, sit minor, quam quarta pars ipsius Z. Potest enim eousque produci donec fiat minor quantitate quavis data.

(3) His positis, patet ex prop. 1. trianguli $A1C2C$ duplum esse rectangulum $1N1B2B1S$ et trianguli $A2C3C$ duplum esse rectangulum $2N2B3B2S$, et ita de caeteris, si qua sint, ergo et summa rectangulorum hujusmodi quotcunque seu spatium Gradiforme duplum erit summae omnium ejusmodi triangulorum, seu polygoni inscripti.

(4) Jam differentia inter Quadrilineum, quod vocabo Q, et spatium gradiforme, id est, (ut probavi artic. 3.) duplum polygonum inscriptum quod vocabo P, minor est quam quarta pars ipsius Z, per artic. 2. et differentia inter duplum polygonum inscriptum P, et duplum trilineum cui inscriptum est, quod vocabo T. minor est quam duae quartae ipsius Z (quia inter ipsa simpla ex artic. 2. differentia minor est quam una quarta) ergo per prop. 5. differentia inter quadrilineum, Q et duplum Trilineum, T minor est quam una quarta ipsius Z plus duabus, seu minor est quam tres quartae ipsius Z.

Nam si ita stent Quantitates Q P T

quarum Differentiae minores quam $\frac{1}{4}Z$ $\frac{2}{4}Z$

erit differentia inter Q et T minor quam $\frac{1}{4}Z + \frac{2}{4}Z$ per dictam prop. 5.

(5) Quoniam ergo differentia inter quadrilineum et duplum trilineum minor est quam $\frac{3}{4}Z$ per artic. 4. erit multo minor quam Z, ergo minor se ipsa (posita est enim esse Z, artic. 1.). Quod est absurdum. Nulla ergo differentia assumi potest, cum Z indefinita intelligi possit de qualibet, adeoque trilineum duplum et quadrilineum simplum aequalia sunt. Q. E. D.

3f. ipsius Z. *(1)* Qvod fieri posse de Polygonis constat ex demonstrationibus Archimedeis, de spatio vero Gradiformi et Qvadrilineo, si qvis rigorem desideret, inveniet demonstratum prop. 6. praecedenti *(2)* potest *L*

26 demonstrationibus: vgl. ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro*, I, prop. VI.

Scholium

Duo fortassis hic notari e re erit, unum circa demonstrationem, alterum circa propositionem ipsam. Demonstratio illud habet singulare, quod rem non per inscripta ac circumscripta simul, sed per sola inscripta absolvit. Equidem fateor nullam hactenus mihi notam esse viam, qua vel unica quadratura perfecte demonstrari possit sine deductione ad absurdum; imo rationes habeo, cur verear ut id fieri possit per naturam rerum sine quantitatibus fictitiis, infinitis scilicet vel infinite parvis assumtis: ex omnibus tamen ad absurdum deductionibus nullam esse credo simplicem magis et naturalem, ac directae demonstrationi propiorem, quam quae non solum simpliciter ostendit, inter duas quantitates nullam esse differentiam, adeoque eas esse aequales, (cum alioquin alteram altera neque majorem neque minorem esse ratiocinatione duplici probari soleat) sed et quae uno tantum termino medio, inscripto scilicet circumscripto, non vero utroque simul, utitur; adeoque efficit, ut clariores de his rebus comprehensiones habeamus.

Quod ad ipsam attinet propositionem, arbitror unam esse ex generalissimis, atque utilissimis, quae extant in Geometria, usque adeo enim universalis est, ut omnibus curvis, etiam casu aut pro arbitrio sine certa lege ductis, conveniat; et data qualibet figura alias exhibeat numero infinitas, quarum singularum dimensio pendeat ex priore vel contra. Sed et inter foecundissima Geometriae theoremata haberi potest; nam hinc statim demonstrantur Quadraturae omnium Paraboloidum aut Hyperboloidum in infinitum; sive figurarum, in quibus ordinatae vel ipsarum potentiae sunt in multiplicata aut submultiplicata directa aut reciproca ratione abscissarum aut potentiarum ab abscissis; et ut alias taceam quadraturas infinitas absolutas vel hypotheticas, Circulum certe et quamlibet Conicam centrum habentem ejus ope transformavimus in figuram rationalem, et hinc Quadraturam totius circuli ac portionis cujuslibet Arithmeticam, ac veram perfectamque arcus ex data tangente expressionem analyticam duximus, quibus demonstrandis hic tractatus occupatur.

4 absolvit | qvod nescio an hactenus salvo rigore fieri posse creditum sit; exemplum certe videre non memini: sed et peculiaribus ad eam rem propositionibus ac praeparationibus opus fuit, ut facile constabit examinanti *gestr.* |. Eqvidem *L* 7 sine ... fictitiis, *(1)* ut qvibusdam videri possint, de qvibus infra prop. 23 Schol *(2)* infinitis ... assumtis *erg. L* 14 arbitror *(1)* nullam facile generaliorem extare *(2)* unam *L* 23 et ... habentem *erg. L*

Porro cum Clarissimi Geometrae, qui Conica universaliter tractare coepere, ordinatarum ad curvas nomine comprehendant non tantum rectas parallelas, quales sunt $1C1B$, $2C2B$, $3C3B$, ut vulgo fieri solet, sed etiam rectas $A1C$, $A2C$, $A3C$, quae omnes ad unum punctum commune A, convergunt (quod vel ideo recte fit, quoniam ipsaemet parallelae sine errore pro convergentibus sumi possunt, ita tantum ut punctum concursus earum seu centrum commune infinite abesse fingatur, quemadmodum alter parabolae focus aut vertex). Hinc jam ope theorematis hujus nostri feliciter evenit, ut harum quoque novarum ordinatarum, nempe convergentium usus esse possit ad quadraturas, utque figurae non tantum per ordinatas parallelas in parallelogramma $1C1B2B$, vel $2C2B3B$, aliaque, ut a Cavalerio aliisque post ipsum fieri solitum est; sed et per ordinatas convergentes in triangula $A1C2C$, vel $A2C3C$, infinitis modis resolvantur, prout varie assumitur punctum A, unde ingens novorum inventorum campus aperitur, quorum hic elementa damus, ex quibus scio non pauca, neque his inferiora duci posse.

Definitiones.

Resectas et figuram Resectarum explicui in ipsius prop. praecedentis expositione.

Segmentum voco spatium, duabus lineis una curva altera recta comprehensum, ut spatium ACA, comprehensum duabus lineis, quarum una est recta AC, altera est curva etiam AC, utraque punctis, A, et C, terminata. Eodem modo spatium $A2C1CA$ est segmentum comprehensum recta $A2C$, et curva $A1C2C$. Si curva haec esset arcus circuli, foret spatium, $A2C1CA$ segmentum circulare, quod nomen cum huic spatio dudum tribui soleat, ejus exemplo caeteras id genus portiones, a figuris per rectas curvam in duobus punctis secantes, abscissas, segmenta appellandas putavi.

Sector est spatium trilineum ut $1CA2C1C$, duabus rectis $A1C$, $A2C$, et una curva $1C2C$ comprehensum. Si esset $1C2C$ arcus circuli, et punctum A centrum circuli, adeoque rectae $A1C$, et $A2C$ aequales, tunc utique etiam recepto more spatium

1 f. coepere, | Desargues et Pascalius, *gestr.* | ordinatarum *L* 6 infinite *(1)* absit *(2)* abesse *L*

1 Clarissimi Geometrae: Leibniz bezieht sich wohl auf G. Desargues, *Brouillon project*, 1639, S. 1, und auf Bl. Pascal, *Essay pour les coniques*, 1640, def. 1 (*PO* I S. 252); vgl. die Erl. zu N. 14 S. 144 Z. 3. 10 a Cavalerio aliisque: s. o. die Erl. zu S. 523 Z. 11. 18 spatium ACA: Im Folgenden bezieht sich Leibniz wieder auf fig. 3 S. 528 Z. 1.

$1CA2C1C$ appellaretur sector Circuli, cujus exemplo caetera etiam id genus spatia, ubicunque sit punctum A, aut quaecunque sit curva, putavi appellari posse sectores, in quos scilicet rectis convergentibus area figurae dividitur.

Ex his autem statim patet, si una ex lineis ut $A1C$ evanesceret, et si puncta A et $1C$ coinciderent, ex sectore fieri segmentum, adeoque quae de sectoribus generaliter demonstrantur sine consideratione magnitudinis rectarum comprehendentium posse etiam applicari ad segmenta, ut sequenti propositione exquisitius ostendetur.

Ex his porro intelligitur figuram Resectarum duas habere species, nempe figuram Sectorum et figuram Segmentorum. Nempe figura sectorum erit Zona quadrilinea $1D1B4B4D3D2D1D$, si curva $4C3C2C1C$ non perveniat in A. unde nec curva $4D3D2D1D$ in A veniet; Figura autem sectorum commode appellabitur, quia haec Zona, ut quidam vocant, id est figura ordinatis parallelis axe et curva contenta, semper respondenti sectori proportionalis est; nempe $1D1B4B4D3D2D1D$ ad $1D1B3B3D2D1D$, zona ad zonam; ut $1CA4C3C2C1C$ ad $1CA3C2C1C$, sector ad sectorem. Si curva generans $4C3C2C1C$ sit arcus circuli cujus centrum A, figura resectarum eo casu speciali nomine vocabitur Figura Angulorum, quia sectores figurae generantis, adeoque et zonae quadrilineae in figura generata sunt angulis proportionales, quod infra peculiari propositione explicabo. Sin curva $3C2C1CA$ continuata perveniat in punctum A; adeoque et curva $3D2D1DA$, hujus curvae figura appellabitur figura segmentorum, quoniam ejus portiones trilineae, inde a vertice A. ut $A1B1DA$, $A2B2D1DA$, sunt [duplis] segmentis $A1CA$, $A2C1CA$ etc. aequales, ut mox clarius patebit.

Ordinatarum nomine intelligi solent rectae parallelae, ut $1B1C$, $2B2C$, etc. a quolibet curvae, $1C2C3C$ puncto, $1C$, vel $2C$, aliove, ad rectam quandam indefinitae longitudinis $A1B2B$, etc. quae a quibusdam Directrix appellatur ductae; alii simpliciter vocant parallelas, alii ordinatim applicatas; aliquando ordinatarum nomine stricte sumto, intelliguntur tantum normales ad directricem, et tunc directrix vocatur Axis, quoniam tunc figura circa directricem, velut axem, rotata solidumque generante, ordinata quaelibet circulum generat basi solidi parallelum.

9 f. Zona qvadrilinea *erg. L* 20 trilineae *erg. L*

18 infra: s. u. prop. XIV S. 553 Z. 13.

Aliquando voce laxe sumta, per ordinatas, ut supra dixi intelliguntur et rectae convergentes, sive ab eadem curva ad punctum unum, velut centrum, concurrentes, quod suos habet usus sane praeclaros, quoniam plurima theoremata omnibus ordinatis generalissimo hoc sensu communia, haberi possunt. Nos in hoc quidem argumento ordinatarum nomine parallelas, et potissimum normales, intelligemus, quod plerumque ex subjecta materia satis apparebit.

Porro quando ordinatae parallelae ad quandam directricem ducuntur, tunc solet assumi in directrice punctum aliquod fixum, ut A, et portiones directricis inter punctum fixum A, et occursum ordinatarum, nempe punctum $1B$, vel $2B$, comprehensae, solent vocari A b s c i s s a e , aliqui vocant portiones Axis. Harum autem abscissarum usus esse solet ad explicandam curvae naturam per relationem abscissarum et ordinatarum inter se, ut si dicamus ipsas $1B1C$, $2B2C$ esse inter se in subduplicata ratione abscissarum $A1B$, $A2B$, vel quod eodem redit, si una tantum aliqua abscissa atque ordinata assumta dicamus semper fore rectangulum sub $A1B$ abscissa et certa quadam recta constante, aequale quadrato ordinatae $1B1C$, tunc curva $A1C2C$ erit Parabola. Eodem modo si essent ordinatae $1B1C$, $2B2C$ inter se in triplicata ratione abscissarum $A1B$, $A2B$, vel quod idem est, una tantum abscissa et ordinata assumtis, si cubus ab $A1B$ abscissa, aequaretur solido ex quadrato cujusdam rectae constantis, in ordinatam $1B1C$; foret curva, Parabola Cubica.

D i r e c t r i c e s c o n j u g a t a s , vel cum angulus rectus est, quem comprehendunt, a x e s c o n j u g a t o s voco (ad exemplum Diametrorum conjugatarum jam apud veteres receptarum), cum abscissae unius sunt aequales ordinatis ad alteram, et contra. Quod fit, si modo eae directrices sese intersecent in puncto fixo, seu initio abscissarum, et una sit parallela ordinatis ad alteram. Ut si sit curva $1D2D$, et directrix sit $A1B2B$, et ordinatae ad hanc directricem angulo quocunque inter se parallelae, sint

1 sumta, | ut a Pascalio factum est in impressa qvadam de Conicis scheda, qvae specimen majoris operis, inediti qvidem, sed si qvod aliud in eo genere Geometricum, *(1)* edendi fuit *(2)* editione digni fuit, *gestr.* | per *L* 15 1B1D *L ändert Hrsg.* 16 1B1D, 2B2D *L ändert Hrsg.* 22 unius *erg. L* 23 contra *(1)* , qvod fit, si modo eae sese intersecent in puncto fixo seu initio abscissarum, et una sit parallela ordinatis ad alteram, et contra *(2)* . Qvod *L* 23 directrices *erg. L*

22 apud veteres: vgl. Apollonius, *Conica*, I, def. 6. 26 scheda: Bl. Pascal, *Essay pour les coniques*, 1640, def. I (*PO* I S. 252). 27 operis: s. Erl. zu N. 20 S. 202 Z. 22.

$1B1D$, $2B2D$, abscissae ex directrice sint $A1B$, $A2B$, denique per initium abscissarum A, transeat AT, ipsis $1B1D$, vel $2B2D$ parallela, ea recta AT erit directrix, conjugata priori AB: nam in ipsa portio $A1T$, aequalis ipsi $1B1D$ ordinatae ad directricem priorem AB, poterit sumi pro abscissa, et ipsa $1T1D$, aequalis ipsi $A1B$ abscissae ex directrice priore, erit ad conjugatam directricem ordinata. Hae[c] consideratio magnos habet usus in omni Geometria, sed inprimis in materia de Quadraturis. Ordinatas porro ad Directrices conjugatas, etiam ordinatas conjugatas appello.

Trilineum orthogonium, vel aliquando simpliciter Trilineum, cum quibusdam voco, spatium axe, ordinata aliqua normali, et curva comprehensum, ut $A2B2C1CA$, comprehensum axis portione seu abscissa $A2B$, ordinata $2B2C$, et curva $2C1CA$, unde necesse est ut curva perveniat usque ad axem: axis portionem $A2B$ vocare solent altitudinem, ordinatam trilineum terminantem $2B2C$, basin. At $A2B2C2G$ Rectangulum circumscriptum vocant, quod communem habet altitudinem cum figura trilinea, basin vero aequalem maximae ordinatae: quae si etiam ultima trilinei assumti est, tunc manifestum est hoc rectangulum (vel si ad ordinatas obliquas extendas, parallelogrammum) circumscriptum quatuor rectis comprehendi, ex quibus duae sunt ordinatae conjugatae, et duae abscissae conjugatae, quoniam semper abscissa unius directricis ordinatae ad alteram relatae aequalis et parallela est. Ita Trilinei Orthogonii $A2B2C1CA$ rectangulum circumscriptum est $A2B2C2GA$. Complementum Trilinei Orthogonii, seu Trilineum Complementale vocant, quod Trilineo Orthogonio adscriptum, complet Rectangulum circumscriptum, ut si Trilineo Orthogonio $A2B2C1CA$ adscribatur Trilineum complementale $A2G2C1CA$ constituetur rectangulum circumscriptum $A2B2C2G$. Unde sequitur ea sibi mutuo complementa esse, et esse ad Directrices conjugatas, et eandem curvam habere communem, et ubi unum est concavum, ibi alterum esse convexum, et altitudinem unius aequari basi alterius et contra, aliaque id genus, quae cuivis manifesta sunt.

Intersectio Directricium conjugatarum seu initium commune trilineorum se mutuo complentium, sive punctum in quo ordinata fit infinite parva, vel evanescit, ac curva ad

2 recta AT *erg. L* 19 rectangulum *(1)* parallelum *(2)* circumscriptum *L* 23 circumscriptum | isoparallelum *gestr.* | A2B2C2G *L* 28 qvo | unius ex trilineis *gestr.* | ordinata *L*

8 f. cum quibusdam: vgl. Bl. Pascal, *Traité des trilignes rectangles*, 1658 (*PO* IX S. 3–45).

axem pervenit, solet appellari v e r t e x t r i l i n e i vel apex, qui etiam est punctum fixum sive initium abscissarum dicitur: sed non solet appellari v e r t e x c u r v a e , nisi quando alterutra directricium in eo curvam tangit.

P e r s u m m a m R e c t a r u m a d q u e n d a m a x e m a p p l i c a t a r u m intelligimus figurae perpetua applicatione factae aream, ut si dicam summam omnium AT ad axem AB, intelligo figuram ex omnibus AT in respondentibus punctis B, axi ordine applicatis factam, ut si $A1T$ translata sit in $1B1D$ aequalem, atque ita applicata sit ad $A1B$ abscissam; et ita de caeteris. Angulus autem applicationis solet intelligi rectus. Sed nec necesse est ut a p p l i c a t a e ipsum axem attingant, veluti: Summa differentiarum inter AT et BC, quae aequantur ipsis DC dabit aream figurae $1D1C2C3C3D2D1D$. Hae autem loquendi formulae permissae erunt, si quis fig. 8. per summam omnium rectarum, verbi gratia omnium BC, (: id est ipsarum $1B1C$. et $2B2C$. et $3B3C$ etc. aliarumque :) intelligat summam omnium rectangulorum, ut $0B1B1C$, $1B2B2C$, $2B3B3C$ etc. sub ipsis rectis $1B1C$, $2B2C$, $3B3C$ etc. et constante intervallo semper aequali $0B1B$. vel $1B2B$. vel $2B3B$ etc. indefinitae parvitatis assumto, comprehensis. Quicquid enim de tali summa demonstrari poterit, sumto intervallo utcunque parvo, id quoque de areae curvilineae $0C0B3B3C0C$ magnitudine demonstratum erit, cum summa ista (intervallo satis exiguo sumto) talis esse possit, ut ab ista summa rectangulorum differentiam habeat data quavis minorem. Et proinde si quis assertiones nostras neget facile convinci possit ostendendo errorem quovis assignabili esse minorem, adeoque nullum. Has cautiones nisi quis observet, facile ab indivisibilium [methodo] decipi potest. Exemplum infra dabimus prop. . . .

2 dicitur *erg. L* 11 erunt, *(1)* supposita indivisibilium methodo, seu dimensione arearum per summas linearum demonstrata, secundum ea qvae diximus p r o p. 6. prorsus qvemadmodum permissum erit, figuras qvales descripsimus p r o p. 6. e t 7., qvoties curva 2D1DA in angulum A pervenit, appellare figuras segmentorum, ubi demonstratum erit segmentis figurarum generantium esse proportionales. Qvod nunc faciemus. *(2)* si qvis | fig. 8. *erg.* | per *L* 12 etc. *(1)* :) intelligat aliarumqve infinitarum *(2)* aliarumqve :) *L* 19 minorem *(1)* Qvoties autem talis reductio *(2)* Et . . . qvis *(a)* aeqvalitatem demonstratam *(b)* assertiones *L* 20 ostendendo *(1)* error *(2)* differentiam *(a)* qvam intercedere a di *(b)* nullam *(c)* qvavis assignabili esse minorem, adeoqve nullam. Hanc cautionem *(3)* errorem *L*

22 prop. . . . : s. u. prop. XXII scholium S. 583 Z. 11.

Propositio VIII.

„Iisdem positis quae in propositione praecedenti, eadem locum habebunt licet ini-
„tium utriusque curvae in angulum rectum incidat, sive licet puncta $1B$, $1C$, $1D$,
„inter se et cum puncto A, coincidere intelligantur, adeoque figurae quam voco
„segmentorum portio seu trilineum orthogonium $A3B3D2DA$
„aequale erit duplo segmento figurae generantis $A3C2CA$.

Hoc uno verbo confici potest, ex eo quod quae propositione 7. demonstravimus generalia sunt, et locum habent, utcunque parvae sint rectae $A1C$, $A1B$, $1B1D$, $1B1C$, ac proinde etsi sint infinite parvae, sive etsi puncta coincidant, ubi sector $1CA3C2C1C$ degenerabit in segmentum $A3C2CA$; et quadrilineum sive Zona hujus sectoris dupla $1D1B3B3D2D1D$ degenerabit in trilineum orthogonium $A3B3D2DA$, ergo hoc trilineum hujus segmenti duplum erit.

Si quis tamen lineam infinite parvam ferre non possit, hunc non ideo minus convincemus. Neget esse duplum, et differentia inter unum duplum et alterum simplum sit Z. Assumatur recta $A1B$ tam parva, ut rectangulum, $A1B1C2T$ sit minus quam quarta pars ipsius Z, ergo et quae intra ipsum sunt, segmentum exiguum $A1CA$, item trilineum exiguum $A1B1DA$ erunt minora quam $\frac{Z}{4}$. Segmentum exiguum est differentia segmenti magni $A3C2CA$, et sectoris $1CA3C2C1C$, et trilineum exiguum est differentia trilinei magni $A3B3D2DA$ et Quadrilinei $1D1B3B3D2D1D$. Ergo erit:

Determinatio prima: Differentia inter Segmentum Magnum et Sectorem, quae est ipsum segmentum exiguum, est minor quam $\frac{Z}{4}$.

Determinatio secunda: Differentia inter Trilineum magnum et Quadrilineum, quae est ipsum Trilineum exiguum, est minor quam $\frac{Z}{4}$. Et quoniam per prop. 7. Quadrilineum aequale duplo sectori; hinc ex determinatione 2. sequitur

Determinatio tertia: Differentia inter trilineum magnum et duplum sectorem minor est, quam $\frac{Z}{4}$. Ex determinatione autem 1. sequitur

19 f. erit: *(1)* Determinatio prima: Diff. inter Segm. Magn. et sect. seu ipsum segm. parvum est *(2)* Determinatio *L*

D e t e r m i n a t i o q u a r t a : Differentia inter duplum sectorem et duplum segmentum est minor quam $\frac{2}{4}Z$. Ex determinationibus tertia et quarta oritur schema sequens[:]

Quantitates:	Trilin. Magn.	dupl. sect.	dupl. segm.
Differentiae		min. quam $\frac{Z}{4}$	min. quam $\frac{2}{4}Z$

Ergo p e r p r o p. 5. Trilinei magni et dupli segmenti differentia minor est quam $\frac{Z}{4} + \frac{2}{4}Z$, seu minor quam $\frac{3}{4}Z$. Ergo minor seipsa posita est enim esse Z. Quod est absurdum, nulla ergo poni potest differentia Z, adeoque Trilineum magnum nempe $A3B3D2DA$ aequale erit duplo segmento $A3C2CA$. Quod demonstrandum erat.

Scholium.

Haec ideo minutim exposui, ut Viri docti agnoscant, quam nullo negotio severe demonstrari queant, quae illis suspecta videntur, quo posssint imposterum Geometrae his minutiis tuto supersedere, cum similis ratiocinatio inciderit.

P r o p o s i t i o I X.

„Si trilineum figurae segmentorum cadat intra trilineum figurae generatricis, dif-
„ferentia eorum seu figura duabus curvis in vertice concurrentibus, et differen-
„tia ordinatarum comprehensa aequalis est complemento Trilinei ipsius generatricis,
„seu differentiae ejus a rectangulo circumscripto.

In eadem semper figura, quoniam trilineum $A3B3D2DA$, cadit intra trilineum $A3B3C2CA$, ajo differentiam eorum, seu figuram $A2D3D3C2CA$ comprehensam duabus curvis $A2D3D$, $A2C3C$, et recta $3D3C$, quae est differentia ordinatarum $3B3C$ et $3B3D$, aequari ipsi $A3G3C2CA$ complemento trilinei $A3B3C2CA$ ad rectangulum $A3B3C3G$.

Super segmenti $A3C2CA$ chorda sive subtensa $A3C$ aliud in alteram partem constituatur segmentum $A3CVA$, priori per omnia simile, similiter positum, et aequale. Ostensum est p r o p. 8. spatio ex his duobus segmentis composito $AV3C2CA$ aequari trilineum figurae segmentorum $A3B3D2DA$. Ergo si ab eadem figura generatrice $A3B3C2CA$ auferantur aequalia, hinc duplum segmentum $AV3C2CA$, ut restet trilineum $A3B3CVA$, et illinc figura segmentorum $A3B3D2DA$, ut restet figura bicurvilinea $A2D3D3C2CA$, sequetur haec duo residua figuram scilicet bicurvilineam et trilineum

$A3B3CVA$, id est huic trilineo per omnia simile et aequale trilineum complementale $A3G3C2CA$, aequari: quod ostendere propositum erat.

P r o p o s i t i o X.

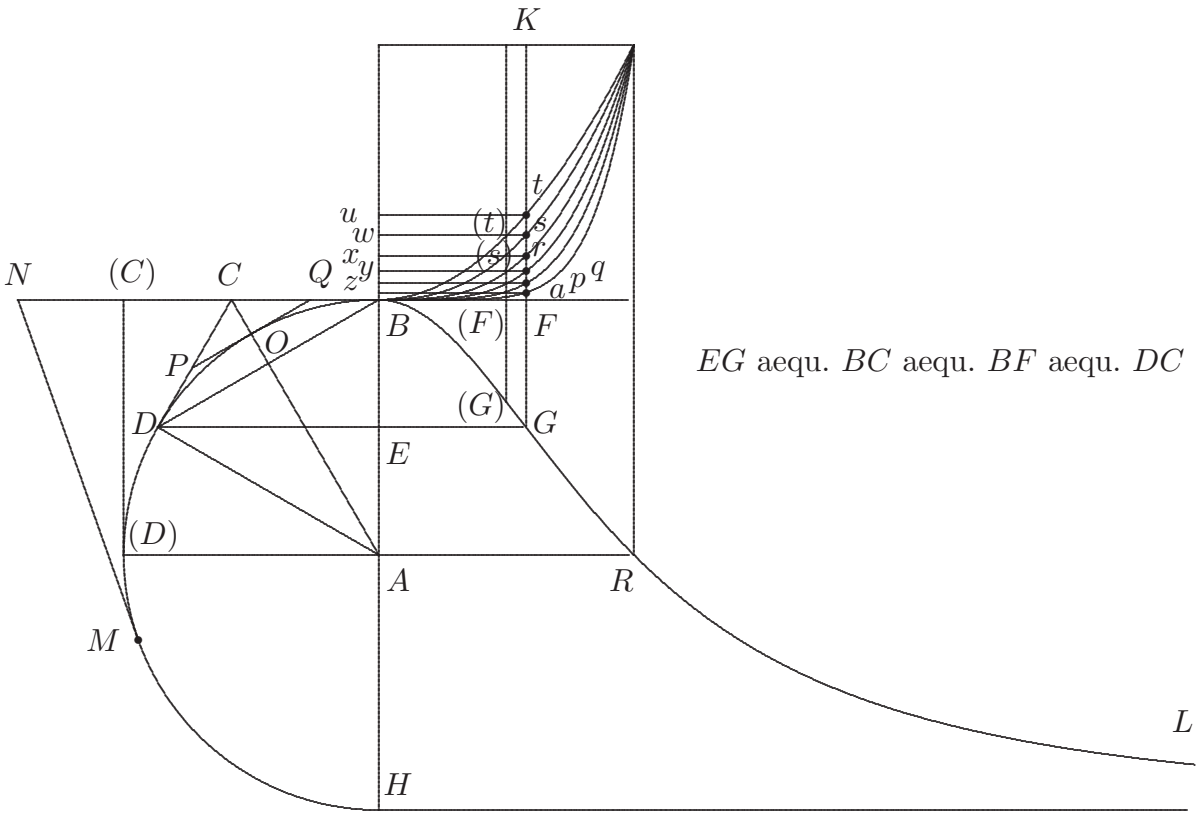


fig. 9.

„Trilineum $DCBOD$ (fig. 9.) seu Trianguli DCB, (tangente CD axe occursuum seu „conjugato BC et chorda DB comprehensi) excessus super segmentum $BDOB$; „dimidium est trilinei $BFGB$, quod figurae segmentorum, $[B]EGB$ complemento „est.

5 *(1)* „A figura curvilinea data utcunqve exigua portionem abscindere, cuius duplo exhibeatur „aeqvalis figura longitudinis infinitae; infinitis modis
Qvantulacunqve sit figura *(a)* rectilinea *(b)* curvilinea, utiqve infinitis aliqvod curvae eius punctum eli
(2) „Trilineum | DCOB *ändert Hrsg.* | (fig. 9.) *L*

Nam triangulum DCB dimidium est rectanguli $BEGF$, (quia eadem basis BC vel BF, et altitudo BE) quare si a rectangulo $BEGF$, auferatur figura segmentorum $BEGB$. ut restet $BFGB$, et a dimidio rectanguli, seu a triangulo DCB auferatur dimidia figura segmentorum, seu per prop. 8 ipsum segmentum $DBOD$; restabit trilineum $DCBOD$. dimidium ipsius $BFGB$. Quoniam $DCBOD$ differentia dimidiorum, DCB, $DBOD$, dimidia est $BFGB$ differentiae totorum $BEGF$, $BFGB$. Adde prop. 29.

Propositio XI.

„A figura curvilinea utcunque exigua portionem abscindere, cujus duplo exhibeatur „aequalis figura longitudinis infinitae, infinitis modis.

Quantulacunque sit figura curvilinea utique infinitis modis aliquod curvae ejus $2C3C4C\mu$ (redeundo ad fig. 3) punctum eligi potest, quale est μ, ad quod duci potest tangens $\mu\lambda$, et ad hanc tangentem perpendicularis $2B\mu$, intra figuram; ita ut abscindi possit a figura trilineum orthogonium $2C2B\mu4C3C2C$. Ajo hujus duplo aequalem posse exhiberi figuram infinitam; et ostendi posse modum exhibendi.

Per aliquod rectae $4B\mu$, productae si ita libuerit, punctum A, ducatur perpendicularis AT, parallela scilicet tangenti $\mu\lambda$, et ex curvae $2C\mu$ punctis $3C$, aut $4C$ ducantur tangentes quae ipsi AT occurant in punctis $3T$, et $4T$ et similibus; et ex punctis occursuum $3T$, $4T$ demissis perpendicularibus $3T3D$, $4T4D$ ad $3B3D$, $4B4D$ ordinatas tangenti $\mu\lambda$ parallelas, si opus est, productas: idque perpetuo factum intelligatur, a puncto $2C$ usque ad punctum μ, ut in prop. 7. tunc habebimus spatium infinitum $2D2B\mu\lambda\delta4D3D2D$ duabus lineis rectis finitis $2D2B$ et $2B\mu$. duabusque lineis infinitis una curva in infinitum procedente, $2D3D4D\delta$ altera recta ipsi asymptoto, $\mu\lambda$ comprehensum.

Porro Curvam $2D3D4D\delta$ infinitam esse patet, quia quanto propius aberit punctum ut $4C$ a puncto μ, hoc longior erit recta $A4T$, et si qua detur linea recta finita, poterit semper punctum ut $4C$ tale tamque propinquum puncto μ. mente designari,

6 adde prop. 29 *erg. L* 11 (redeundo ad fig. *(1)* ... *(2)* 3) *erg. L* 12 perpendicularis *(1)* intra figuram, qvae tangens sit *(2)* 2Bμ *L* 14 posse *erg. L* 20 2D2B$\mu\lambda\beta$4D *L ändert Hrsg.* 23 2D3D4Dβ *L ändert Hrsg.*

ut ipsa $A4T$, vel ei aequalis $4B4D$, sit data linea recta finita major, adeoque curva $4D\delta$ procedet in infinitum versus λ; s e m p e r q u e m a g i s m a g i s q u e d e s c e n d e t a d r e c t a m $\mu\lambda$ prout punctum ut $4B$ vel $4C$ vel $4D$ ipsi $\mu\lambda$. propius assumitur: n u n q u a m t a m e n a d r e c t a m $\mu\lambda$ p e r v e n i e t. Nam si ad eam perveniret in puncto aliquo ut λ, ipsa $\mu\lambda$ foret ordinata ad curvam, adeoque aequali portioni ex AT, per tangentem in μ, id est per ipsam $\mu\lambda$, ipsi AT, si possibile esset, occurrentem, abscissae, sive Resectae; sed $\mu\lambda$ ipsi AT, sibi parallelae occurrere impossibile est, quare nec r e c t a $\mu\lambda$ uspiam occurret c u r v a e $4D\delta$ ac proinde e r i t a s y m p t o t o s.

Superest ut ostendam spatium longitudine infinitum $2D2B\mu\lambda$ etc. $\delta4D3D2D$ aequari duplo trilineo orthogonio $2C2B\mu3C2C$. Verum hoc non aliter fieri potest, (ne quis hic erret) nisi pro recta $\mu\lambda$ ponatur recta $(\mu)\lambda$. puncto (μ) paulo supra punctum μ sumto, intervallo $(\mu)\mu$ infinite parvo, ita ordinata $(\mu)\lambda$. erit longitudine infinita; major qualibet assignabili $4B4D$, quia etiam ipsa $\mu(\mu)$ quolibet assignabili intervallo $\mu4B$ minor est. Proinde $(\mu)\lambda$ non erit curvae $D\delta$ asymptotos, sed ei occurrens alicubi ut in λ, licet λ absit infinito abhinc intervallo. Id est recta $(\mu)\lambda$ erit quidem infinita, sive quavis designabili major, sed non interminata. Hoc posito utique ex p r o p. 7. spatium $2D2B(\mu)\lambda\delta4D3D2D$, infinitae baseos $(\mu)\lambda$ ipsius finiti $2C2B\mu4C3C2C$. duplum erit. Generalis enim est propositio 7. nec longitudinem aut brevitatem linearum moratur.

9–18 *Am Rand:* ℜ Aliter demonstrandum quod neque major quia non potest inveniri pars ejus finito aequalis. Nec minor quia nec pars alterius ipsi aequalis. Idem fieri potest infinitis modis. Infiniti pars finita assumi potest dato f i n i t o major.

1 4Dβ *L ändert Hrsg.* 8 4 D β *L ändert Hrsg.* 9 2D2B$\mu\lambda$ etc β4D2D3D *L ändert Hrsg.* 10 2C2Bμ3C2C *(1)* , porro ut hoc exacte ostenderem, nulla mihi occurrit ratio commodior *(2)* . Verum *L* 11 nisi *(1)* ponatur recta $\mu\lambda$ non esse ipsi AT omnino parallela, sed nonnihil ad eam inclinata, nec proinde curvae Dδ asymptotos *(2)* pro *L* 17 2D2B$(\mu)\lambda\delta$2C *L ändert Hrsg.* 17 1C1Bμ4C2C *L ändert Hrsg.*

---

10 duplo . . . $2C2B\mu3C2C$: Es müsste duplo trilineo $2CA\mu3C2C$ heißen, wie Leibniz in N. 20 gezeigt hat; vgl. die Erl. zu S. 210 Z. 14 f.

Scholium

Constitutis Propositionibus generalibus ad Specimina Methodi descendere tempus est: qualia in Cycloide, aliisque curvis, sed potissimum in Circulo habemus, cujus causa totam hanc tractationem suscepimus. Quoniam autem nostra Circuli Quadratura requirit Quadraturas Paraboloidum; itaque ubi paucis Cycloidem ac figuram Angulorum attigerimus (quoniam ex his nihil in sequentia redundat) ad Paraboloides et Hyperboloides quadrandas accedemus, et ad Quadraturam Circuli gradum struemus.

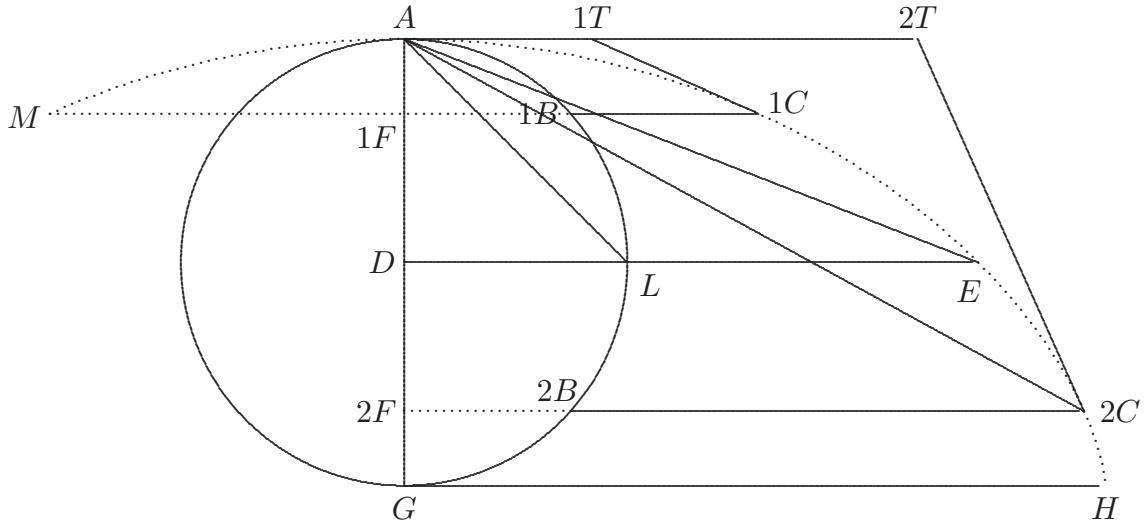
1 f. Scholium |*(1)* Admiranda *(2)* Memorabilis est contemplatio de spatiis longitudine infinitis magnitudine tamen finitis. Veteribus, qvod sciam, nihil tale innotuit, et satis ipsis mirum videbatur, esse qvasdam rectas asymptotos, qvae magis magisqve ad curvam accederent, nunqvam tamen ad eam pervenirent. Primus, ut puto, Torricellius solidum Hyperbolicum acutum longitudine infinitum dimensus est, et ad *(a)* Cubum *(b)* cylindrum qvendam |finitum *erg.*| reduxit: in plano P. Gregorius a S. Vincentio spatium infinitum inter duas Hyperbolas certa ratione comprehensum qvadravit, et Vir suo merito celeberrimus, Christianus Hugenius, spatium cissoidale infinitum ad circulum revocavit. Et Geometra eximius, Joh. Wallisius ostendit qvomodo innumerae sint Hyperboloides, qvarum area, licet longitudine infinita, possit inveniri, et qvomodo possint illae ab aliis, qvae id non patiuntur, probabili ratione discerni, *(aa)* qvae qvanqvam inductione utantur, plurimum tamen ingenii habent *(bb)* qvod qvanqvam inductione utatur, plurimum tamen ingenii habet |adde infra prop. 22. ubi demonstravimus *erg.*|. Nobis propositio septima viam dedit, cujuslibet curvae datae segmento cuidam vel sectori, utcunqve parvo, duplicato, infinitis modis, figuras longitudine infinitas exhibendi aeqvales. Qvod aliis etiam rationibus fieri posse non ignoramus.
Caeterum ingenuitas nostra non patitur ut dissimulemus, non esse ista tam mira, qvam hominibus primo aspectu videntur. R. P. Pardies e Societate Jesu, scriptis elegantibus notus eruditis, ac vita longiore dignus, tantum hujusmodi meditationibus tribuebat, ut crederet efficax satis argumentum praebere ad evincendam a n i m a e i m m a t e r i a l i t a t e m |qvemadmodum in compendii Geometrici praefatione asseruit *erg.*|. Mihi videtur ipsam per se naturam mentis, et operationes, praesertim qvibus in se revertitur, sufficere ut *(aaa)* a re duobus tantum *(aaaa)*, extensione scilicet, et massa, praedita *(bbbb)*

9–11 Veteribus... pervenirent: Leibniz bezieht sich vermutlich auf die bei F. Barozzi, *Admirandum illud geometricum problema*, 1586, S. 3 f., genannten Apollonius, Geminus, Pappus, Eutokios und Proklos; vgl. VII, 3 N. 6 S. 97. 11 dimensus: E. Torricelli, *Opera geometrica*, 1644, Tl II, S. 93 bis 135 (*TO* I, 1 S. 173–221). 13 qvadravit: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXXIX, S. 603. 14 revocavit: Huygens verfasste seine Zissoidenquadratur im April 1658 (*HO* II S. 170–173). Er informierte Wallis über die Quadratur in seinem Brief vom 6. September 1658 (*a. a. O.*, S. 210–214, insbesondere 212) und sandte ihm seinen Beweis vor dem nächsten erhaltenen Schreiben vom 31. Januar 1659 (*a. a. O.*, S. 329–331). Wallis erwähnt Huygens' erste Mitteilung in *Mechanica*, 1670 bis 1671, pars II, S. 532 (*WO* I S. 905) und gibt den Wortlaut des Beweises im Nachtrag zur *Mechanica*, pars III, S. 754–756 (*WO* I S. 906–908) wieder. 15 ostendit: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, Scholium zu prop. 101 bis Scholium zu prop. 107, S. 74–84 (*WO* I S. 407–412). 26 asseruit: I. Pardies, *Elemens de geometrie*, 1671, préface, [a vii] v°.

Definitio

Retortam Cycloidis voco bicurvilineum (fig. 4) $A1B2B2C1CA$, arcu aliquo Cycloidis, $A1C2C$, arcu $A1B2B$ circuli generatoris (diametrum AG in axe cycloi-

praedita, extensione scilicet et massa, id est Corpore *(bbb)* a Corpore, sive a re duobus tantum praedita, extensione scilicet et massa distinguatur. Qvanqvam non negem singulares qvasdam operationes caeteris, saltem apparere, mirabiliores; qvas plus valere si non ad probandum, certe ad persuadendum, non abnuerim. Qvod hanc vero attinet | mentis actionem *erg.* | qva spatia infinita metimur, *(aaaa)* ea ex *(bbbb)* ea nihil extraordinarium continet, cum fictione qvadam nitatur, et supposita qvadam linea terminata qvidem, infinita tamen, nullo negotio procedat, unde non plus habet difficultatis, qvam si finitum longitudine spatium metiremur.
Magis mirarer, si qvis ipsum spatium absolute interminatum *(aaaaa)* recta atque perfecta asymptoto comprehensum *(bbbbb)* inter curvam atque perfectam asymptoton interjectum; ad finitum spatium reducere posset |, aut saltem ad terminatum *gestr.* |. Sed tale nihil mihi innotuit, credo nec aliis | adde tamen prop. 14. coroll. *erg.* |. Qvoniam vero paradoxa qvibusdam haec locutio videbitur, *(aaaaaa)* dictae scilicet inf *(bbbbbb)* de Lineis quae infinitae, non tamen interminatae sint: Ideo admonendum est, qvemadmodum plurimum interest inter indivisibile et infinite parvum; ita longam esse differentiam inter infinitum et interminatum. Fallax est indivisibilium Geometria, nisi de infinite parvis explicetur; neqve enim puncta vere indivisibilia tuto adhibentur, sed lineis utendum est, infinite qvidem parvis, lineis tamen, ac proinde divisibilibus. Eodem plane modo qvantitas interminata differt ab infinita. *(aaaaaaa)* Nam linea *(aaaaaaaa)* finita sive communis, media *(bbbbbbbb)* terminata media qvodammodo est inter minimam id est punctum, et maximam, sive vere interminatam. Linea autem finita, media est *(bbbbbbb)* Nam lineae interminatae magnitudo nullo modo Geometricis considerationibus subdita est, non magis quam puncti. Qvemadmodum enim puncta, licet numero infinita, frustra adduntur aut subtrahuntur *(aaaaaaaa)* quantitati term *(bbbbbbbb)* lineae terminatae, ita linea terminata, qvotcunqve licet vicibus repetita interminatam facere aut exhaurire non potest. Qvod secus est in linea terminata qvidem, infinita tamen, qvae aliqva linearum finitarum multitudine constituta intelligitur tametsi multitudo *(aaaaaaaaa)* repetitionum *(bbbbbbbbb)* haec omnem numerum excedat. Et qvemadmodum linea infinita terminata componitur ex finitis; ita finita linea componitur ex infinite parvis sed divisibilibus tamen. Hinc dici non potest Lineam terminatam esse | proportione *erg.* | mediam inter punctum seu lineam minimam, et interminatam seu lineam maximam. At dici potest lineam finitam esse mediam proportione, non qvodammodo, sed vere exacteqve inter | qvandam *erg.* | infinite parvam et | qvandam *erg.* | infinitam; et | hoc sensu *gestr.* | verum est rectangulum sub linea infinita et infinite parva cuidam finito qvadrato aeqvale esse posse; idqve in Hyperbola Conica reapse contingit. Nam si curva $4D\delta\lambda$ esset | curva *gestr.* | Hyperbolica, cuius centrum sit μ *(aaaaaaaaaa)* ordinata aliqua *(bbbbbbbbbb)* et abscissa aliqua infinite parva sit $\mu(\mu)$, foret ordinata utiqve infinite longa $(\mu)\lambda$ major scilicet qvalibet recta designabili et rectangulum infinitum $\mu(\mu)\lambda$ sub infinita et infinite parva comprehensum, ex natura Hyperbolae qvadrato cuidam constanti finito aeqvale esset. Interminatum itaqve voco in qvo nullum punctum ultimum sumi potest, saltem ab una parte. Infinitum vero, qvantitatem sive terminatam, sive interminatam, modo qvalibet a nobis assignabili, numerisve designabili, majorem | intelligamus *erg.* |. An autem hujusmodi qvantitates ferat natura rerum Metaphysici est disqvirere; Geometrae sufficit, qvid ex ipsis positis seqvatur, demonstrare. *gestr.* | Constitutis L



$M1F$ aequ. $1F1C$. $1B1C$ aequ. arcui $A1B$ aequ. $A1T$.

fig. 4.

dis, verticem A in ejus vertice habentis) ac denique ordinatae cycloidis ad axem AF, portione $2B2C$, (differentia nempe Ordinatae cycloidis FBC, et circuli FB) comprehensum.

Propositio XII.

„Quaelibet retorta cycloidis segmenti eodem Cycloidis arcu, et recta a vertice sub-
„tensa comprehensi duplum est.

In eadem figura 4. ajo retortam quamcunque, ut $A1B2B2C1CA$ esse duplam segmenti respondentis $A2C1CA$, comprehensi curvae Cycloidis portione $A1C2C$, et subtensa a vertice $A2C$. Ex puncto C. ad rectam AT per verticem A transeuntem plano GH super quo Circulus Cycloidem generans incessit, parallelam ducatur tangens CT, idque in quolibet curvae puncto factum intelligatur. Constat ex iis quae apud doctissimos de Cycloide Scriptores habentur, AT esse ipsi BC semper aequalem. Jam summa om-

12 ex iis: vgl. z. B. J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 70 f. (*WO* I S. 533 f.), u. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, prop. 15, S. 39–42 (*HO* XVIII S. 152–159).

nium $A1T$, $A2T$, aliarumve ad axem $A1F2F$ applicatarum vel in $1B1C$, $2B2C$, aliasve, translatarum, aequatur duplo segmento $A2C1CA$ per prop. 8. Nihil enim refert an axem ipsum attingant applicatae, an vero aliter utcunque in ordinatis, ($1F1C$, $2F2C$, aliisve) sumantur, nempe an transferantur in $1B1C$, $2B2C$. Semper enim eadem manet summa applicatarum, sive area figurae, quemadmodum toties ostensum est ab aliis, et severe demonstrari posset, ex illis quae prop. 6. diximus. Spatium ergo ex omnibus AT in respondentes BC translatis, conflatum, seu retorta $A1B2B2C1CA$, aequatur duplo segmento $A2C1CA$.

Scholium

Hoc theorema quanquam singulare et per totam Cycloidem obtinens nondum apud doctissimos de Cycloide scriptores extare arbitror. Porro quoniam segmentum Cycloidis ut ostendimus aequatur dimidio Retortae cycloidalis; ea autem ex arcubus ad axem applicatis conflatur; (est enim recta $1B1C$ aequalis arcui $A1B$; et recta $2B2C$ aequalis arcui $AL2B$) ideo patet segmentum Cycloidis esse dimidium summae arcuum ad diametrum applicatorum, seu ut quidam vocant, figurae arcuum, cujus curva coincidit cum curva lineae sinuum versorum. Adde infra prop. 48. Ideo quae Circulo est linea sinuum versorum, ea Cycloidi est linea segmentorum. Alia quae ex hoc theoremate duci possent nunc omitto; excepta tantum propositione memorabili, quae jam sequetur.

Propositio XIII.

„Si recta per centrum Circuli generatoris ducta, plano provolutionis parallela, „Cycloidi occurrat; recta alia punctum occursus cum vertice cycloidis jungens seg„mentum abscindet a cycloide, quod erit absolute quadrabile sine supposita cir„culi Quadratura; et quidem aequale semiquadrato radii circuli generatoris.

In eadem figura 4 per D. centrum circuli generatoris ALG ducatur recta DE, plano provolutionis GH parallela, cycloidi occurrens in E. Jungatur vertex A. puncto

16 versorum. | adde infra prop. | 47 *ändert Hrsg.* | *erg.* | Ideo *L* 17 linea *(1)* sinuum *(2)* segmentorum *L*

15 quidam: z. B. J. Wallis, *Epitome binae methodi tangentium*, in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 81 vom 25. März/4. April 1672, S. 4010–4016, insbesondere S. 4012. 18 propositione memorabili: vgl. VII, 4 N. 17 S. 344–346.

occursus E. per rectam AE, ajo segmentum $AE1CA$ absolute quadrari posse, et aequari semiquadrato radii seu triangulo ADL. Hoc ita probatur:

2–553,1 ita | breviter *gestr.* | probatur: *(1)* hoc segmentum cycloidis duplicatum aeqvatur retortae A1BLE1CA per prop. 10. at haec retorta aeqvatur qvadrato radii AD, qvae propositio diserte habetur apud R. P. Honoratum Fabry opusculo eleganti de Linea sinuum et cycloide, (qvod synopsi Geometriae Lugduni editae adjectum est,) prop. 24. num. 3. Qvanqvam obiter tantum ab eo ostendatur, ad tertiam qvam exhibet cycloidis dimensionem absolvendam. Nescio an non et apud Clarissimum Wallisium extet, neqve enim nunc opus eius integrum percurrere vacat; illud certum est ex eius pariter et Pascalii traditis manifeste seqvi. Qvoniam ergo segmentum duplicatum retortae | (ex *(a)* nostris *(b)* prop. 12.) *erg.* |, retorta qvadrato | radii *erg.* | aeqvatur; hinc etiam potuisset ostendi segmentum hoc Cycloidis dimidio qvadrato radii, seu segmentum obliqvum AE1CA, triangulo ADL aeqvale esse. Q. E. D.

Scholium

Primus omnium spatium aliqvod solis rectis et curva cycloidis comprehensum | absolute *erg.* | dimensus est Hugenius. Nam posito A1F esse semiradium, invenit duplum trilinei cycloidalis A1F1CA, seu segmentum rectum M1CAM, aeqvari dimidio hexagono regulari in circulo generatore, descripto, qvemadmodum memorat Pascalius in historia insignium de Cycloide inventorum, qvam exigua scheda complexus est. Ab eo tempore nemo qvod sciam aliam portionem solis rectis et curva cycloidis contentam absolute qvadravit. Mihi vero idem, qvod tot alia praebuit theorema prop. 7. et 8 expressum, hunc qvoqve transitum dedit generalem a segmentis ad retortas, adeoqve absolutam ac sane simplicissimam segmenti obliqvi qvadraturam, qvod dimidio qvadrato radii aeqvari ostensum est. Qvae hoc loco memoratu non indigna videbantur. *(2)* spatium ADE1CA componitur ex segmento cycloidis, AE1CA, triangulo ALE, et triangulo ALD idem spatium ADE1CA componitur ex retorta A1BLE1CA et qvadrante ADL1BA *(a)* Ergo segm AE1CA + triang ALE + triang ALD aeq. retort A1BLE1CA + quad. *(b)* Ergo summa illorum aeqvatur summae horum, segmentum scilicet cum duobus triangulis, retortae cum qvadrante. Retorta autem aeqvatur duplo cycloidis segmento per prop. 12. et triangulum ALE, (cuius altitudo radius AD, basis arcus qvadrantis, LE vel A1BL) aeqvatur qvadranti fit ergo aeqvatio inter segmentum cycloidis, (triangulum ALE id est) qvadrantem, et triangulum ALD ab una parte; et (retortam id est per prop. 12) duplum segmentum cycloidis cum qvadrante ab altera parte; auferendo utrobiqve qvadrantem et segmentum cycloidis semel, fiet triangulum ALD aeqvale segmento cycloidis AE1CA. Qvod erat demonstrandum.

---

4 propositio: H. Fabri, *Opusculum geometricum*, 2. Auflage, 1669, prop. XXIV, § 3, in ders., *Synopsis geometrica*, 1669, S. 385. 9 manifeste seqvi: vgl. J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, § 23, S. 7 u. ders., *Mechanica*, 1670–1671, pars II, cap. V, prop. XX, § B, S. 374 (*WO* I S. 502 u. 805), und Bl. Pascal, *Traitté general de la roulette*, 1658, S. 3 (*PO* IX S. 120). 16 memorat: vgl. Bl. Pascal, *Histoire de la roulette* u. *Historia trochoidis*, 1658, S. 5 (*PO* VIII S. 202 bzw. 217), u. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 69 u. 71 f. (*HO* XVIII S. 204–211).

spatium $ADE1CA$ aequal. s e g m e n t o c y c l o i d i s $AE1CA$ + Triangulo ALE + Triangulo ADL

Triangulo inquam ALE , id est Q u a d r a n t i $A\,D\,L\,1\,B\,A$, quoniam ejus Trianguli altitudo AD est radius, et basis LE. est arcus quadrantis.

Rursus spatium $ADE1CA$ aequal. Q u a d r a n t i $ADL1BA$ + Retortae cycl. $A1BLE1CA$

id est per prop. 12. s e g m e n t o c y c l o i d a l i , $AE1CA$, d u p l i c a t o.

Ergo duos valores ejusdem spatii $ADE1C$ aequando inter se, et utrobique auferendo semel segmentum cycloidale et quadrantem; restabunt illic Triangulum ADL, hic segmentum cycloidale $AE1CA$, aequalia inter se. Q. E. D.

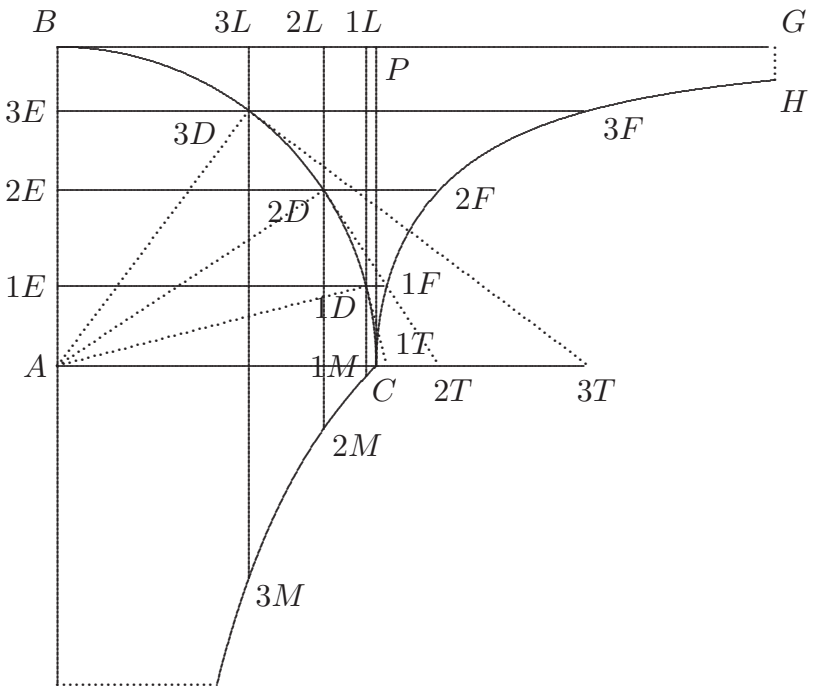
P r o p o s i t i o X I V.

„Figuram angulorum exhibere, sive curvam designare, ex earum numero, quae ana-
„lyticae censentur, ad quam figura constituatur, cujus portiones parallelis com-
„prehensae sint ut anguli, modo portiones axis abscissae sive altitudines, sint ut
„sinus.

Scholium

Retortam A1BLE1CA aeqvari qvadrato radii AD, propositio est qvae diserte habetur apud R. P. Honoratum Fabry opusculo eleganti de Linea sinuum et cycloide, (qvod synopsi Geometriae Lugduni editae adjectum est,) prop. 24. num. 3. Qvanqvam obiter tantum ab eo ostendatur, ad tertiam qvam exhibet cycloidis dimensionem absolvendam. Nescio an non et apud Clarissimum Wallisium extet, neqve enim nunc opus eius integrum percurrere vacat; illud certum est ex eius pariter et Pascalii traditis manifeste seqvi. Qvoniam ergo segmentum duplicatum retortae (ex prop. 12.), retorta qvadrato radii aeqvatur; hinc etiam potuisset ostendi segmentum hoc Cycloidis dimidio qvadrato radii, seu segmentum obliqvum AE1CA, triangulo ADL aeqvale esse. Unde diversarum plane methodorum consensus patet. Caeterum primus omnium spatium aliqvod solis rectis et curva cycloidis comprehensum absolute dimensus est Hugenius. Nam posito A1F esse semiradium, invenit duplum trilinei cycloidalis A1F1CA, seu s e g m e n t u m r e c t u m M1CAM, aeqvari d i m i d i o h e x a g o n o r e g u l a r i in circulo generatore, descripto, qvemadmodum memorat Pascalius in historia insignium de Cycloide inventorum, qvam exigua scheda complexus est. Ab eo tempore nemo qvod sciam aliam portionem solis rectis et curva cycloidis contentam absolute qvadravit. Mihi vero idem, qvod tot alia praebuit theorema p r o p. 7. e t 8 expressum, hunc qvoqve transitum dedit generalem a segmentis ad retortas, adeoqve absolutam ac sane simplicissimam s e g m e n t i o b l i q v i qvadraturam, qvod d i m i d i o q v a d r a t o radii aeqvari ostensum est. Qvae hoc loco memoratu non indigna videbantur. *(3)* spatium *L* 4 AB *L ändert Hrsg.* 14 f. analyticae *(1)* habentur *(2)* censentur *L*

„Sinus arcuum qui arcubus (sive angulis) assumtis complemento sunt ad qua-
„drantem, producantur donec rectae in ipsis inde a diametro sumtae, ipsis et radio
„sint tertiae proportionales; et hoc ubique facto curva per earum rectarum termi-
„nationes transeat, et factum erit quod quaeritur.



[fig. 5]

In fig. 5 sit quadrans $CABDC$ arcus CD, arcus complementi, BD. Ex puncto, D, demittatur in diametrum BE normalis DE, quae sinus est arcus BD, adeoque sinus complementi, arcus CD. Producatur ED usque in F, ita ut recta EDF sit ipsi ED et radio AD tertia proportionalis. Idemque saepe fiat variis sumtis punctis D, ut $1D$, $2D$, $3D$; unde orientur et puncta $1E$, $2E$, $3E$, et puncta $1F$, $2F$, $3F$, aliave, ac curva $C1F2F3F$ etc. erit quaesita. Ajo enim figurae ad hanc curvam et radium AB, consistentis zonas quadrilineas $CAEFC$ esse angulis DAC proportionales, quorum scilicet sinus sunt

6 qvadrans *(1)* ABCDA *(2)* CABDC *L*

6 fig. 5 : Die zugehörige Figur fehlt in der Vorlage; sie wird aus N. 20 übernommen.

rectae EA. id est portio quadrilinea $CA1E1FC$ est ad aliam $CA2E2FC$ ut angulus $CA1D$ est ad angulum $CA2D$.

Demonstratio

Ex punctis D. ducantur tangentes circuli DT, basi quadrantis AC. productae occurrentes in punctis, T. Ajo primum ipsas AT fore ipsis EF respondentibus aequales. Nam ob triangula DEA, ADT, similia erit ED ad DA, ut DA ad AT. id est ipsis ED et radio erunt tertiae proportionales AT, quales esse diximus et EF, ex earum constructione. Hinc eandem curvam $C1F2F3F$ etc. potuissemus alio, quam qui in constructione expressus est modo, producere, perpetua scilicet translatione ipsarum AT, Resectarum per tangentes, ex $A1T2T$. Spatium ergo $CAEFC$ est figura Resectarum ex circulo orta, sumto initio a circuli centro. Hoc autem posito manifestum est ex prop. 7. quadrilineum $CA1E1FC$ esse duplum sectoris $1DAC1D$, et similiter quadrilineum $CA2E2FC$ esse duplum sectoris $2DAC2D$, sunt autem hi duo sectores, adeoque et dupli sectores, inter se ut arcus $1DC$, $2DC$, id est ut anguli $CA1D$, $CA2D$, ergo haec quadrilinea etiam erunt ut hi anguli.

Corollarium

Hinc ducitur spatium figurae angulorum, longitudine infinitum $CABG$ etc. HFC esse ad portionem finitam $CAEFC$ ut angulus rectus BAC, ad obliquum DAC.

Scholium.

Duo sunt in Geometria difficilia tractatu, ratio et angulus; ac sectio anguli pariter ac rationis sive Logarithmi. Anguli enim trisectio problema solidum est, prorsus ac trisectio rationis; et sectio anguli vel rationis in quinque partes problema est sursolidum, et ultra locum conicum excurrit.

Sectionem autem rationis sive Logarithmi idem esse constat, quod inventionem mediarum proportionalium, est enim trisectio rationis, idem quod inventio duarum media-

5 ipsis AF *L ändert Hrsg.* 9 modo, *(1)* generare *(2)* producere *L* 10 ex *(1)* axe A1T2T conjugato ipsi AB. Figura *(2)* A1T2T *L* 18 f. DAC | et videtur angulus rectus respondere spatio absolute interminato, idqve proinde reductum esse ad finitum attamen ob rationem prop. 11. schol. adductam id asserere non ausim. Illud tamen certum est ipsum angulum rectum aut nulli respondere spatio figurae angulorum, aut absolute interminato *erg. u. gestr.* |. Scholium *L*

21 Anguli ... est: Dies wurde erst im 19. Jh. bewiesen.

rum, et sectio rationis in quinque partes aequales est inventio mediarum quatuor. Et bisectio rationis est inventio unius mediae, seu extractio radicis quadraticae quemadmodum contra duplicata ratio est ratio quadratorum, et triplicata cuborum, ex veterum loquendi more, qui plane cum hodiernis per Logarithmos operationibus consentit, duplicatio enim logarithmi quadratum dabit, et triplicatio cubum, et compositio rationum fiet additione Logarithmorum. Fatendum est tamen plurimas hinc nasci aequivocationes (ut hoc obiter dicam) quae nondum assuetos turbant; imo et controversias inter doctos, quemadmodum ex illis patet, quae Wallisius cum Hobbio et Meibomio contulit. Nimirum rationem 9 ad 2. dicimus esse triplam rationis 3 ad 2. rationem vero 27 ad 8. triplicatam rationis 3 ad 2. quod significat logarithmum rationis 27 ad 8. esse triplum Logarithmi rationis 3 ad 2. Unde forte non incongruum foret, saltem aliquando, rationem ut distinguatur a Logarithmo, pro fractione sumere ita ut ratio 3 ad 2. sit $\frac{3}{2}$, nam si alicujus rationis dupla triplave sumatur, revera dupla aut tripla fractionis serviet. Habet tamen haec quoque loquendi ratio incommoda nonnunquam sua. Unde ne quid temere in receptis phrasibus mutemus, suffecerit nos ita loqui ut intelligamur. Et nunc quidem per sectionem rationis, sectionem Logarithmi intelligemus. Notandum est igitur figurae Angulorum respondere figuram rationum seu Hyperbolicam. Nam ex egregio P. Gregorii a S. Vincentio invento constat, res mea sententia non satis pro dignitate aestimata; si abscissae ex asymptoto sint ut numeri, quod portiones quaedam Hyperbolicae erunt ut Logarithmi. Unde vero nascitur elegans figurae angulorum

1 qvatuor. *(1)* Qvemadmodum contra duplicat *(2)* Et *L* 12 ita ... $\frac{3}{2}$ *erg. L* 17 seu Hyperbolicam *erg. L* 18 egregio *(1)*, et non satis pro dignitate aestimato Patris *(2)* P. Gregorii *L* 20 nascitur *(1)* egregius *(2)* elegans *L*

8 contulit: J. Wallis kritisierte die Proportionenlehren von Th. Hobbes, *Elementorum philosophiae sectio prima de corpore*, 1655, cap. XI–XIII, S. 80–105, in J. Wallis, *Elenchus geometriae Hobbianae*, 1655, S. 16–25, sowie von M. Meibom, *De proportionibus dialogus*, 1655, in J. Wallis, *Adversus Marci Meibomii de proportionibus dialogum tractatus elencticus*, 1657 (*WO* I S. 229–290); auf die Erwiderungen von Hobbes antwortete Wallis mit ders., *Due correction for Mr Hobbes*, 1656, S. 61–78; ders., *Hobbiani puncti dispunctio*, 1657, S. 1–9; ders., *Hobbius heauton-timorumenos*, 1662, S. 49–88. Leibniz waren diese Kontroversen bekannt aus Th. Hobbes, *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*, 1668, dialogus quartus, S. 84–102 (*HOL* IV S. 131–161); ders., *De principiis et ratiocinatione geometrarum*, 1668, cap. XI–XVII, S. 20–36 (*HOL* IV S. 413–439). 18 invento: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXV–CXXX, S. 594–597.

et figurae rationum symbolismus. Nimirum si ipsae AT applicentur ad axem BA, seu transferantur in EF, faciunt figuram angulorum ut ostendi, si vero applicentur ad axem conjugatum BL, seu si tranferantur in LM, facient figuram rationum, et terminabuntur in curvam Hyperbolicam $C1M2M3M$, cujus centrum B, vertex C, asymptoti BL, BA; latusque rectum et transversum aequalia. Quemadmodum enim sumto radio BA, sinibus $A1E, A2E$, quadrilinea figurae angulorum, $CA1E1FC$ et $CA2E2FC$, sunt ut anguli ($CA1D$ et $CA2D$) ita BA seu BP eodem radio, pro unitate sumto, numerisque positis, $B1L$, $B2L$, erunt quadrilinea Hyperbolica $CP1L1MC$ et $CP2L2MC$, ut rationum (quas illi numeri ad unitatem habent) indices, sive Logarithmi. Unde si esset exempli causa numerus $B2L$ cubus a $B1L$ (nam in fractionibus, quales sunt hi numeri hoc casu, quippe minores unitate BA, potestates sunt lateribus minores) foret ipsius $\langle CP2\rangle L2MC$ area tripla areae ipsius $CP1L1M\langle C\rangle$.

Definitiones.

Curvam Analyticam voco cujus puncta omnia calculo analytico exacto possunt inveniri. Ut si sit curva $1C2C3C$ (in fig. 6. 7. 8.) et quaeratur aliquod ejus punctum, ut $1C$, id est si sumta recta quadam $A1B$, indeque educta ex puncto $1B$ recta $1B1C$, angulo dato $A1B1C$ quaeratur an, et ubi recta $1B1C$, ipsi curvae occurrat in puncto $1C$, ita scilicet, ut inveniri possit punctum hoc $1C$, etiamsi nondum descripta sit curva. Hoc igitur si per calculum praestari possit, id est si talis nota sit curvae proprietas, per quam ex data $A1B$, calculo quodam exacto definiri possit longitudo ipsius $1B1C$; curva vocabitur Analytica. Calculus autem analyticus exactus ille vocatur, cum quantitas quaesita ex datis inveniri potest ope aequationis, in qua ipsa quantitas quaesita

15 *Am Rand:* fig. 6
7
8

1 symbolismus | , cuius ⟨inventionem Tschirnhausius — nobilis⟩ e ⟨Lusatia⟩ | amicus *erg.* | juvenis, in his studiis praeclare versatus *gestr.* |. Nimirum *L* 8 Hyperbolica *(1)* 1M1L2L2M1M, et 2M2L3L3M2M *(2)* CP1L1MC *L* 10 numerus *erg. L* 10 hoc casu *erg. L* 11 foret | ipsius *erg.* | *(1)* 2M2L3L3M2M area tripla areae ipsius 1M1L2L2M1M *(2)* ⟨CP2⟩L2MC *L*

26 Tschirnhausius: vgl. Tschirnhaus an Pieter van Gent, 6. November 1675 (Amsterdam *Universiteitsbibliotheek* MS IIA38, S. 12 f.), und VII, 3 N. 52 S. 701 Fig. 2.

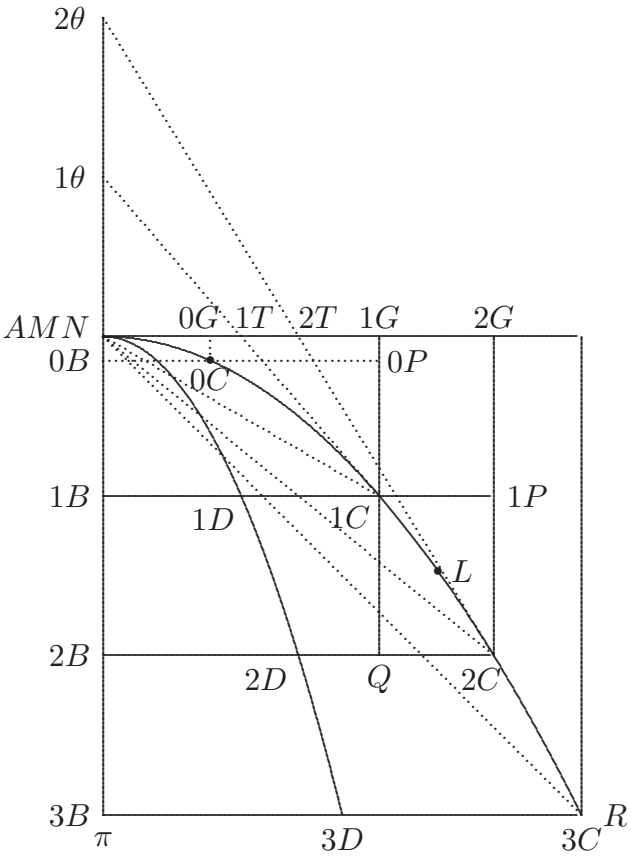


fig. 6.

incognitae locum obtinet. Nam quando problemata ad hunc sunt reducta statum, tunc tractabilia sunt reddita, eaque resolvere est in potestate.

Et hinc fit ut lineae curvae analyticae, sint loca: loca, inquam punctorum, quibus rectae ad alias rectas certam quandam relationem situs magnitudinisque habentes terminantur, Ut si assumtum sit punctum fixum A, in recta interminata vel indefinita $A1B2B$ etc. et ex hac recta velut axe vel directrice (quemadmodum supra definivimus) abscissae sumantur $A1B$, $A2B$, aliaeve quaecunque, atque inde educantur ordinatae $1B1C$, $2B2C$, $3B3C$, ad curvam $1C2C3C$, angulo ABC quolibet, semper tamen eodem, (ut hoc loco, recto,) sitque natura curvae talis, ut rectangulum $\pi A1B$ sit aequale quadrato $1B1C$, et rectangulum $\pi A2B$ aequale quadrato $2B2C$, tunc curva erit illa quam vocant Parabolam:

9 semper tamen eodem, *erg. L*

10 $\pi A1B$: Leibniz hat im Text ursprünglich die Punktbezeichnung P verwendet und dann unvollständig zu π geändert. Im Folgenden wird daran angeglichen.

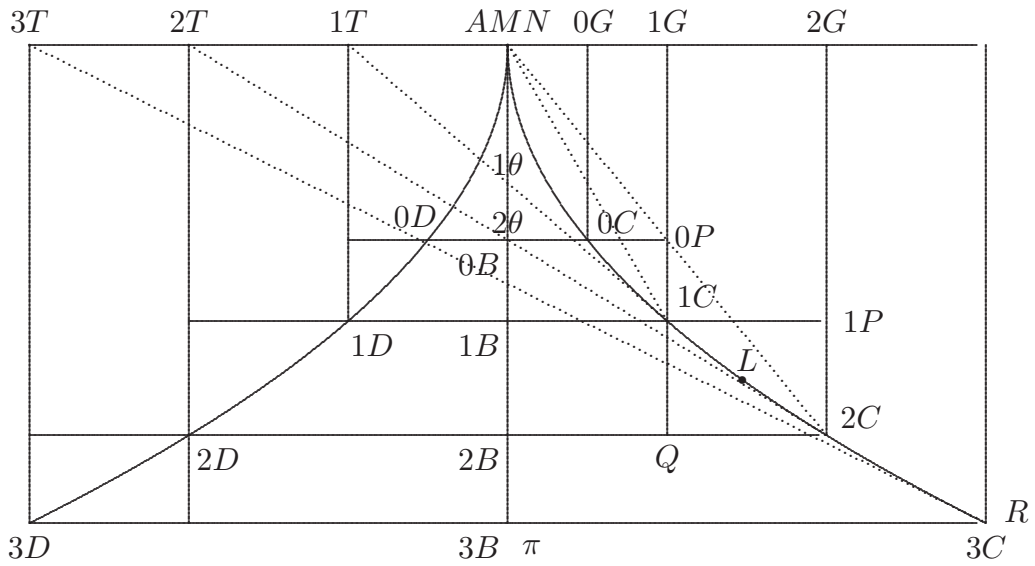


fig. 7.

et relatio inter BC et AB, sibi respondentes aequatione sic poterit explicari: quoniam puncta A. et π sunt fixa, ideo rectam quoque constantem habebimus, $A\pi$, qualem in Parabola P a r a m e t r u m vocant, (quam appellationem ad alias quoque curvas producere hic non inutile erit). Hanc Parametrum $A\pi$, appellabimus, p. Abscissam vero $A1B$ vel $A2B$ etc. generaliter AB, vocabimus y, et ordinatam $1B1C$, vel $2B2C$ etc. generaliter BC, vocabimus, v.

$$A\pi \text{ aeq. } p \qquad AB \text{ aeq. } y \qquad BC \text{ aeq. } v.$$

Eritque rectangulum $\pi A1B$ vel $\pi A2B$, id est sub πA in $A1B$, quod Vietae et Cartesii more ita scribemus, py; aequale quadrato a BC, id est ipsi v^2; et aequatio ita stabit:

$$py \text{ aeq. } v^2.$$

Iisdem literis retentis, lineisque, et mutata tantum curvae natura, si esset rectangulum solidum sub quadrato ipsius parametri πA, in abscissam AB ducto aequale Cubo ab ordinata BC, foret aequatio curvae naturam explicans

$$p^2y \text{ aeq. } v^3.$$

quod curvae genus Parabolam vocant cubicam; ut enim i n P a r a b o l a C o n i c a

13 parametri *erg. L* 15 f. v^3. *(1)* et si esset rectangulum sol *(2)* qvod *L*

4 vocant: Auf den durch Cl. Mydorge, *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis libri primus et secundus*, 1631, S. 3, eingeführten Begriff des Parameters verweist Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 208.

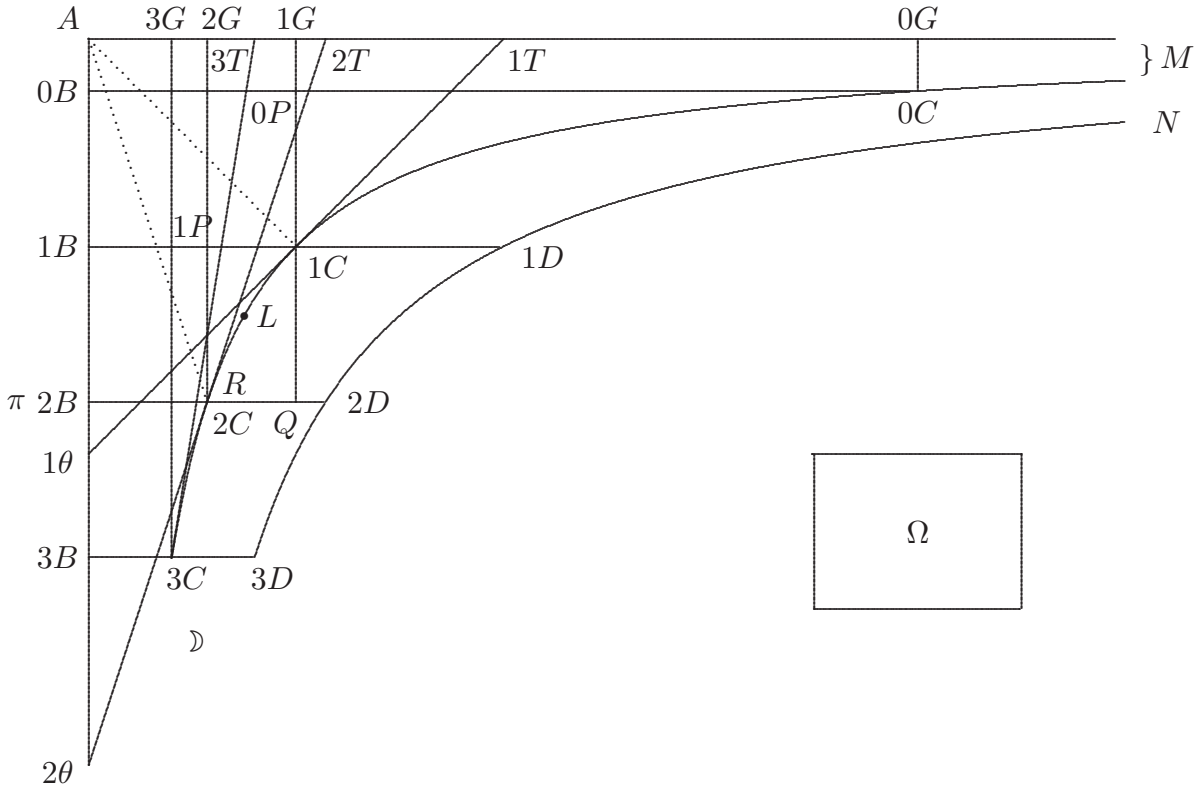


fig. 8.

seu Quadratica ipsae abscissae $A1B$, $A2B$, vel ordinatae conjugatae $1G1C$, $2G2C$; id est ipsae y; sunt in duplicata ratione ipsarum ordinatarum $1B1C$, $2B2C$, vel abscissarum conjugatarum $A1G$, $A2G$; sive ipsae diversae py (alia atque alia linea pro y vel AB sumta) id est omissa communi altitudine, p vel πA, ipsae y. sunt inter se, ut ipsarum v, ipsis respondentium quadrata seu ut v^2: ita in Parabola Cubica, ipsae AB vel GC, sive y, sunt ut v^3, id est ut cubi ipsarum BC vel AG, sive ipsarum v; vel quod idem est ipsae y sunt in triplicata ipsarum v ratione.

Si aequatio esset p^3y aeq. v^4, forent ipsae y in quadruplicata ratione ipsarum v, sive ut quadrato-quadrata, id est si $A1B$, et $A2B$, essent inter se ut duo numeri, ipsae $1B1C$, $2B2C$ forent inter se ut duorum illorum numerorum quadrato-quadrata. Et talem curvam appellant Parabolam Quadrato-quadraticam. Tametsi autem nulla extet in rerum natura dimensio altior solida, nec proinde inveniri possit spatium quadrato-quadraticum, numeri tamen sunt quadrato-quadrati, et rationes quadruplicari possunt. Quare lineae istae curvae non sunt imaginariae, quarum ordinatae procedunt ut

8 ipsae y sunt *erg. L* 15 curvae *erg. L*

Quadrato-quadrata abscissarum; praesertim cum, si opus esset, motu continuo describi hae curvae in plano possint; quod demonstrare non difficile est. Idemque in altioribus dimensionibus locum habet.

Aliis etiam multis modis fieri potest, ut aequatione exprimatur Curvae natura, ut si a puncto π fixo ductae rectae $\pi 1C$, $\pi 2C$ ad curvam sint inter se aequales, erit semper quadratum a $\pi 1B$, cum quadrato a $1B1C$, aequale quadrato $\pi 1C$, id est (si curva perveniat usque in A,) quadrato πA, et sic curva $A1C2C$ etc. erit circumferentia circuli centro π, radio πA descripta, unde etiam haberi poterit curvae aequatio; est enim $A1B$ aeq. y. ex hypothesi[,] ergo $\pi 1B$ erit $p - y$, ejusque quadratum $p^2 - 2py + y^2$ quod additum quadrato ab $1B1C$, id est ab v, dabit $p^2 - 2py + y^2 + v^2$, aequale quadrato radii $\pi 1C$, vel πA, id est ipsi p^2, fietque $p^2 - 2py + y^2 + v^2$ aeq. p^2, et sublato utrinque p^2, fiet $-2py + y^2 + v^2$ aequale 0, sive nihilo: et transponendo v^2 aeq. $2py - y^2$, sive v^2 aeq. rectangulo ex $2p - y$, in y, vel quadratum $1B1C$. aeq. rectangulo $Q1BA$ sive rectangulo sub QA (id est dupl. $A\pi$, sive $2p$, demta $A1B$, sive y) in $A1B$ (id est in y.) quod in circulo ita esse constat. Quae hoc loco ideo adjicienda putavi, quoniam video multos in Geometria satis versatos, curvarum tamen expressionibus analyticis assuetos non esse.

Curvam Analyticam simplicem voco, in qua relatio inter ordinatas et portiones ex axe aliquo abscissas, aequatione duorum tantum terminorum explicari potest; sive in qua ordinatae earumve potentiae, sunt in multiplicata, aut submultiplicata directa, aut reciproca ratione; abscissarum, potentiarumve ab ipsis, vel contra. Talis fuit Curva parabolae Conicae sive Quadraticae, Cubicae item et Quadrato-quadraticae explicata definitione praecedenti, quia ipsae y sunt in duplicata, triplicata vel quadruplicata ratione ipsarum v. et ipsae v. contra sunt in subduplicata, subtriplicata vel subquadruplicata ratione ipsarum y.

Si aequatio curvae naturam explicans sit py^2 aeq. v^3, sive si rectangulum solidum sub πA in quadr. $A1B$ aeq. cubo a recta $1B1C$ et eodem modo rectang. solid. sub πA in

13 f. rectangulo sub *erg. L* 14 f. qvod ... constat *erg. L* 16 versatos, *(1)* hanc tamen partem de curvarum expressionibus analyticis *(a)* vix *(b)* non attigisse *(2)* curvarum *L* 17 voco *(1)* in *(2)* cuius natura ita explicari potest, ut aeqvatione duorum tantum terminorum *(3)* , in *L* 18 abscissas, *(1)* relatio *(2)* aeqvatione *L* 25 f. solidum sub *erg. L* 26 cubo *(1)* ab 1B1C, erunt qvadrata ab y, ut cubi ab v. *(a)* seu qvadrata ab y. in subduplicata *(b)* seu ipsae y in subduplicata ratione cuborum ab v; vel ipsae v in subtriplicata et si variare enuntiationem velis erunt ipsae y diversae, inter se (A1B et A2B) ut in subduplicata ratione cuborum ab v ipsis respondentibus *(aa)* (seu ab B *(bb)* seu ut radices qvadraticae *(2)* a recta 1B1C et | eodem modo *erg.* | rectang. *L*

quad. $A2B$, aeq. cubo a $2B2C$, erit rectang. solid. sub πA in quad. $A1B$. ad rectang. solid. sub πA in quad. $A2B$ id est (omissa communi altitudine πA) quadratum $A1B$, ad quad. $A2B$. ut Cubus a $1B1C$ ad Cubum a $2B2C$. sive quadrata ab i n d e t e r m i n a t i s AB vel y, erunt ut Cubi ab indeterminatis v vel BC ipsis respondentibus.

Potest etiam variari enuntiatio, nam dicere hoc casu licebit, esse ipsas y in subduplicata ratione cuborum ab v, seu ut sunt radices quadraticae ex v^3. (quoniam y^2 aeq. $\frac{v^3}{p}$. ergo y aeq. $\sqrt{\frac{v^3}{p}}$.) item erit y ad v in subduplicata ratione v ad p. (nam y aeq. $\sqrt{\frac{v^3}{p}}$. Ergo y aeq. $v\sqrt{\frac{v}{p}}$. seu $\frac{y}{v}$ aeq. $\sqrt{\frac{v}{p}}$.) vel v ad p in duplicata ratione y ad v (nam $\frac{y^2}{v^2}$ aeq. $\frac{v}{p}$) vel etiam erunt diversae v inter se in subtriplicata ratione quadratorum a respondentibus y (nam v aeq. $\sqrt{③}\, py^2$.) ipsa enim recta constans seu parameter, p. tametsi in aequatione adhibeatur, ad homogeneorum ut vocant, legem explendam; in analogia tamen diversarum y. ad diversas v explicanda negligi potest et destruitur, cum in utroque semper termino, antecedente scilicet vel consequente reperiatur. Haec curva autem, cujus aequationem hoc loco exempli causa explicui etsi ad gradum Cubicum ascendat non est tamen parabola cubica (cujus aequatio esset p^2y aeq. v^3). Celebris est inter Geometras nostri temporis, quoniam prima omnium curvarum analyticarum absolutam in rectum extensionem admisit, nec minorem inter eruditos Anglos Batavosque de inventionis jure controversiam excitavit, quam quae de maris libertate aut imperio inter duas gentes agitabatur.

11 f. in *(1)* ratione tamen, *(2)* analogia tamen *(a)* relationem *(b)* diversarum y. *(aa)* vel diversarum v. explicanda *(bb)* ad *L* 15 aeq v^3.) *(1)* sed a doctissimo Wallisio appellatur semi-Cubica. Est autem *(a)* ⟨— —⟩ *(b)* celebris *(2)* Celebris *L* 18 aut imperio *erg. L*

---

18 controversiam: Die Rektifikation der semikubischen Parabel gelang H. v. Heuraet in den Niederlanden und W. Neile in England fast gleichzeitig; vgl. H. v. Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520; J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 90–98 (*WO* I S. 550–555). Nachdem Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 71 f. (*HO* XVIII S. 209–211), das Resultat allein für Heuraet reklamierte, protestierten J. Wallis, W. Brouncker u. Chr. Wren mit in den *Philosophical Transactions* VIII, Nr. 98 vom 17./27. November 1673, S. 6146–6150, abgedruckten Briefen. Die Kontroverse fiel in die Zeit des dritten englisch-niederländischen Krieges (1672–1674).
21 appellatur: J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 95 (*WO* I S. 553).

Hactenus non nisi illarum curvarum analyticarum simplicium exempla attuli, in quibus directa est analogia ordinatarum et abscissarum, quae curvae a quibusdam Paraboloides appellari solent, quoniam omnium simplicissima est Parabola communis sive conica; restat ut illarum quoque exempla afferamus, quas Hyperboloides vocant, in quibus analogia est reciproca; seu in quibus ordinatae earumve potentiae sunt in ratione multiplicata aut submultiplicata, reciproce, rationis abscissarum aut potentiarum ab abscissis vel contra. Harum prima species est ipsa Hyperbolica Conica sive communis, in qua (inspice fig.: ...) ipsae y sunt ut ipsae v, reciproce; seu $A1B$ est ad $A2B$, ut $2B2C$ ad $1B1C$. id est ex natura Hyperbolae rectangulum $A1B1C$ aequale est rectangulo $A2B2C$, ideo etiam porro unumquodque ex his rectangulis aequabitur quadrato constanti ex AP, sive erit yv aeq. p^2.

Si curva esset una ex genere altiorum Hyperboloidum, eodem modo reciproca fieret ratio ab abscissis et ordinatis. Exemplum esto Hyperbola Cubica, cujus aequatio est y^2v aeq. p^3, in qua rectangulum solidum factum sub quadrato ab AB vel GC, in ipsam BC vel AG ducto, aequatur cubo a parametro seu recta constante AP. Ergo ejusmodi rectangula solida plura aequabuntur inter se, exempli causa, quad. ab $A1B$ in ipsam $1B1C$, aeq. quad. ab $A2B$ in ipsam $2B2C$. Ergo $1B1C$ ad $2B2C$ ut quad. ab $A2B$ ad quad. ab $A1B$ seu ordinatae BC erunt reciproce in duplicata ratione abscissarum AB, vel ordinatae GC erunt reciproce in subduplicata ratione abscissarum AG. Unde patet hanc curvam ordinatas habere ordinatis Parabolae communis reciprocas, nec ineleganter a R. P. Berthet e Soc. Jes. multiplicis doctrinae viro, et in his quoque studiis eximio Antiparabolam appellari.

His ita intellectis omnium curvarum Analyticarum simplicium Catalogum subjiciemus:

2 est *(1)* ratio *(2)* analogia *L* 9 rectangulum *(1)* A1B1C1G aeqvale est rectangulo A2B2C2G, vel A3B3C3G *(2)* A1B1C *L* 11 f. aeq. p^2. *(1)* Unde seqvitur ordinatas esse abscissis reciprocas. Nam 1B1C aeq. $\frac{p^2}{A1B}$ qvia rectangulum *(a)* A1B1C1G *(b)* A1B1C aeqvale qvadrato AP, erit A1B ad AP ut AP ad 1B1C. et *(aa)* rursus *(bb)* eodem modo A2B ad AP ut AP ad 2B2C. Ergo A1B ad A2B ut *(2)* Si *L* 12 f. Hyperboloidum, *(1)* exempli gratia Hyperbola Cubica, ut vocant; *(2)* eodem ... ordinatis *(a)* , ut in *(b)* Exemplum *L* 21 Ies. *(1)* omnigenae *(2)* multiplicis *L*

8 fig.: ... : s. fig. 8. 22 appellari: vgl. VII, 5 N. 64 u. III, 1 N. 76.

Tabula Aequationum pro Curvis Analyticis simplicibus, quarum ordinatae (vel abscissae) v earumve potestates, sunt in abscissarum (vel ordinatarum) y, ratione multiplicata quacunque, directa aut reciproca:

			Aequationes Paraboloidum		
ubi ordinatae vel earum potestates	in ratione directa	simplici	duplicata	triplicata	quadruplicata
ordinatae ipsae		v aeq. y	pv aeq. y^2	p^2v aeq. y^3	p^3v aeq. y^4
earum quadrata		v^2 aeq. py	v^2 aeq. y^2	pv^2 aeq. y^3	p^2v^2 aeq. y^4
cubi		v^3 aeq. p^2y	v^3 aeq. py^2	v^3 aeq. y^3	pv^3 aeq. y^4
quadrato-quadrata		v^4 aeq. p^3y	v^4 aeq. p^2y^2	v^4 aeq. py^3	v^4 aeq. y^4
etc.					
			Aequationes Hyperboloidum		
	in ratione reciproca				
ordinatae		vy aeq. p^2	vy^2 aeq. p^3	vy^3 aeq. p^4	vy^4 aeq. p^5
earum quadrata		v^2y aeq. p^3	v^2y^2 aeq. p^4	v^2y^3 aeq. p^5	v^2y^4 aeq. p^6
cubi		v^3y aeq. p^4	v^3y^2 aeq. p^5	v^3y^3 aeq. p^6	v^3y^4 aeq. p^7
quad.-quadrata		v^4y aeq. p^5	v^4y^2 aeq. p^6	v^4y^3 aeq. p^7	v^4y^4 aeq. p^8
etc.					

Quae Tabula in infinitum continuari potest, tantum notandum est redire in ea easdem saepe curvas alio schemate tectas, duas ob causas, scilicet ob permutationem; et ob depressionem. Ob p e r m u t a t i o n e m fit ut omnes bis occurrant, nempe sumendo v antea ordinatam nunc pro abscissa, et y antea abscissam nunc pro ordinata, ut in fig. [6]. et [8]. Si eadem sit curva $A1C2C3C$ figurae utriusque axisque $A1B2B$ directus figurae unius fiat $A1G2G$ conjugatus figurae alterius, et $A1B$ unius transeat in $A1G$ alterius, et ita caetera quoque permutata intelligantur, patet si AB vel GC appelletur y, et BC vel

3 f. reciproca: *(1)* ordinatae in abscissarum ratione directa v aeq. y earum qvadrata cubi qvad. qvadrata etc. *(2)* Aeqvationes *L* 12 f. etc. *(1)* Aeqvationes Hyperboloidum ubi ordinatae vel earum potestates in ratione reciproca simplici duplicata triplicata *(2)* Aeqvationes *L*

AG, v, in una pariter ac in altera, aequationem curvae naturam explicantem inversum iri, et ex. gr. pro py aeq. v^2 nos habitur⟨os⟩ pv aeq. y^2. eadem licet manente curva.

Ob d e p r e s s i o n e m quoque eadem curva saepius occurrit, quoniam saepe aequatio ad minores terminos reduci potest, ut aequatio v^3 aeq. y^3 coincidit cum hac v aeq. y. et v^4 aeq. p^2y^2 cum hac v^2 aeq. py. et aequatio v^2y^4 aeq. p^6 cum hac vy^2 aeq. p^3.

C u r v a A n a l y t i c a R a t i o n a l i s est cujus axis ita sumi potest, ut sit ordinata rationalis posita abscissam et parametros, esse rationales; id est ut abscissa et parametris in numeris datis etiam ordinata in numeris haberi possit. Talis est parabola fig. 6. $A1C2C3C$ cujus vertex A, pro axe sumatur non AB, (quae vulgo dicitur Axis Parabolae) sed AG quae parabolam in vertice tangit, ita ut abscissae AG sint v, et ordinatae GC sint, y. latus rectum, vero p: ex natura parabolae est py aeq. v^2 ergo y aeq. $\frac{v^2}{p}$. seu ordinata, y, aequalis quadrato ab abscissa, v, diviso per parametrum, p adeoque ex data abscissa et parametro, ordinata parabolae ad tangentem verticis in numeris haberi potest. De ordinata vero BC ad ipsam $A1B2B$ in fig. [6]. ducta id non successisset. In Hyperbola nec axis, nec tangens verticis sumi debet, sed asymptotos. Nam si in fig. [8]. curva $1C2C3C$ sit Hyperbola, et alterutra ex asymptotis pro axe ordinatarum sumatur, ordinata semper est rationalis, ex abscissa et parametro rationalibus. Nam si AB sit y. et BC sit v, et $A\pi$ vel πR. parameter sit p vertex autem Hyperbolae R. centrum A, tunc constat esse rectangulum ABC aequale quadrato a πR, vel $A\pi$. sive esse ut diximus, vy aeq. p^2. ergo v aeq. $\frac{p^2}{y}$. contra abscissa AG, v. ordinata GC, y, erit y aeq. $\frac{p^2}{v}$. Utroque ergo casu ordinatae valor pure ac rationaliter inveniri potest; et figura proinde Hyperbolae est rationalis.

In Circulo et Ellipsi impossibile est axem ita assumi, ut ordinatae fiant rationales. Circulus itaque et Ellipsis e figurarum rationalium numero non sunt. Porro etiam Parabola Cubica, et Quadrato-quadratica, et sursolida, aliaeque in infinitum Paraboloides sunt rationales; quarum aequationes sunt p^2v aeq. y^3. (vel p^2y aeq. v^3) sive v aeq. $\frac{y^3}{p^2}$: et p^3v aeq. y^4 sive v aeq. $\frac{y^4}{p^3}$ et p^4v aeq. y^5, sive v aeq. $\frac{y^5}{p^4}$. Et ex Hyperboloidibus

1 una *(1)* , contrarium eventurum in altera *(2)* pariter *L* 9 fig. . . . *erg. L, ändert Hrsg.* 18 |AP *ändert Hrsg.*| vel *erg. L* 18 centrum A, tunc *erg. L* 21 et *(1)* curva *(2)* figura *L* 24 e *(1)* curvarum *(2)* figurarum *L*

eae quoque sunt rationales quae paraboloidum rationalium reciprocae sunt, ut quarum aequationes, y^2v aeq. p^3, sive v aeq. $\frac{p^3}{y^2}$. item y^3v aeq. p^4. sive v aeq. $\frac{p^4}{y^3}$. et ita porro.

Breviter, omnes illae curvae Analyticae simplices rationales sunt, quarum aequationes in Tabula Curvarum simplicium lineis parallelis horizontalibus aut perpendicularibus, inclusae visuntur. Ex aequationis autem, Curvae analyticae naturam et relationem ad aliquem axem explicantis, forma statim agnosci potest, an curva secundum axem qui assumtus est, aut ejus conjugatum sit rationalis: nimirum si aequatio ad eam reduci potest formam, ut alterutra indeterminatarum v, vel y. ad nullam ascendat potestatem; unde valor ejus statim pure inveniri potest, sine ulla radicum extractione.

Non autem nisi duae sunt lineae in natura rerum, quae secundum utrumque conjugatorum axium ordinatas habeant rationales; recta scilicet et ex curvis, Hyperbola quod satis memorabile est. Unde illud quoque dicere ausim, post lineam rectam, ipsam Hyperbolicam esse si expressionem analyticam spectes simplicissimam omnium linearum; quemadmodum, Circularis, si constructionem Geometricam intueare omnium post rectam linearum simplicissima est. Unde ex transcendentibus quoque curvis, Logarithmica quoad expressionem, cycloeides quoad constructionem simplicissima videri potest, quarum illa ex Hyperbola haec ex circulo; illa ex rationibus haec angulis in spatio expressis oritur.

Porro figurae rationales hanc habent praerogativam insignem, ut vel exacte, vel certe Arithmetice, sive per seriem numerorum rationalium infinitam quadrari facilius possint. Et alioqui Analysis transcendens in ipsis est perfectior. Hujus autem artificii specimen primus ni fallor edidit Vicecomes Brounker Societatis Regiae Anglicae Praeses dignissimus in quadam Hyperbolae portione. Secutus paulo post Nicolaus Mercator Holsatus ex eadem Regia Societate elegantem admodum rationem attulit a priore plane diversam, qua portio quaelibet Hyperbolae serie infinita exprimi potest. Neuter autem, quanquam posset, rem produxit longius. Credo quod curvae rationales altiores tanti non viderentur.

10 sunt *(1)* curvae *(2)* lineae *L* 13 omnium *(1)* curvarum *(2)* linearum *L* 18 f. oritur. *(1)* Qvoniam autem circulus modo est rationalis, qvocunqve demum ex axe assumto, hinc *(2)* Porro *L* 20 f. qvadrari | facilius *erg.* | possint. | Et ... perfectior *erg.* | *(1)* Hoc *(2)* Huius *L* 24 a ... diversam *erg. L*

22 edidit: W. Brouncker, *The squaring of the hyperbola*, in: *Philosophical Transactions* III, Nr. 34 vom 23. April/3. Mai 1668, S. 645–649. 24 attulit: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XVII, S. 31–33 [Marg.]; vgl. VII, 4 N. 3_1 S. 50 f.

Mihi vero feliciter accidit, ut theorema prop. 7. hujus traditum curvam daret rationalem simplicis admodum expressionis; circulo aequipollentem; unde nata est Quadratura Circuli Arithmetica, et vera expressio Analytica Arcus ex tangente, cujus gratia ista conscripsimus. Inde porro investigans Methodum reperi generalem admodum et pulchram ac diu quaesitam, cujus ope datae cuilibet Curvae analyticae, exhiberi potest Curva analytica rationalis aequipollens, re ad puram analysin reducta.

Propositio XV.

„In Curva Analytica simplice $1C2C3C$ (fig. 6. 7. 8.) $B\theta$ portio axis inter θ occur-
„sum tangentis $C\theta$ et B occursum ordinatae CB intercepta, est ad AB abscissam, ut
„exponens dignitatum ab ordinatis quem imposterum vocabimus ω, ad, e, exponen-
„tem dignitatum ipsis proportionalium ab abscissis. Dignitatem vocant quantitatem
„ipsam, aut aliquam ejus potentiam. Porro in directis ut fig. 6. et 7. punc-
„tum occursus tangentis, θ, sumendum est ab ordinata BC, versus verticem A; in
„reciprocis vero, fig. 8. in partes contrarias.

Hoc theorema notum jam est Geometris, et sive calculo sive ductu linearum variis modis demonstrari potest. Sed quoniam ejus demonstratio multo opus haberet apparatu, et vero jam occupata haec provincia est a doctissimo Geometra Michaele Angelo Riccio, in exercitatione edita de maximis et minimis illuc potius remittere lectorem placuit, quam

5 f. *Am Rand:* ℜ

4 f. ac diu qvaesitam *erg. L* 7–9 reducta. | Qvod hujus methodi fastigium est. Qvantae autem ista sint difficultatis sciunt qvi problemata *(1)* methodi tangentium inversae *(2)* hujusmodi inversa tractavere | qvae etiam Cartesius nondum in potestate esse fassus est *erg.* | ; cuius | methodi *erg.* | portio qvaedam est haec nostra. Sed nunc institutum proseqvamur *gestr.* | Propositio XV. *(a)* In curva Analytica simplice, si exponens dignitatis secundum qvem multiplicata est ratio ordinatarum, v, sit ad exponentem dignitatis secundum qvem multiplicata est ratio abscissarum, y, ut numerus, ω, ad numerum, e, *(b)* In curva Analytica simplice portio axis A1B inter θ occursum t *(c)* „In *L*

19 edita: M. Ricci, *Exercitatio geometrica*, 1668, theorema tertium, S. 7 f.; vgl. VII, 4 N. 3_2.
23 fassus: R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 411 f. (*DO* II S. 514).

aliena et jam nota Geometris, prolixe exscribere, aut eadem aliter tentando, actum agere. Exemplis tantum allatis rem explicare necesse erit, ut ab omnibus intelligatur.

Dignitates	Latus	Quadratum	Cubus	Quadrato-quadratum
ut:	y	y^2	y^3	y^4
Exponentes	1	2	3	4

Si figura 6. Curva sit parabola quadratica sive Conica, et quadrata ad ordinatis BC, sint proportionalia ipsis abscissis AB, patet exponentem quadratorum esse 2, ipsarum abscissarum 1. et erit θB ad AB ut 2. ad 1. in Parabola Cubica, (ubi ordinatarum Cubi ut abscissae,) erit ut 3 ad 1, in quadrato-quadratica ut 4 ad 1. etc. In Parabola semicubicali, ut vocat Wallisius (de qua supra cum Curvam Analyticam simplicem definivimus,) in qua scilicet Cubi ordinatarum BC, ut quadrata abscissarum AB, erit θB ad AB ut 3 ad 2.

Si easdem figuras invertamus, ut in fig. 7. ordinatasque in tangentem verticis ducamus, tunc quae est AB figurae 6. aequalis erit ipsi BC figurae 7 et contra. Unde etiam contrario modo, in Parabolis Quadratica, Cubica, Quadrato-quadratica, etc. erunt ordinatae ut quadrata, cubi, quadrato-quadrata, etc. abscissarum, sive in ratione abscissarum duplicata, triplicata, quadruplicata, et exponens dignitatum ordinatarum, erit 1[,] dignitatum vero proportionalium ab abscissis, 2 vel 3 vel 4 etc. eritque θB ad AB ut 1 ad 2. vel 1 ad 3. vel ut 1 ad 4. etc. pro Parabolae gradu. Si Parabola figurae ejusdem 7 esset semicubicalis, seu quadrata ordinatarum BC ut cubi abscissarum AB foret θB ad AB ut 2 ad 3.

Denique si ut in fig. 8. curva sit ex reciprocarum numero, idem obtinebit; et in hoc solo erit discrimen, quod ex. gr. punctum θ non a puncto $1B$ versus A verticem, sed, ut propositio quoque admonuit, in contrariam partem sumetur; quod ex ipsa harum

1 prolixe *(1)* | ⟨ex aliis⟩ *erg.* | describere *(2)* exscribere *L*

3–5 *(1)* Exponentes 1 2 3 4
Dignitates latus q
(2) Exponentes 1 2 3 4
Dignitates Latus Qvadratum Cubus
(3) Dignitates. latus qvadratum. cubus. Qvad. qvadra
(4) Dignitates ... 4 *erg. L*

10 vocat: J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 95 (*WO* I S. 553); supra: s. o. S. 561 Z. 25 – S. 562 Z. 19.

curvarum constitutione patet. Proportio autem eadem erit, ut in Hyperbola simplice sive Conica vel Quadratica, cujus centrum A, Asymptoti AB, AG, ubi abscissae sunt in ratione ordinatarum licet reciproca, exponens dignitatis abscissarum aequabitur exponenti dignitatis ordinatarum, erunt ergo ut 1. ad 1, adeoque etiam BA aequalis erit ipsi $B\theta$. Si esset Hyperbola proxime altior (quam supra Antiparabolam vocavimus) forent reciproce, quadrata ordinatarum ut abscissae; vel contra si curva sit inverse sumta, erunt reciproce quadrata abscissarum ut ordinatae, priore casu $B\theta$ erit dupla, posteriore dimidia ipsius AB prorsus ut in Parabola, nisi quod ipsa $B\theta$ in reciproca sive Antiparabola in contrarias partes sumitur.

Generaliter ergo loquendo si sit curva ex numero directarum, et abscissa sit y. ordinata v, parameter p, ut ante, sitque dignitas ordinatarum ω, abscissarum, e, adeoque aequatio curvae analyticae directae simplicis, sit

	$p^{\omega-e}y^e$	aeq. v^ω	in fig. 6. AB aeq. y. BC aeq. v.	erit θB ad AB
veluti	py	aeq. v^2	si ω aeq. 2 et e aeq. 1	ut 2 ad 1
vel	p^2y	aeq. v^3	si ω aeq. 3 et e aeq. 1	ut 3 ad 1
vel	p^3y	aeq. v^4	si ω aeq. 4 et e aeq. 1	ut 4 ad 1
vel	py^2	aeq. v^3	si ω aeq. 3 et e aeq. 2	ut 3 ad 2
vel	py^3	aeq. v^4	si ω aeq. 4 et e aeq. 3	ut 4 ad 3
	etc.			
Sin aequatio sit	y^e	aeq. $p^{e-\omega}v^\omega$	in fig. 7, AB aeq. y. BC aeq. v.	erit θB ad AB
veluti	y^2	aeq. pv	si ω aeq. 1 et e aeq. 2	ut 1 ad 2
vel	y^3	aeq. p^2v	si ω aeq. 1 et e aeq. 3	ut 1 ad 3
vel	y^4	aeq. p^3v	si ω aeq. 1 et e aeq. 4	ut 1 ad 4
vel	v^3	aeq. py^2	si ω aeq. 2 et e aeq. 3	ut 2 ad 3
vel	v^4	aeq. py^3	si ω aeq. 3 et e aeq. 4	ut 3 ad 4
	etc.			

11 diameter p *L ändert Hrsg.* 12 aeqvatio | generalis *gestr.* | curvae *L* 20 *(1)* Eademqve obtinebunt in fig. *(a)* 6 *(b)* 7. ponendo tantum y in locum v, et AB in locum θB et contra. At si iisdem positis curva sit ex numero *(2)* Sin *L*

5 supra: s. o. S. 563 Z. 12–22.

Quodsi iisdem positis curva sit ex numero reciprocarum, adeoque aequatio sit:

	$y^e v^\omega$	aeq. $p^{e+\omega}$	f i g. 8. AB aeq. y. BC aeq. v.	erit θB ad AB
veluti	yv	aeq. p^2	si ω aeq. 1 et e aeq. 1	ut 1 ad 1
vel	y^2v	aeq. p^3	si ω aeq. 1 et e aeq. 2	ut 1 ad 2
vel	yv^2	aeq. p^3	si ω aeq. 2 et e aeq. 1	ut 2 ad 1
vel	y^3v	aeq. p^4	si ω aeq. 1 et e aeq. 3	ut 1 ad 3
vel	yv^3	aeq. p^4	si ω aeq. 3 et e aeq. 1	ut 3 ad 1
vel	y^2v^3	aeq. p^5	si ω aeq. 3 et e aeq. 2	ut 3 ad 2
vel	y^3v^2	aeq. p^5	si ω aeq. 2 et e aeq. 3	ut 2 ad 3
	etc.			

Quae ad theorematis explicationem sufficere arbitror. Demonstrationem Analytici norunt, quae imprimis eleganter confici potest, si adhibeatur theorema apud Riccium pariter, loco citato, et, diversa licet ratione, apud celeberrimum Geometram Renatum Franciscum Slusium in Miscellaneis demonstratum, quod scilicet factum ex potestatibus duarum partium in quas linea aliqua secta est, quarum exponentes sunt in ratione segmentorum, sit maximum omnium factorum similium seu ex potestatibus iisdem duorum aliorum ejusdem lineae segmentorum.

P r o p o s i t i o X V I.

„Si figura generans $1C1B3B3C2C1C$ sit Analytica simplex, etiam figura resectarum „$1D1B3B3D2D1D$ ex ea generata erit Analytica simplex, ejusdem speciei, ordinatas „BD, habens quae sint ipsis BC, ordinatis prioris proportionales in ratione numeri „ad numerum sive ut numerorum, dignitates ordinatae et abscissae, exponentium „differentia in directis, summa in reciprocis est ad exponentem dignitatis ordinatae. „AB aeq. $y_{[,]}$ BC aeq. $v_{[,]}$ Parameter, p[:]

11 ad | planam *gestr.* | theorematis *L* 11 f. Analytici | ex calculo *gestr.* | norunt *L* 16–18 similium *(1)* aliorum ei *(2)* | seu ex potestatibus *(a)* eorundem exponentium *(b)* iisdem *erg.* | duorum ... segmentorum. | Nobis hoc loco rem explicuisse suffecerit. *gestr.* | P r o p o s i t i o *L* 19 1C1B3B3C2C 1C *erg. L* 20 1D1B3B3D2D1D *erg. L* 21 *(1)* BE *(2)* BD, *erg. L* 21 sint *(1)* ad ordinatas *(2)* | ipsis BC *erg.* | ordinatis *L* 22 f. exponentium | summa *ändert Hrsg.* | in directis, | differentia *ändert Hrsg.* | in *L*

12 theorema: M. Ricci, *Exercitatio geometrica*, 1668, theorema tertium, S. 7 f. 14 demonstratum: R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 114–117.

„BC est ad BD ut ω ad $+\omega - e$ fig. 6. si $p^{\omega-e}y^e$ aeq. v^ω
$-\omega + e$ fig. 7. si y^e aeq. $p^{e-\omega}v^\omega$
$+\omega + e$ fig. 8. si $y^e v^\omega$ aeq. $p^{e+\omega}$.

Hoc ita demonstratur. Ex definitione figurae resectarum (resectarum, inquam, per tangentes scilicet CT ex axe conjugato $A1T2T$) BD aequalis est respondenti AT, (veluti $1B1D$ ipsi $A1T$). Sufficit ergo ostendi AT esse ad BC respondentem ($A1T$ ad $1B1C$) ut propositio enuntiat. Hoc ita patet, triangula $1\theta A1T$ et $1\theta 1B1C$ similia sunt, et $A1T$ ad $1B1C$, ut $1\theta A$ ad $1\theta 1B$: est autem in fig. 6. vel 7. seu in directis $1\theta A$ differentia inter $1\theta 1B$ et $A1B$. At per prop. praeced. $1\theta 1B$ est ad $A1B$ ut ω ad e, ergo differentia inter $1\theta 1B$ et $A1B$, sive $1\theta A$, erit ad $1\theta 1B$, ut differentia inter ω et e ad ω, ergo etiam $A1T$ ad $1B1C$, eodem erit modo et ipsi $A1T$ aequalis $1B1D$, erit etiam ad $1B1C$ ut differentia inter e et ω ad ω. quae differentia in fig. 6. est $\omega - e$, in fig. 7. $e-\omega$. Nam in fig. 6. major est ω quam e et $1\theta 1B$ quam $A1B$ in fig. 7. minor. Denique in reciprocis seu fig. 8. $1\theta A$ est summa ex $1\theta 1B$ et $A1B$ cumque $1\theta 1B$ et $A1B$ etiam in reciprocis sint inter se ut ω ad e, erit $1\theta A$ ad $1\theta 1B$, adeoque (ob Triangula similia $1\theta A1T, 1\theta 1B1C$) $A1T$ ad $1B1C$, vel $1B1D$ ad $1B1C$, ut $\omega + e$ ad ω. Quemadmodum asserebatur.

Scholium

In fig. 6. et 7. si curva $1C2C$ sit Parabola Conica, curva $1D2D$ erit alia Parabola Conica, ordinatas $1B1D$ habens in figura quidem 6. ordinatis prioris, $1B1C$, dimidias; in figura autem 7. aequales. Si curva esset Parabola Cubica, sive proxime altior quam Conica, tunc in figura 6. foret $1B1D$, aequalis duabus tertiis ipsius $1B1C$, et $2B2D$ aequalis duabus tertiis ipsius $2B2C$. Nam in Parabola Cubica cubi ab ipsis BC, sunt ut ipsae AB, ergo ω erit 3, et e erit 1. et BD ad BC ut $\omega - e$ ad ω seu ut 2 ad 3. At si in inverso ejusdem curvae situ in fig. 7. ordinatae BC sint ut cubi ab abscissis AB, erit ω, 1. et e, 3. et $e-\omega$ ad ω erit ut 2 ad 1. adeoque ipsae BD duplae ipsarum BC. Denique in reciprocis, fig. 8. si sit curva $1C2C$ Hyperbola Conica, in qua constat ordinatas BC esse abscissis AB proportionales, licet reciproce, erit ω, 1. et e, 1. quorum summa $\omega + e$, erit 2 unde ipsae BD duplae ipsarum BC. Eodem modo in Hyperboloidibus altioribus ratiocinari licet, nam si ordinatae sint ut quadrata abscissarum,

4 resectarum, inqvam, *erg. L* 19 curva *erg. L zweimal*

reciproce, erit BD ad suam BC, respondentem ut 3 ad 1. Sin quadrata ordinatarum sint proportionales abscissis, reciproce, erit ut 3 ad 2.

Corollarium

„Iisdem positis, quae in propositione, summa quoque resectarum, seu figurae re-
„sectarum area ad aream figurae generantis, sive summam ordinatarum ejus; eo-
„dem erit modo: nempe spatium $1D1B2B2D1D$ ad spatium $1C1B2B2C1C$ erit ut

$$\left.\begin{array}{l}\text{„(fig. 6.) } +\omega - e\\ \text{„(fig. 7.) } -\omega + e\\ \text{„(fig. 8.) } +\omega + e\end{array}\right\}\text{ est ad } \omega.$$

Si enim singulae ad singulas respondentes constantem servant rationem, eadem erit ratio summarum quae singularum; ut si sint $\begin{array}{c} a\ b\ c\ d \\ e\ f\ g\ h\end{array}$ sitque a ad e, ut b ad f vel c ad g, etc. eodem modo erit $a+b+c+d$ ad $e+f+g+h$, nempe ut a ad e. Areas autem figurarum esse ut summas applicatarum normalium, ex methodo indivisibilium constat, et ad modum propositionis 6. severe demonstrari potest.

Propositio XVII.

„In figura Analytica simplice duplum Sectoris $1CA2C1C$
„(seu trilinei sub arcu curvae $1C2C$ et duabus rectis $A1C, A2C$ ejus extrema ver-
„tici jungentibus) ad zonam $1C1B2B2C1C$ (sive quadrilineum arcu curvae eo-
„dem, duabus ordinatis $1B1C, 2B2C$, et axis portione $1B2B$ contentum) eandem
„habet rationem, quam propositione praecedenti ex-
„pressimus id est

$$\begin{array}{ll}\text{„dupl. } 1CA2C1C \text{ est ad } 1C1B2B2C1C, \text{ ut} & \left.\begin{array}{r}\text{(fig. 6.) } +\omega - e\\ \text{(fig. 7.) } -\omega + e\\ \text{(fig. 8.) } +\omega + e\end{array}\right\}\text{ ad } \omega.\\ \text{„} & \\ \text{„} & \end{array}$$

Quod ita facile demonstratur: $1B1D$ est ad $1B1C$, item $2B2D$ ad $2B2C$, eo quo diximus modo, idemque est in caeteris: per prop. 16. ergo et summa omnium BD ad summam omnium BC, id est (methodo indivisibilium ad modum prop. 6. de-

12 ad e. *(1)* aream autem figurae a summa *(a)* ordinatarum *(b)* applicatarum normalium nihil differre *(2)* areas L

monstrata) area $1D1B2B2D1D$ ad aream $1C1B2B2C1C$ eandem habebit rationem. Est autem spatio $1D1B2B2D1D$ aequale, Trilineum $1CA2C1C$ duplicatum per prop. 7. ergo Trilineum quoque $1CA2C1C$ duplicatum sive duplum sectoris, ad zonam $1C1B2B$ $2C1C$ eam habebit rationem quae asserebatur.

Propositio XVIII.

„In figura Analytica simplice, zona, ordinatis duabus, arcu cur-
„vae et axe comprehensa est ad zonam conjugatam id est ordinatis
„conjugatis duabus, arcu eodem, et axe conjugato comprehensam, ut expo-
„nens dignitatum ab ordinatis ad exponentem dignita-
„tum ipsis proportionalium ab ordinatis conjugatis id est ab abscis-
„sis.

Sive zona $1C1B2B2C1C$ (jam prop. praeced. explicata) est ad zonam conjugatam $1C1G2G2C1C$, quae arcu eodem $1C2C$, quo prior zona; et ordinatis conjugatis $1G1C$, $2G2C$ (quae ipsis $A1B$, $A2B$ abscissis prioris zonae aequales sunt) et $1G2G$ portione axis conjugati AG comprehensam, ut ω ad e. Nam per praecedentem duplus sector $1CA2C1C$ est ad zonam $1C1B2B2C1C$ ut differentia ipsarum ω et e in directis, summa vero in reciprocis, est ad ω. Eodemque modo idem duplus sector est ad zonam (conjugatam) $1C1G2G2C1C$ ut differentia ipsarum ω et e in directis, summa in reciprocis est ad e. Nam par ratio est, quia eligere possumus quem axium, quasve velimus, tantumque quae antea erant ordinatae BC, nunc fiunt abscissae AG, et quae antea erant abscissae AB nunc fiunt ordinatae GC, ideoque tantum in locum ipsius ω, substituenda est e, et contra. Cum ergo duplus sector sit ad zonam ut summa vel differentia ipsarum ω et e est ad ω, et idem sit ad zonam conjugatam, ut eadem summa vel differentia ipsarum e et ω est ad e, erit zona ad zonam conjugatam ut ω ad e. Q. E. D.

Scholium

Hanc propositionem, novam ni fallor, credidi memorabilem, tum ob simplicitatem expressionis, quia facile retineri potest, tum ob usus generalitatem, quia in omnibus cur-

6 simplice, | directa *gestr.* | zona, *L* 6 duabus *erg. L*

22 Cum ergo: Der Beweis deckt nicht die Fälle $e = \omega$ (Gerade) und $e = -\omega$ (Hyperbel) ab, für die der Satz ebenfalls gilt.

vis analyticis simplicibus eodem modo componitur: unde qui eam memoria tenet, statim ubi opus est, quadraturam figurae hujusmodi propositae ex ea calculo investigare potest. Quod ex propositionibus subjectis patebit, nunc propositionem praesentem exemplis applicare suffecerit. In figura 6 sit Curva Parabola Conica, constat quadrata ipsarum BC, seu dignitates quarum exponens est 2, esse ut ipsas AB (vel CG) seu ut ipsarum dignitates exponentem habentes 1. Ergo erit zona $1C1B2B2C1C$ ad zonam $1C1G2G2C1C$ ut 2 ad 1. seu in fig. 7 ubi omnia inverse sumuntur, si intelligatur etiam esse Parabola Conica, erit ut 1. ad 2. Pro numeris 1. 2. substituemus in parabola Cubica, 1. 3. At in semicubicali in qua ordinatarum quadrata sunt ut cubi abscissarum sive ordinatarum conjugatarum, vel contra, pro 1. 2. substituemus, 2. 3. Denique in fig. 8 si curva sit Hyperbola Conica, ubi ordinatae sunt ut abscissae reciprocae, adeoque exponentes, 1. 1. erit una zona alteri conjugatae aequalis, quod ex ipsa statim figura in hoc quidem casu constat. Si in eadem fig. 8. curva sit Hyperboloeides proxime superior, sive Antiparabola, in qua quadrata ordinatarum sint ut abscissae reciproce, utique ut in Parabola, zona una alterius dupla erit.

2 hujusmodi *erg. L* 2f. potest. *(1)* Qvod exemplis aliqvot apte ostendere utile erit *(2)* Qvod ex *(a)* Corollariis *(b)* propositionibus *L* 13 constat *(1)* sunt etiam in Hyperbola hae duae zonae per omnia similes et congruentes *(2)* Si *L* 15–575,2 erit. *(1)* Corollar. I. Trilinei conjugati *(a)* , sive complementi Curvae Analyti *(b)* 1C1P2C1C qvadratura, excepta tantum ex omnibus curvis Analyticis simplicibus Hyperbola Conica, in hoc pariter Corollario, ac seqventibus. Vocemus hoc Trilineum P. et rectangulum 1P1C1G2G vocemus G; et rectang. 1P1B2B in directis seu fig. 6 vel 7; at in reciprocis rectang. 1C1B2B fig. 8. vocemus B zonam rectam *(aa)* R *(bb)* 1C1B2B2C1C vocemus R. conjugatam 1C1G2G2C1C | vocemus C *erg.* | . Ex propositione hac patet esse R ad C id est B − P ad P + G ut ω ad e. ergo | factum sub mediis aeqvale facto sub extremis, seu *erg.* | ωP + ωG aeq. eB − eP, sive ωP + eP aeq. eB − ωG et P aeq. $\frac{\mathrm{eB} - \omega\mathrm{G}}{\omega + \mathrm{e}}$ sunt autem ω et e numeri cogniti, B et G rectangula cognita, ergo habetur valor ipsius P, sive trilinei propositi qvaesitus, adeoqve et eius qvadratura. *(2)* Propositio XIX. *(a)* „Zonam | curvilineam *erg.* | finitam *(aa)* Curvae *(bb)* figurae Analyticae simplicis, *(aaa)* in qva *(bbb)* qvadrare, modo in ea e et ω. sint numeri inaeqvales, id est in omnibus excepta Hyperbola Conica *(aaaa)* Producatur ⟨1B⟩ *(bbbb)* Designetur punctum 1P in qvo ordinata 1B1C *(aaaaa)* verticis punct *(bbbbb)* vertici A proxima, ad unum extremum portionis curvae assumtae punctum 1C pertinens, ordinatam conjugatam 2G2C ad alterum curvae punctum extremum 2C pertinentem, secat. His positis fiat figura rectilinea Ω *(b)* „Zonam curvilineam | finitam *gestr.* | 1C1B2B2C1C *L*

Propositio XIX.

„Zonam curvilineam $1C1B2B2C1C$ figurae Analyticae sim-
„plicis quadrare, excepta unica, in qua e. ω. exponentes dignitatum, inter
„se aequales sunt, id est excepta Hyperbola Conica.

Designetur punctum $1P$ in quo ordinata $1B1C$ vertici A proxima ad unum extremum portionis curvae assumtae punctum $1C$, pertinens, ordinatam conjugatam $2G2C$ ad alterum curvae punctum extremum $2C$ pertinentem, (producta productam si opus est) secat.

(1) Jam fiat figura rectilinea Ω quae sit ad duorum rectangulorum $2B1B1P$ et $1P2G1G$ summam in directis fig. 6. 7. differentiam in reciprocis fig. 8. ut numerus datus ω est ad numerorum datorum ω et e summam in directis, differentiam in reciprocis; (numerus autem ω est exponens dignitatum ordinatarum BC, et numerus e, est exponens dignitatum prioribus proportionalium, ordinatarum conjugatarum GC, vel abscissarum AB. ut aliquoties explicuimus). Quo facto erit figura rectilinea Ω aequalis zonae curvilineae $1C1B2B2C1C$.

2–4 *Am Rand:* fig. 6[,] fig. 7[,] fig. 8.

8 f. secat. *(1)* Qvo f *(2)* | *(a)* artic. 1. *(b)* (1) *erg.* | Iam *L* 16–576,1 curvilineae | finitae *gestr.* | 1C1B2B2C1C. | *(1)* artic 2 *(2)* (2) *erg.* | *(a)* Hoc ita demonstratur. Zona 1C1B2B2C1C, est ad zonam conjugatam 1C1G2G2C1C ut ω ad e. ergo | eadem *gestr.* | zona prior est ad summam | zonae *erg.* | utriusqve id est *(aa)* ad spatiu *(bb)* fig. 6. 7. ad spatium rectilineum ex duobus rectangulis 2B1B1P, 1P2G1G compositum ut ω ad summam ex ω et e. *(aaa)* Et in reciprocis eadem zona prior est ad differentiam zonae utriusqve *(bbb)* nam *(ccc)* patet autem spatium rectilineum ex his duobus rectangulis compositum, seu *(aaaa)* spatium *(bbbb)* hexagrammum rectangulum 2B1B1C1G2C2B fieri ex additione in unum duarum zonarum 1C1B2B2C1C et 1C1G2G2C1C. In reciprocis vero seu fig. 8. qvia etiam zona | prior *erg.* | ad zonam conjugatam est ut ω ad e *(aaaaa)* et vero *(bbbbb)* erit zona prior ad differentiam zonae utriusqve, ut ω ad differentiam inter ω et e. Est autem differentia inter zonam utramqve, eadem cum differentia inter rectangula 2B1B1P, et 1P2G1G qvia differentia duarum qvantitatum, ut | hic zonarum *erg.* | 1C1B2B2C1C, et 1C1G2G2C1C, eadem est cum differentia eorum qvae in ipsis sublata qvantitate communi, hoc loco Trilineo 1C1P2C1C, residua sunt, qvae residua sunt rectangula 2B1B1P, et 1P2G1G. Qvoniam ergo zona prior est ad summam horum rectangulorum, in directis, ut numerus ω ad summam numerorum ω. et e. in reciprocis autem ad *(aaaaaa)* eorum *(bbbbbb)* rectangulorum differentiam ut *(aaaaaaa)* differentia inter *(bbbbbbb)* ω ad differentiam inter ω et e. et vero figura rectilinea Ω. ad eorundem rectangulorum summam in directis, differentiam in reciprocis etiam se habet ut ω ad summam ex ω et e in directis, differentiam inter ω et e, in reciprocis, ideo Ω et zona prior scilicet 1C1B2B2C1C aeqvabuntur. Q. E. D. *(b)* Hoc ita *(c)* Qvod semper fieri potest qvaecunqve sit curva *(d)* Qvod *L*

(2) Quod in omni casu fieri posse patet, excepto casu Hyperbolae Conicae quo differentiae illae, in reciprocis, evanescunt sive nihilo aequales sunt, quia tunc rectangula (fig. 8) $2B1B1P$ et $1P2G1G$, aequalia sunt, et numeri quoque ω et e sunt aequales. Quorum utrumque patet, de numeris quidem, quia enim in Hyperbola Conica abscissis AB, proportionales sunt ordinatae BC, (reciproce licet,) dignitates ordinatarum et abscissarum, proportionales invicem eaedem erunt seu ejusdem gradus, adeoque earum exponentes, ω et e, aequales. Rectangula quoque $2B1B[1]P$ et $1P2G1G$ in Hyperbola Conica aequari patet, nam addatur utrique singulatim, rectangulum idem $A1B1P$, fiet ex illo rectangulum $A2B2C$, ex hoc rectangulum $A1G1C$, quae ex natura Hyperbola Conicae, aequalia sunt. Idem autem in nulla alia curva analytica simplice reciproca contingit. Rectangula enim ista aequalia esse proprietas hyperbolae specifica est, exponentes quoque dignitatum esse aequales non nisi ad unam pertinet, nam eadem est curva in qua quadrata ordinatarum sunt quadratis abscissarum reciproce proportionalia, cum illa in qua ipsae ordinatae ipsis abscissis reciproce proportionales sunt; et idem de caeteris dignitatibus dici potest.

(3) Ut demonstretur haec Quadratura, considerandum est primum, in directis seu fig. 6. 7. summam duarum zonarum $1C1B2B2C1C$, et $1C1G2G2C1C$, aequalem esse summae duorum rectangulorum $2B1B1P$, et $1P2G1G$ seu hexagrammo rectangulo $2B1B1C1G2G2C2B$, ut ex schematum inspectione patet.

(4) Deinde ostendendum est in reciprocis seu fig. 8. differentiam harum duarum zonarum aequari differentiae eorundem duorum rectangulorum. Quia generaliter, differentia duarum quantitatum veluti hoc loco zonarum $1C1B2B2C1C$, et $1C1G2G2C1C$, eadem est cum differentia eorum quae in his, sublata quantitate communi, hoc loco trilinea $1C1P2C1C$, residua sunt: quae residua, sunt ipsa rectangula dicta $2B1B1P$, et $1P2G1G$.

(5) His positis reliqua demonstratio facile decurret: Zona prior est ad posteriorem seu conjugatam ut ω ad e, per prop. 18. Ergo zona prior est ad summam utriusque id est per artic. 3. in directis; ad summam rectangulorum dictorum: ut ω ad sum-

1f. casu Hyperbolae Conicae *erg. L* 4 patet, | fieri in Hyperbola Conica *erg. u. gestr.* | , de *L* 6 invicem *erg. L* 6f. seu ejusdem gradus *erg. L* 12 est, *(1)* numeros qvoqve esse aeqv *(2)* exponentes *L* 16 *(1)* artic. 2 *(2)* artic. 2. *(3)* (3) *erg. L* 21 *(1)* artic. 3. *(2)* (4) *erg. L* 27 *(1)* artic. 4 *(2)* (5) *erg. L* 29 artic. *(1)* 2. *(2)* 3. *L*

mam numerorum ω, et e. Eadem zona prior est ad differentiam zonae utriusque id est per artic. 4. in reciprocis ad differentiam rectangulorum dictorum: ut ω ad differentiam inter ω et e. Jam per constructionem artic. 1. figura rectilinea Ω est etiam ad eorundem rectangulorum summam, in directis; ut ω ad summam ex ω et e; et ad eorundem rectangulorum differentiam, in reciprocis, ut ω ad differentiam inter ω et e. Ergo dictae zonae priori, $1C\,1B\,2B\,2C\,1C$ aequalis est figura rectilinea Ω. quae in omnibus figuris Analyticis simplicibus praeter Hyperbolam Conicam exhiberi potest per artic. 2. Quod Erat Faciendum.

Scholium

Haec quadratura, cum constructione generali non ineleganter absolvatur minime omittenda visa est. Finitam autem tantum zonam hic metimur generaliter, quoniam in reciprocis, ubi ad spatia infinita prosilimus, magna quadam cautione opus est ac distinctione, quae sequenti propositione explicabitur. Porro si semel zonae quadratura habeatur, alterius cujuscunque spatii ad eundem curvae arcum pertinentis quadraturam facile haberi constat, ut Trilineorum, quadrilineorum, sectorum; res enim tantum rectilineorum additione aut subtractione absolvitur. De caetero mirum videri potest, unam ex infinito Curvarum Analyticarum simplicium numero Hyperbolam Conicam Quadraturae leges recusasse, et nescio quibus praestigiis, cum jam prope capta videretur e manibus nostris sese eripuisse.

Sed mirari desinet qui ista profundius inspexerit. Nam cum omnium totius naturae Linearum simplicissima post rectam Hyperbola sit, si expressionem potius quam constructionem spectes; constructione enim circulus vincit; rationis erat ut sua quoque privilegia haberet, privilegiis circuli non inferiora. Ut autem Circulus angulos exhibet, ita Hyperbola rationes in spatio repraesentat, unde commercium ejus oritur cum Logarithmis. Quare jam patet impossibile prorsus fuisse, ut hoc quidem modo quadraretur Hyperbola, nam quadraturae quas hac propositione dedimus omnes sunt universales, ita

2 artic. *(1)* 3. *(2)* 4. | in reciprocis; *erg.* | ad *L* 6 f. aeqvalis *(1)* exhibita *(2)* est figura rectilinea *(a)* exhibita *(b)* Ω. *(aa)* Qvod Erat Faciendum *(bb)* qvae *L* 7 simplicibus *erg. L* 11 zonam | hic *erg.* | metimur | generaliter *erg.* | , qvoniam *L* 12 f. ac distinctione *erg. L* 17 Conicam *(1)* Qvadraturam recusasse. Sed qvi ista profundius inspexere, mirari desinent *(2)* Qvadraturae *L* 22 spectes; *(1)* ac proinde (constructione enim circulus vincit) *(2)* constructione ... vincit; *(a)* ac proinde sua qvaedam privilegia *(b)* rationis *L*

ut eadem plane constructio serviat ad portionem figurae quamcunque, qualem quadraturam Hyperbola non fert, alioquin Logarithmum numeri dati invenire esset problema certi gradus, et vicissim, dato Logarithmo invenire numerum. Unde invento logarithmo et in quemlibet partium numerum secto, et portionis, numero absoluto vicissim invento, sequeretur inventionem quotcunque mediarum proportionalium esse problema certi cujusdam gradus determinati. Quod est absurdum. Similem infra prop. 51. ultima de Circulo ratiocinationem afferemus et distincte explicabimus, unde ista quoque facilius intelligetur.

Propositio XX.

„Si $V+X$ ad $V+Z$ rationem habeat inaequalitatis finitam, sintque X et Z finitae, „erit et V. finita; quodsi alterutra ipsarum X vel Z sit infinita, etiam V. infinita „erit.

Prior pars ita probatur: Ponatur esse falsa, et X atque Z existentibus finitis sit V infinita, erit et $V+X$ infinita, itemque $V+Z$ infinita; quare et differentia earum erit infinita, quia si infinitum minus a majore, ad ipsum rationem inaequalitatis finitam, ut duplam, sesquialteram, aliamve habente auferas; restat infinitum. Differentia ergo inter $V+X$ et $V+Z$ est infinita; quod est absurdum, eadem est enim cum differentia inter X et Z. sublata scilicet quantitate communi V. Differentia autem inter X et Z quantitates ex hypothesi finitas, est etiam finita. Absurdum est ergo ipsis X et Z positis finitis V esse infinitam.

Posterior pars ita constat. Si V esset finita, et alterutra duarum reliquarum verbi gratia Z, infinita, X vero finita; foret $V+X$ finita, et $V+Z$ infinita, finitum ergo ad infinitum rationem haberet inaequalitatis finitam, (quam, ex hypothesi, habent $V+X$ et $V+Z$). Quod est absurdum.

Propositio XXI.

„Rectangulum $0C0GA0B$ sub abscissa $A0B$ infinite parva et infinita ordinata $0B0C$ „ad Hyperboloeidem $0C1C2C$, est quantitas infinita cum major est exponens digni-

4 et *(1)* partis aliqvotae, *(2)* portionis *L* 6 prop. *(1)* LI *(2)* LII *(3)* 51. ultima *erg. L*
8 Propositio *(1)* XVIII *(2)* XX *L* 24 Propositio *(1)* XIX *(2)* XXI *L*
25 „Rectangulum *(1)* sub abscissa infinite parva et ordinata ad Hyperboloidem, infinita *(a)* cum major est exponens *(b)* est qvantitas infinita cum major est exponens dignitatum *(aa)* abscissarum *(bb)* ab abscissis, qvam, exponens dignitatum ab ordinatis, qvae (ex natura curvae) prioribus dignitatibus ab abscissis reciproce proportionalium *(2)* 0C0GA0B *L*

„tatum ab abscissis, quam exponens dignitatum proportionalium ab ordinatis; sin ille „exponens hoc minor sit rectangulum erit quantitas infinite parva; denique si ae- „quales sint exponentes, rectangulum erit quantitas ordinaria finita.

(1) Si aequales sint exponentes, seu si ordinatae BC, vel earum potentiae, sunt abscissis AB vel earum potentiis similibus reciproce proportionales, constat curvam $0C1C2C$ esse Hyperbolam Conicam, et rectangulum $0C0GA0B$, aequari quadrato $A2BR2G$, ex natura Hyperbolae, nec refert quanta sit longitudo aut parvitas rectarum $A0B$ vel $0B0C$; quadratum autem $A2BR2G$ finitum est, ergo et rectangulum $0C0GA0B$, sub infinite parva $A0B$, et infinite longa $0B0C$ comprehensum, est finitum.

(2) Si exponentes sint inaequales suffecerit unius curvae Hyperboloidis exemplo uti. Sit ergo $0C1C2C$ Antiparabola, in qua scilicet quadrata ordinatarum sint reciproce ut abscissae vel ordinatae conjugatae; aut contra ordinatae sint reciproce ut quadrata abscissarum vel ordinatarum conjugatarum. Ac primum ponamus ad Asymptoton AB demissas ordinatas BC esse ut quadrata ipsarum AB reciproce, sive esse $0B0C$ ad $1B1C$ ut quad. $A1B$ ad quad. $A0B$. Porro rectangulum $A0B0C0G$ est ad rectangulum $A1B1C1G$ in ratione composita ex rationibus $A0B$ ad $A1B$, et $0B0C$ ad $1B1C$ vel quad. $A1B$ ad quad. $A0B$. Ratio autem composita ex duabus $A0B$ ad $A1B$, et quad. $A1B$, ad quad. $A0B$ est eadem quae rectae $A1B$ ad rectam $A0B$. Ergo rectang. $A0B0C0G$ est ad rectangulum finitum $A1B1G1C$ ut recta $A1B$ finita, ad rectam $A0B$ infinite parvam. Quicquid autem ad quantitatem finitam rationem habet quam finitum ad infinite parvum, seu quam infinitum ad finitum, id ipsum est infinitum. Rectangulum ergo $A0B0C0G$ est infinitum, cum ordinatae sunt, reciproce, ut quadrata abscissarum; et generaliter cum exponens dignitatum ab abscissis major quam ab ordinatis; quod eadem servata ratiocinandi methodo quivis experiri potest, ego verbis in re clara parco.

8 0B0C; *(1)* spatium autem 0C0GA0B fi *(2)* qvadratum *L* 14 conjugatarum *(1)* ; prout scilicet *(a)* Asymptotos *(b)* ordinatas ad Asymptoton AG, vel AB ducimus *(2)* . Ac *L* 17 f. vel qvad. A1B ad qvad. A0B *erg. L* 20 parvam *(1)* ; id est ut infinitum ad finitum *(2)* Qvicqvid *L* 25–580,1 ordinatis | ; qvod *erg.* | eadem ... methodo | qvivis ... parco *erg.* | (3) *L*

(3) Contra, si eadem curva Antiparabolica inverso modo sumta intelligatur, sintque quadrata ordinatarum reciproce ut abscissae (scilicet pro ordinatis prioribus assumtis earum conjugatis, axe quoque conjugato, in prioris locum posito et vice versa) sive quad. $0B0C$ ad quad. $1B1C$ ut $A1B$ ad $A0B$, eodem plane modo ratiocinabimur, nempe rectangulum $A0B0C0G$ est ad rectangulum $A1B1C1G$ in ratione composita ex ratione $A0B$ ad $A1B$ vel quad. $1B1C$ ad quad. $0B0C$ et ex ratione $0B0C$ ad $1B1C$; ratio autem composita ex rationibus quad. $1B1C$ ad quad. $0B0C$, et rectae $0B0C$ ad rectam $1B1C$ est ratio rectae (finitae) $1B1C$ ad (infinitam) $0B0C$, est ergo rectangulum $A0B0C0G$ ad rectangulum finitum $A1B1C1G$, ut quantitas finita ad infinitam. Quicquid autem est ad quantitatem finitam, ut quantitas finita ad infinitam, id est infinite parvum. Rectangulum ergo $A0B0C0G$ est infinite parvum, cum ordinatarum quadrata sunt reciproce ut abscissae, et generaliter cum exponens dignitatum ab abscissis minor quam ab ordinatis; cum eadem in casibus aliis ratiocinandi methodus servetur.

Propositio XXII.

„In qualibet Hyperboloide $0C1C2C$ (: praeter omnium primam seu praeter ipsam „Hyperbolam Conicam :) spatium infinite longum $1C1BA0G0C1C$ vel $1C1GA3B$ „etc. $3C1C$ ad unam asymptoton AG est area infinitum, ad alteram AB finitum. „Infinitum ad illam asymptoton in quam demissae ordinatae exponentem habent,

---

1–14 *Spätere Nebenbetrachtung:* Rectang. sub prima abscissa et ordinata sit xy. Sit $y^m = x^{-n}$ seu $y = x^{-n:m}$[,] $yx = x^{\frac{m-n:m}{\cdot}}$. Jam si $x = 0$, et m major n fit $m - n, : m$, quantitas affirmativa. Sin n major m est quantitas negativa; potentia autem ipsius 0 affirmativa (cum m major n) dat infinite parvum; sed potentia ipsius 0 negativa (cum n major m) dat infinitum. Ergo cum exponens ordinatarum major quam abscissarum, rectangulum est infinite parvum; cum vero abscissarum major quam ordinatarum est infinitum.

6 vel ... qvad. 0B0C *erg. L* 8 rectae *(1)* 1B1C ad rectam 0B0C, *(a)* in *(b)* finitae ad infinitam *(2)* (finitae) *L* 20 sub *(1)* ultima ord⟨in⟩. *(2)* minim *(3)* prima *L* 22 affirmativa *(1)* qvo casu de potentia ma *(2)* jam 0 potentia affirmativa *(3)* sin *L*

„exponente dignitatum proportionalium ab abscissis minorem; ad alteram vero spa-
„tium longitudine infinitum area finitum erit. [Adde coroll. 2. post prop. 25.]

Spatium longitudine infinitum intelligo, $1C1BA0G0C1C$, cum ipsa $A0B$ vel $0G0C$ infinite parva est, tunc enim ipsa $0B0C$ infinite longa intelligetur. Nam $A1B$ finita ad $A0B$ infinite parvam habet rationem omni assignata majorem, seu quam infinitum ad finitum, ergo et dignitas illius ad dignitatem similem hujus jam et ex generali hyperboloidum natura, dignitates quaedam ipsarum $1B1C, 0B0C$, sunt dignitatibus ipsarum $A1B, A0B$, reciproce proportionales; ergo dignitas quaedam ab $0B0C$ ad dignitatem similem ab $1B1C$, erit etiam ut dignitas quaedam ab $A1B$ ad dignitatem similem ab $A0B$, seu ut infinitum ad finitum; est autem dignitas a recta (finita) $1B1C$, ipsamet finita ergo dignitas ab $0B0C$ erit infinita; ergo et ipsamet $0B0C$ erit infinita. Et quoniam nihil refert in quem axium conjugatorum ducantur ordinatae; semper enim earum dignitates dignitatibus abscissarum reciproce proportionales sunt; ideo semper abscissa sumta infinite parva, ordinata erit infinita; ac proinde omnis Hyperboloides utrumque axium habet asymptoton sive non, aut non nisi infinito abhinc intervallo curvae occurrentem.

Posito ergo punctum $0B$ distantia infinite parva abesse a puncto A, rectamque ab $0B$ versus curvam ductam infinito abhinc intervallo occurrere curvae in $0C$, seu rectam $0C$ esse infinitam; ajo spatium quinquelineum longitudine infinitum $1C1BA0G0C1C$, (terminatum recta asymptoto seu infinita $A0G$, curva itidem infinita $1C0C$, rectis duabus finitis $A1B, 1B1C$, et denique infinite parva $0C0G$) esse area infinitum eo casu quem enuntiat propositio; secus, finitum. Nam per prop. 18. $0C0B1B1C0C$ (id est, spatium longitudine infinitum $0C0P1C0C$, plus rectang. finitum $0P0B1B1C$, sive $V + X$, spatio appellato V, rectangulo X.) est ad $0C0G1G1C$, (seu ad idem spatium longitudine infinitum $0C0P1C0C$, plus rectang. $0G0C0P1G$, altitudinis $0G0C$ infinite parvae, baseos infinite longae $0G1G$; sive ad $V + Z$ dicto rectangulo $0G0C1P1G$ appellato Z)

1 minorem; *(1)* sin majorem habeant, finitum erit area *(2)* ad *L* 2 [adde ... 26.] *erg. L ändert Hrsg.* 6 et *(1)* potentia illius ad potentiam *(2)* dignitas *L* 7 natura, *(1)* ut *(2)* eodem modo alia qvaedam dignitas ipsius *(a)* A0B *(b)* 0B0C est ad dignitatem *(aa)* sibi similem *(bb)* sua *(cc)* similem *(3)* dignitates *L* 25 f. parvae, *(1)* longitudinis *(2)* baseos *L* 26 0G0C1P1G *L ändert Hrsg.*

2 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz. 2 coroll. 2: vgl. die gestrichene Lesart zu S. 588 Z. 22 – S. 590 Z. 1.

ut numerus ad numerum inaequalem, exponens scilicet dignitatis ordinatae ad exponentem dignitatis proportionalis abscissae, qui non nisi in Hyperbola Conica, in propositione exclusa aequales sunt.

Habent ergo $V + X$ et $V + Z$ rationem inaequalitatis finitam; et X est quantitas finita, ergo per prop. 20. si Z sit infinita erit etiam V infinita, sin Z finita, erit et V finita. Quodsi autem V et Z finitae sunt vel infinitae, etiam $V + X$ imo $V + X + Z$ finita vel infinita erit, nam X cum semper finita sit additione sui nec infinitum in finitum transmutat, nec finitum in infinitum. Idem erit etsi ad $V + X + Z$ addatur rectangulum infinite parvum $1G0P0BA$, ut compleatur quinque-lineum $1C1BA0G0C1C$; nam infinite parvum hoc rectangulum est, (quia ejus basis $0B0P$ vel $1B1C$ finita, altitudo $A0B$ infinite parva); additio autem infinite parvi etiam nihil mutat. At quantitatem $V+X+Z$ auctam rectangulo $1G0P0BA$, ipsum quinque-lineum dictum complere patet, quia V est trilineum, $0C0P1C0C$, et X rectangulum $0P0B1B1C$, et Z rectangulum $0G0C0P1G$. Concludimus ergo si Z sit quantitas finita vel infinita, etiam quinquelineum finitum vel infinitum fore. Addatur ipsi Z seu rectangulo $0G0C0P1G$ rectangulum infinite parvum $1G0P0BA$, fiet rectangulum $0C0GA0B$; itaque si hoc rectangulum, (sub abscissa infinite parva $A0B$, et ordinata infinita $0B0C$ comprehensum) finitum vel infinitum sit etiam Z, ab ipso non nisi infinite parva quantitate ($1G0P0BA$) differens, finitum vel infinitum erit, adeoque et quinquelineum.

Est autem rectangulum $0C0GA0B$ quantitas infinita cum major est exponens dignitatum ab abscissis; at finita cum major est exponens dignitatum ab ordinatis, per prop. 21. et quinquelineum hoc $0C0GA1B1C0C$ est spatium infinite longum ad asymptoton AG. Ergo cum major est exponens dignitatum ab abscissis spatium infinite longum ad asymptoton Hyperbo-

1 f. dignitatis | abscissae *ändert Hrsg.* | ad ... proportionalis | ordinatae *ändert Hrsg.* | , qvi *L* 6 autem V | et Z *erg.* | | finita est vel infinita *ändert Hrsg.* | , etiam *L* 13 f. Z rectangulum | 0G0C1P1G *ändert Hrsg.* | *(1)* (Ut ergo sciamus an *(2)* concludimus *L* 15 0G0C1P1G *L ändert Hrsg.* 18 (0G0C1P1G) *L ändert Hrsg.* 24–583,1 Hyperboloidis | constitutum *erg.* | est | area vel magnitudine *erg.* | infinitum *L*

21 finita: Aus prop. XXI folgt jedoch, dass $0C0GA0B$ unendlich klein ist. Der Beweis von prop. XXII erfordert daher eine Erweiterung von prop. XX um den Fall, dass Z unendlich klein ist. Vgl. die Erl. zu N. 20 S. 251 Z. 15, zu *LQK* S. 66, und E. Knobloch, *Leibniz's rigorous foundation of infinitesimal geometry by means of Riemannian sums*, in: *Synthese* 133 (2002), S. 59–73, insbesondere S. 68–72.

loidis constitutum est area vel magnitudine infinitum secus finitum. Hinc cum quaelibet Hyperboloides binas habeat asymptotos AG, AB, et ordinatae ad unam ut $1B1C$, aequentur abscissis ut $A1G$, ad alteram, similiterque ordinatae $1G1C$, abscissis $A1B$; hinc si ad unam asymptoton major sit exponens dignitatis abscissarum, quam ordinatarum; ad alteram minor erit exponens dignitatis abscissarum quam ordinatarum, ac proinde si spatium sit area vel magnitudine infinitum consistens ad unam asymptoton, AG, ut exempli causa spatium $1C1BA0G$ etc. $0C1C$; tunc spatium infinite longum ad alteram asymptoton AB consistens $1C1GA3B$ etc. $3C1C$, area vel magnitudine finitum erit; vel contra. Q. E. D.

Scholium

Libenter hanc contemplationem persecutus sum, quia specimen exhibet cautionis circa ratiocinia de infinito, et methodum indivisibilium, ostenditque non semper ex partium finitarum perpetuo abscissarum proprietate quadam ad totius infiniti spatii proprietatem posse prosiliri. Ut hoc loco in hyperbola Conica posset aliquis ita ratiocinari, zona $1C1B2B2C1C$, aequalis zonae conjugatae $1C1G2G2C1C$, et zona $0C0B1B1C0C$ aequalis zonae conjugatae $0C0G1G1C0C$ (ponendo eas semper finitas esse), quemadmodum constat ex prop. 18. et ita semper quodlibet spatium quadrilineum horizontale transverso seu perpendiculari. Jam omnia quadrilinea horizontalia in infinitum usque ad A complent spatium infinitum $2C2BAM$ etc. $1C2C$ et omnia perpendicularia sive conjugata in infinitum, complent spatium infinitum $2C2GM$ etc. $1C2C$, ergo spatium infinitum hoc illi erit aequale, pars toti. Et in aliis hyperboloidibus semper concluderetur absurdum simili argumento. Nam exempli causa in Hyperboloide post Conicam proxima seu Antiparabola, si ordinatae BC, sint ut abscissarum AB quadrata reciproce, tunc erit per prop. 18. $1C1B2B2C1C$ dimidium ipsius $1C1G2G2C1C$, eodem modo $0C0B1B1C0C$

3 aeqventur | ordinatis conjugatis vel *gestr.* | abscissis *L* 3 f. similiterqve ... A1B; *erg. L* 6 f. sit | area vel magnitudine *erg.* | infinitum | consistens *erg.* | ad unam asymptoton | AG, *erg.* | *(1)* finitum erit ad alteram, vel contra. Q. E. D. *(2)* ut spatium *(a)* A1B1C0C0GA *(b)* 0C0GA1B1C0C tunc spatium ad alteram asymptoton infinite *(aa)* magnum *(bb)* longum, *(aaa)* 1C1BA0G0C1C *(bbb)* 1C1BA0G etc 0C1C, *(3)* ut *L* 8 f. longum *(1)* 1C1GA etc 3G longitudine *(2)* 1C1GA3B etc 3C1C *(3)* ad *L* 18 spatium *(1)* directum seu *(2)* qvadrilineum *L* 19 omnia *(1)* spatia *(2)* qvadrilinea horizontalia | seu directa *gestr.* | in *L* 25 ipsius | 1C2G2C1C *ändert Hrsg.* | , eodem *L*

dimidium ipsius $0C0G1G1C0C$; ponendo semper finita esse, et ita semper quodlibet quadrilineum conjugati respondentis dimidium erit. Ergo spatium infinitum $2C2BAM$ etc. $1C2C$ completum ab omnibus prioribus quadrilineis in infinitum sumtis, erit dimidium spatii $2C2GM$ etc. $1C2C$ completi a conjugatis omnibus, totum partis. Eodem modo in aliis colligetur totum partis suae trientem aut quartam partem esse. Eleganti argumento quam lubrica sit ratiocinatio circa infinita, nisi demonstrationis filo regatur.

Propositio XXIII.

„Continet Quadraturam figurae analyticae simplicis completae, id est inde a vertice „incipientis excepta Hyperbola Conica; oportet autem si curva sit Hyperboloeides, „ab ea parte sumi figuram, a qua finita ejus area est. Regula autem haec est: figura „analytica simplex completa $MA1B1CM$ est ad rectangulum $A1B1C1G$ sub alti„tudine $A1B$ id est maxima abscissa, et basi $1B1C$ id est ultima ordinata, ut ω est „ad $\omega + e$ in directis, vel Paraboloidibus fig. 6. 7. aut ad $\omega - e$ in reciprocis vel „Hyperboloidibus fig. 8. Est autem ut saepe diximus ω exponens dignitatum ab „ordinatis; e, exponens dignitatum proportionalium ab abscissis.

(1) Hoc ita demonstratur, zona $0C0B1B1C0C$ (excepto Hyperbolae Conicae casu) est ad duorum rectangulorum $1B0B0P$ et $0P1G0G$, summam in directis, differentiam in reciprocis ut ω ad numerorum ω et e. summam in directis, differentiam in reciprocis; prop. 19.

(2) Est autem rectangulum $0P1G0G$ infinite parvum, tunc cum $A0B$ vel $0P1G$ infinite parva est, in directis quidem, fig. 6. 7. quia tunc $1G0G$ est finita, non scilicet major quam recta finita $1B1C$; quare et rectangulum $0P1G0G$, sub infinite parva et finita comprehensum infinite parvum erit; in reciprocis vero, fig. 8. recta quidem $1G0G$ est infinita, posito $A0B$, vel $0G0C$ esse infinite parvam, quoniam curva $2C1C0C$ ipsi AG, asymptoto, nuspiam occurrit; rectangulum vero $0P1G0G$ sub infinita et infinite parva comprehensum nihilo minus infinite parvum est. Nam si rectangulum $A0B0C$, quod rectangulo $0P1G0G$ est majus, sit infinite parvum, utique et rectangulum $0P1G0G$ infinite

1 f. qvadrilineum | directum *erg. u. gestr.* | conjugati *L* 3 omnibus *(1)* directis *(2)* prioribus *L* 5 partam *L ändert Hrsg.* 7 f. XXIII. *(1)* „Qvadratura *(2)* „Continet *L* 8 f. id ... incipientis *erg. L* 9 si *(1)* figura *(2)* curva *L* 11 completa *(1)* finita *(2)* MA1B1CM *L* 13 vel ... aut *erg. L* 13 f. vel Hyperboloidibus *erg. L* 16 zona *(1)* finita 1C1B2B2C1C *(2)* 0C0B1B1C0C *L* 23 fig. 8. *(1)* si zona sit finita, ut hoc loco *(2)* recta *L* 26 minus *(1)* finitum est *(2)* infinite *L*

parvum erit. Ipsum autem rectangulum $A0B0C$ in Hyperboloidibus sive reciprocis est infinite parvum per prop. 21, si ω exponens dignitatum ab ordinatis sit major quam e, exponens dignitatum ab abscissis quod hoc loco, cum spatium Hyperboloeides infinite quidem longum, area tamen finitum est, (quemadmodum propositio haec postulat) contingit, per prop. 22. Semper ergo in casu propositionis nostrae rectangulum $0P1G0G$, aut etiam $A0B0C$ infinite parvum erit.

(3) Neglecto ergo rectangulo $0P1G0G$, infinite parvo, zona $0C0B1B1C0C$ erit per artic. 1. ad rectangulum finitum $1B0B0P$, ut ω ad $\omega+e$ fig. 6. 7. in Paraboloidibus sive directis; vel ut ω ad differentiam inter ω et e, seu ad $\omega - e$ (quia ω major quam e, cum spatium ad asymptoton Hyperboloidis area finitum est, ut diximus) fig. 8. in Hyperboloidibus sive reciprocis. Ergo si zonae addas spatium infinite parvum $MA0B0CM$, ut fiat figura completa $MA1B1CM$, et rectangulo finito $1B0B0P$ aliud rectangulum infinite parvum $A0B0P1G$, ut fiat rectangulum $A1B1C1G$; utique ratio eadem manebit, eritque figura completa sive a vertice sumta ad curvam analyticam simplicem constituta, $MA1B1CM$ ad rectangulum $A1B1C1G$ sub maxima sive ultima assumta abscissa, $A1B$ eique respondente ordinata $1B1C$ comprehensum, ut ω ad $\omega + e$ fig. 6. 7. in directis, vel ut ω ad $\omega - e$ fig. 8. in reciprocis (cum scilicet, ut admonuimus, ω in reciprocis hic major esse debeat, quam e, ut figura completa longitudine licet infinita, areae tamen finitae esse possit). Q. E. D.

Scholium.

Quae de infinitis atque infinite parvis huc usque diximus, obscura quibusdam videbuntur, ut omnia nova; sed mediocri meditatione ab unoquoque facile percipientur: qui vero perceperit, fructum agnoscet. Nec refert an tales quantitates sint in rerum natura, sufficit enim fictione introduci, cum loquendi cogitandique, ac proinde inveniendi pariter ac demonstrandi compendia praebeant, ne semper inscriptis vel circumscriptis uti, et ad absurdum ducere, et errorem assignabili quovis minorem ostendere necesse sit. Quod tamen ad modum eorum quae prop. 6. 7. 8. diximus facile fieri posse constat. Imo si quidem possibile est directas de his rebus exhiberi demonstrationes, ausim asserere, non

2 per prop. 21 *erg. L* 3 abscissis | prop. 21 *gestr.* | qvod *L* 3 cum *(1)* zona *(2)* spatium *L* 7f. per artic. 1. *erg. L* 12 figura *(1)* analytica completa *(2)* completa *L* 12 finito *erg. L* 14 sive ... sumta *erg. L* 16 ordinata | 1B1G *ändert Hrsg.* | comprehensum *L* 17 reciprocis *(1)* Q. E. D. *(2)* (cum *L* 18 qvam e *(1)*) Q. E. D. *(2)* , *(a)* alioqvi figura non esset *(b)* ut *L* 22f. : qvi ... agnoscet *erg. L* 27 prop. 6. 7. 8. | 9. *gestr.* | diximus *L*

posse eas dari, nisi his quantitatibus fictitiis, infinite parvis, aut infinitis, admissis. Adde supra prop. 7. schol. Si quis ergo imposterum queretur de usu harum quantitatum, is aut ignarum se ostendet, aut ingratum. Ignarum quidem, si non intelligit, quanta hic lux accendatur in tota methodo indivisibilium, et materia quadraturarum; ingratum vero, si utilitatem quam percipit, dissimulat. Neque enim hic ut in Cavaleriana Geometria ullius lapsus periculum est; nec securitatis causa cogimur, ut Cavalerius, ad ordinatas parallelas methodum restringere, et aequalia semper duarum proximarum ordinatarum intervalla postulare, ipsique nobis ut ille fecit, progrediendi vias obstruere: sed liberrimo mentis discursu possumus non minus audacter ac tuto curvas quam rectas tractare. Cujus specimen totus hic libellus erit si quis methodi fructum quaerit; securitatis autem excemplum peculiare dabunt quae diximus schol. ad prop. 22. ubi Cavalerii methodus crude sumta infida est. Unde intelligi poterit, non aliter eam obtinere, quam quatenus in hanc resolvi potest. Possem differentiam multis illustribusque exemplis ostendere si locus pateretur. Sed malim id lectores suo potius experimento discere quam meis verbis, sentient autem quantus inveniendi campus pateat, ubi hoc unum recte perceperint, figuram curvilineam omnem nihil aliud quam polygonum laterum numero infinitorum, magnitudine infinite parvorum esse. Quod, si Cavalerius, imo ipse Cartesius satis considerassent, majora dedissent aut sperassent.

Hactenus figuras Analyticas simplices generaliter tractavimus, ipsa demonstrationis nostrae generalitate invitati: ad Quadraturam vero Circuli Arithmeticam non nisi Paraboloidibus opus habemus, imo ex toto paraboloidum ordine, non nisi illis quae rationales sunt. Quarum naturam generalem utile erit hac propositione complecti.

Propositio XXIV.

„In Trilineo Paraboloidis rationalis $ABCA$, fig. 6 abscissa posita AB, ordinata „BC, Parametro $A\pi$, erit

1 f. adde ... schol *erg. L* 5 Cavaleriana *(1)* methodo, *(2)* Geometria *L* 10 autem *(1)* specimen *(2)* exemplum *L* 12 aliter *(1)* vim *(2)* eam *L* 14 id | unum *gestr.* | lectores *L* 18 f. sperassent *(1)* , qvam qvae ab illis habemus *(2)* . Hactenus *L* 24 fig. 6 *erg. L*

7 restringere: vgl. B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635, def. A I u. A II S. 1 f.

„valor ordinatae ad Parabolam

	Quadraticam	cubicam	quadrato-quadraticam	
„aequalis	$\frac{\boxed{2}\,AB}{\boxed{1}\,A\pi}$	$\frac{\boxed{3}\,AB}{\boxed{2}\,A\pi}$	$\frac{\boxed{4}\,AB}{\boxed{3}\,A\pi}$.	etc.

Nam si

	$1B1C$	aequal.	$\frac{\boxed{2}\,A1B}{\boxed{1}\,A\pi}$	vel	$\frac{\boxed{3}\,A1B}{\boxed{2}\,A\pi}$	etc.	5
et	$2B2C$	aequal.	$\frac{\boxed{2}\,A2B}{\boxed{1}\,A\pi}$	vel	$\frac{\boxed{3}\,A2B}{\boxed{2}\,A\pi}$	etc.	
erit	$1B1C$	ut	$\boxed{2}\,A1B$	vel	ut $\boxed{3}\,A1B$	etc.	
ad	$2B2C$	ad	$\boxed{2}\,A2B$		ad $\boxed{3}\,A2B$		

Ergo Ordinatae ut Quadrata vel Cubi abscissarum, etc. adeoque ex definitione erunt ad Parabolam Quadraticam, Cubicam, etc. sive ad Paraboloidem rationalem in universum. 10

Propositio XXV.

„Iisdem positis portionis Trilineae $ABCA$. fig. 6. area valebit:

„	$\frac{\boxed{3}\,AB}{3\boxed{1}\,A\pi}$.	$\frac{\boxed{4}\,AB}{4\boxed{2}\,A\pi}$.	$\frac{\boxed{5}\,AB}{5\boxed{3}\,A\pi}$.	etc.
„in Parabola	Quadratica	Cubica	quadrato-quadratica	etc.

---

3 *Am Rand: NB. au lieu de*

$$\frac{\boxed{2}\,AB}{\boxed{1}\,A\pi} \quad \textit{faut mettre} \quad \frac{AB^2}{A\pi^1}$$

$$\frac{\boxed{3}\,AB}{\boxed{2}\,A\pi} \quad \textit{faut mettre} \quad \frac{AB^3}{A\pi^2}$$

et ainsi tousjours dans la suite.

14 Adde Schol. hujus fin. Coroll. 1. 2.

12 fig. 6. *erg. L*

---

19 Coroll. 1. 2.: s. die gestrichene Lesart zu S. 588 Z. 22 – S. 590 Z. 1.

Nimirum in Trilineo Parabolae Quadraticae, area $A2B2C1CA$, seu summa rectarum $1B1C$, $2B2C$, vel rectarum $\frac{\boxed{2}\,A1B}{\boxed{1}\,A\pi}.\ \frac{\boxed{2}\,A2B}{\boxed{1}\,A\pi}$, vel summa omnium quadratorum ab $A1B.\ A2B$ divisa per rectam constantem sive parametrum $A\pi$, aequabitur trienti Cubi ab ultima abscissa $A2B$, facti per Parametrum divisi, $\frac{\boxed{3}\,A2B}{3A\pi}$, et ita de caeteris. Nam ex p r o p. 2 3. in Paraboloidibus Spatium $A2B2C1CA$ est ad rectangulum $A2B2C$, ut ω ad $\omega+e$. Sunt autem hoc loco ordinatae ipsae in ratione duplicata, triplicata, aut quadruplicata, etc. abscissarum, ergo ordinatarum exponens ω hoc loco, est 1. abscissarum, e, est 2 vel 3 vel 4 etc. Ergo Spatium est ad rectangulum ut 1 ad $1+2$ vel $1+3$ vel $1+4$, etc. seu Spatium est rectanguli pars tertia, quarta, quinta, etc. Cumque ordinata $2B2C$ sit $\frac{\boxed{2}\,A2B}{\boxed{1}\,A\pi}$ vel $\frac{\boxed{3}\,A2B}{\boxed{2}\,A\pi}$ etc. (p r o p. 2 4) rectangulum $A2B2C$, ex ordinata $2B2C$ in abscissam $A2B$, erit $\frac{\boxed{3}\,A2B}{\boxed{1}\,A\pi}.\ \frac{\boxed{4}\,A2B}{\boxed{2}\,A\pi}$. etc. et spatium $A2B2C1CA$ rectanguli pars tertia vel quarta vel quinta etc. erit $\frac{\boxed{3}\,A2B}{3\boxed{1}\,A\pi}.\ \frac{\boxed{4}\,A2B}{4\boxed{1}\,A\pi}.\ \frac{\boxed{5}\,A2B}{5\boxed{1}\,A\pi}$. etc. Quod asserebatur.

Scholium

Ex iis quae hactenus de figurarum Analyticarum simplicium quadratura diximus, poteramus hoc solo theoremate contenti esse, praesertim cum id ex aliis quoque scriptoribus possit hauriri; si praeter quadraturam circuli Arithmeticam nihil dare constituissemus: sed quoniam tot alia ex eodem fonte propositionis septimae, utique uberrimo, manant, indulsimus nonnihil foecunditati nostrorum principiorum, ut appareret quanta ex quantulis duci possent. Ridiculum enim videbatur casus singulares efferre ac demonstrare velle; cum eadem opera iisdem pene verbis generalissima theoremata condi possent. Praesertim cum eadem apud alios nondum satis generaliter aut distincte demonstrata prostarent. Cavalerius non nisi ad pauca quaedam sua methodo pervenerat.

22–590,1 pervenerat. | Robervallius mihi dixit Fermatium omnium primum infinitarum Paraboloeidum, (sed rationalium, ut puto) qvales p r o p. 2 4. 2 5. explicuimus dedisse qvadraturam. Qvod non

22 pervenerat: B. Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, 1647, S. 243–319. 24 dedisse: vgl. den Brief von Fermat an Mersenne von Februar/März 1642, tlw. gedr. in M. Mersenne, *Tractatus mechanicus*, 1644, praefatio, § IV, Bl. a1 v°–a2 r° (*FO* I S. 195–198; Mersenne, *Correspondance* XI, S. 55–58).

miror, qvoniam id sine consideratione tangentium per solos numeros fieri potest, cum enim earum ordinatae procedunt ut qvadrata, cubi, qvadrato-qvadrata, etc. abscissarum; tantum opus erat regulam inveniri in numeris, qva potestatum summae darentur, qvalem Fermatio notam fuisse scio. Sed nec Paraboloides intermedias, qvarum ordinatae nullo modo sunt rationales, ad qvemcunqve axem referantur, (ut illam in qva ordinatarum qvadrata sunt ut cubi abscissarum) nec Hyperboloides, seu curvas in qvibus ordinatae aut earum potentiae, abscissis aut earum potentiis reciprocae sunt; ideo semper potuit mensurare. Qvarum figurarum dimensionem Wallisio ni fallor debemus. Qvanqvam enim non demonstratione sed inductione sua comprobavit, ut aliqvi arguunt, invenit tamen ea certe primus, artificio non vulgari, cum nemo ante ipsum qvod sciam, inductionibus hoc modo usus sit in Geometria. Qvoniam vero ista demonstrari Geometriae intererat, nec vero viderim qvi rem totam satis distincte ac generaliter exposuerit; praesertim cum circa spatia Hyperboloidum infinite longa, magnitudinis modo finitae, modo infinitae, spinae restarent, qvas liqvida admodum demonstratione sustulimus; ideo credidimus nos Geometris rem non ingratam facturos, si occasione usi rem omnem de integro ex nostris principiis repeteremus. Sed nunc ad ipsam paulatim Circuli Qvadraturam gradum facere tempus erit |, ubi duo tantum corollaria adjecerimus.

Coroll. 1. ⟨ex⟩ pro⟨p. 2⟩5

Adiicere operae pretium erit saepe ⟨in⟩ seqventibus propositionem hanc 25. sic efferri a nobis: posita parametro 1 et abscissa AG. (fig. . . .) posita x, ac ordinata GC existente

1	x	x^2	x^3	x^4
in Parallelogr.	Triang.	Parabola	Parab. Cub.	Parab. qqt.
	fore spatium MGCM			
$\frac{x}{1}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$

Coroll 2. ex prop. 23

Ad exemplum propositionis 25 aut Corollarii 2 circa figuras longitudine finitas analyticas simplices rationales sequens theorema ex prop. 23 generali de infinitis longitudine sive asymptotos habentibus demonstrari non difficulter posset. Posita parametro 1, et abscissa AG (fig. . . .) posita x et ordinata GC, existente

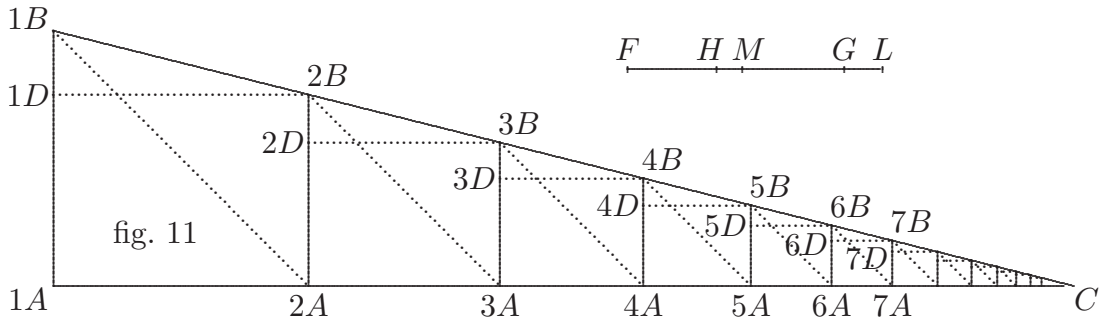
„	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	etc
„	in Antiparabola	in Antiparabola Cubica	in Antiparabola qqtica	
fore spatium longitudine infinitum MGCM aequ.				
„	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2x^2}$	$\frac{1}{3x^3}$	etc.

Unde patet quoque totum spatium utrin⟨qve⟩ asymptotum Hyperboloidis cuiusdam propositae prop. simplicis rationalis, (e. gr. eius cuius ordinata est $\frac{1}{x^2}$) asymptoto Hyperbolae vel Hyperboloidis proxime

7 Wallisio: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 64 u. 102–107, S. 52 f. u. 76–84 (*WO* I S. 395 u. 408–412). 18 fig. . . . : fig. 6, 7. 27 fig. . . . : fig. 8.

Propositio XXVI

„Maximus terminus progressionis Geometricae in infinitum decrescentis, est propor-
„tione medius inter maximam summam et maximam differentiam, vel quod idem
„est summa progressionis Geometricae in infinitum decrescentis est ad terminum
„primum, ut terminus primus ad differentiam primi a secundo.



[*Fig. 10*]

6 *Daneben:* 1*B*1*A* aequ. 1*A*2*A*. 2*B*2*A* aequ. 2*A*3*A*.

inferio⟨ris⟩ (nempe ipsi $\frac{1}{x}$ in hoc exemplo) per exponentem propositae (2) unitate minutum, (id est per 1. hoc loco) divisae in parametrum ductae aeqvari, et generaliter (ut loqvi soleo) Hyperboloidem qvamlibet rationalem prorsus ac paraboloidem esse altioris (ut paraboloidem inferioris) qvadratricem Nempe fig. ... si Curva 1C2C3C sit parabola Conica, et 1D2D3D Cubica, eiusdem parametri, erit tertia pars rectae 1B1D aeqv. spatio M1B1CM per parametrum diviso per Coroll. 1. At in fig. ... si curva 1D2D. sit Hyperbola Conica, et 1C2C Hyperboloides proxime altior rationalis scilicet et eiusdem parametri erit 1G2D aequal. spatio infinito M1G1CM per parametrum diviso per Coroll. 2. *(1)* at in fig. ... si curva 1D2D sit Hyperbola Conica *(2)* hic *nicht gestr. (3)* Haec cum prop. 40 de triangulo Arithmetico et harmonico non inutiliter conferentur. Usum huius corollarii vide ad prop. 43. sub sign. ∗∗. *erg.* | *gestr.* | Propositio *(a)* XXVII *(b)* XXVI *L* 1–593,4 *ursprüngliche Reihenfolge der beiden Propositionen getauscht; dazu am Rand in Höhe von S. 592 Z. 9:* NB. il faut transposer ces propositions et mettre la suivante a la place de cellecy, et cellecy a la place de la suivante *sowie am Rand in Höhe von Z. 1:* NB. *L*

11 fig. ... : fig. 6, 7. 12 fig. ... : fig. 8. 16 prop. 43: Gemeint ist das Scholium zu prop. XLIV. 17 ∗∗: Ein entsprechendes Verweiszeichen wurde nicht gefunden.

Variae hujus theorematis demonstrationes haberi possunt, ex quibus illam selegi, quae rem quodammodo oculis subjicit. Rectae $1A2A$ etc. C ad angulos rectos insistat $1A1B$ quae sit progressionis cujusdam geometricae in infinitum decrescentis terminus maximus sive primus, et ex puncto $1B$ ducatur recta $1B2A$ angulo $1A1B2A$ semirecto; rursusque ex $2A$ erigatur normaliter $2A2B$ progressionis ejusdem terminus a maximo secundus. Juncta $1B2B$ producatur, dum ipsi $1A2A$ productae, occurrat in C. Ducantur $2B3A$, $3A3B$, $3B4A$, $4A4B$, $4B5A$, $5A5B$, etc. ita ut $2B3A$, $3B4A$, $4B5A$ etc. sint parallelae ipsi $1B2A$; et rursus $3A3B$, $4A4B$, $5A5B$ etc. parallelae ipsi $1A1B$. Ob angulos $1A1B2A$, $2A2B3A$, etc. semirectos, ipsi $1A2A$ aequatur $1A1B$, et ipsi $2A3A$ aequatur $2A2B$, et ita reliquae jacentes erectis. Denique iisdem jacentibus parallelae et aequales ducantur $1D2B$, $2D3B$, $3D4B$ etc. Jam ob triangula similia, $1B1AC$, $2B2AC$, $3B3AC$ etc.; itemque ob triangula iisdem et inter se similia, $1B1D2B$, $2B2D3B$, $3B3D4B$ etc. erunt

$$\begin{array}{rlllll} & \text{ipsae} & 1D2B, & 2D3B, & 3D4B, & \text{etc.} \\ & \text{sive} & 1A2A, & 2A3A, & 3A4A, & \text{etc.} \\ \text{proportionales} & \text{ipsis} & 1AC, & 2AC, & 3AC, & \text{etc.} \end{array}$$

differentiae scilicet quantitatum, ipsis quantitatibus, patet enim inter $1AC$ et $2AC$ differentiam esse $1A2A$, et inter $2AC$ et $3AC$ differentiam esse $2A3A$, et ita porro. Si qua autem in serie differentiae sint ipsis quantitatibus proportionales constat seriem tam quantitatum quam differentiarum esse progressionis geometricae, quare

$$\left.\begin{array}{l}\text{ipsae } 1A2A,\ 2A3A,\ 3A4A \text{ etc,}\\ \text{vel ipsae } 1A1B,\ 2A2B,\ 3A3B \text{ etc.}\end{array}\right\}\ \text{erunt progressionis Geometricae in infinitum de-}$$

crescentis: Porro omnium $1A2A$, $2A3A$, $3A4A$, etc. Summa est tota $1AC$. nam semper quodlibet punctum, ut $4A$. $5A$. etc. cadit citra C. quia angulus ut $3A3B4A$, vel $4A4B5A$ etc. est minor angulo $3A3BC$, vel $4A4BC$ etc. nec ullum tamen punctum intra $1A$ et C. assignari potest, ultra quod versus C non cadat aliquod ex ipsis $3A$. $4A$. $5A$ etc. in infinitum continuatis, quoniam ipsae $C4A$, $C5A$ etc. quippe geometricae decrescentes

1 demonstrationes *(1)* prostant apud Geometras *(2)* haberi *L* 6 in C. | ajo rectam 1AC esse seriei Geometricae 1A1B, 2A2B, etc. in infinitum decrescentis summam. Qvod ita ostendemus: *gestr.* | ducantur *L*

1 demonstrationes: z. B. Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. II, prop. LXXXIII, S. 99 f. 19 constat: vgl. *a. a. O.*, lib. II, prop. LXXXI, S. 98 f.

tandem quantitate qualibet fiunt minores: adeoque si quis dicat puncta A, in infinitum continuata non desinere in ipsum C, intervallo tamen ab eo aberunt infinite parvo, sive error quovis assignabili errore minor erit; recta ergo $1AC$, summa est omnium $1A2A$, $2A3A$, $3A4A$, etc. vel omnium $1A1B$, $2A2B$, $3A3B$ etc. geometrice decrescentium. Est autem haec summa, $1AC$ ad $1A1B$ terminum maximum sive primum, ut $1D2B$ idem terminus maximus ad $1D1B$, differentiam maximam seu differentiam inter $1A1B$, et $2A2B$, terminum primum et secundum; terminus igitur maximus inter summam et differentiam maximam proportione medius erit. Q. E. D.

Propositio XXVII

„Diameter HB Circuli est ad BE, vel FG sinum versum arcus BOD in duplicata „ratione AC secantis arcus dimidii BO, ad ejus tangentem BC.

Sive si describatur centro A, radio AB semicirculus BDH, et ex puncto quolibet D in circuli circumferentia sumto ducatur DC ipsi tangenti verticis BC occurrens in C. et producatur sinus rectus DE usque in G hac conditione, ut EG sit aequalis ipsi CB; idemque in singulis circumferentiae circuli punctis praestando exurgat curva BGL; dico naturam hujus curvae, quae figuram Segmentorum Circuli facit talem quoque esse, ut Quadratum ab AC habeat eandem rationem ad quadratum a BC, quam habet diameter HB ad FG ordinatam Trilinei $BFGB$. Quod figurae segmentorum circuli $BEGB$ complemento est, seu ad ordinatam ipsi figurae segmentorum conjugatam.

Propter parallelas CB. DE. angulus BDE aequalis angulo CBD, hoc est angulo BAC, unde cum DEB et ABC recti sint, reliqui quoque DBE, et BCA aequantur, eruntque triangula DEB, ABC similia; eritque

ut AB ad BC sic DE ad EB.

unde quoque

ut quad. AB. ad quad. BC. sic quad. DE. ad quad. EB.

Sed quad. DE. aequale rectangulo HEB. Ergo

ut quad. AB. ad quad. BC. sic rectang. HEB ad quad. EB.

Sed rectang. HEB est ad quad. EB (cum habeant eandem altitudinem EB) ut HE ad

---

10 *Am Rand:* fig. [9.]

1 f. si ... sive *erg. L* 9 Propositio *(1)* XXVI *(2)* XXVII *L* 10 Diameter *(1)* Circuli est ad sinum versum in duplicata ratione secantis arcus dimidii, ad tangentem arcus integri *(2)* HB *L*

EB. Unde denuo erit

ut quad. AB, ad quad. BC sic HE ad EB.

et componendo

$$\text{ut } \underbrace{\text{quad. } AB + \text{quad. } BC}_{\text{quad. } AC}. \text{ ad quad. } BC. \text{ sic } \underbrace{HE + EB}_{\text{seu } HB \quad \text{seu } FG} \text{ ad } EB. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Propositio XXVIII.

„Iisdem quae prop. 27. positis rectae FG dimidiatae valor erit $\frac{\boxed{2}BF}{\boxed{1}AB} - \frac{\boxed{4}BF}{\boxed{3}AB}$ „$+\frac{\boxed{6}BF}{\boxed{5}AB} - \frac{\boxed{8}BF}{\boxed{7}AB}$ etc. Oportet autem AB non esse minorem quam BF.

Vel recta FG ordinata conjugata figurae segmentorum Circuli aequalis est duplo summae ex rectis numero infinitis *ts. rq. pa* etc. posito Ft, Fs, Fr, Fq, Fp, Fa etc. esse ordinatas a parte concava ad curvas, BtM parabolam quadraticam seu gradus secundi, et BsM quadrato-quadraticam seu gradus quarti, et BrM quadrato-cubicam seu gradus sexti, et BqM, gradus octavi, et BpM gradus decimi, et BaM gradus duodecimi etc. quae latere recto AB vel BN intra quadratum BNM describuntur.

(1) Nam ex naturis harum Paraboloidum supra explicatis p r o p. 2 4

quantitas, $+Ft \quad -Fs \quad +Fr \quad -Fq \quad +Fp \quad -Fa$ etc.

idem est, quod $+\underbrace{\frac{\boxed{2}BF}{\boxed{1}AB} - \frac{\boxed{4}BF}{\boxed{3}AB}} + \underbrace{\frac{\boxed{6}BF}{\boxed{5}AB} - \frac{\boxed{8}BF}{\boxed{7}AB}} + \underbrace{\frac{\boxed{10}BF}{\boxed{9}AB} - \frac{\boxed{12}BF}{\boxed{11}AB}}$ etc.

sive $+ \quad ts \quad + \quad rq \quad + \quad pa$ etc.

6 dimidiatae *erg. L* 7 oportet ... BF *erg. L* 18–594,1 etc. *(1)* Unde patet ts, rq, pa, etc. esse progressionis Geometricae, et ts ad rq, esse ut rq ad pa, etc. nempe in ratione $\boxed{4}$AB ad $\boxed{4}$BF | decrescente qvia AB major qvam BF *erg.* | . Ergo p e r p r o p. 2 6. erit summa omnium, seu ts+rq+pa | qvam vocabimus Σ *erg.* | ad maximum terminum ts, ut ts ad ts − rq. id est ut $\boxed{4}$AB ad $\boxed{4}$AB − $\boxed{4}$BF, qvoniam ts ad rq ut $\boxed{4}$AB ad $\boxed{4}$BF, ut diximus. Est autem differentia qvadrato qvadratorum ab AB, et a BF, idem qvod factum ex summa qvadratorum ab iisdem, ducta in eorundem qvadratorum differentiam. Cum ergo sit ts ad Σ, vel ts in AB ad Σ in AB, ut $\boxed{4}$AB − $\boxed{4}$BF ad $\boxed{4}$AB, erit in composita ratione ex his duabus $\boxed{2}$AB + $\boxed{2}$BF ad $\boxed{2}$AB et $\boxed{2}$AB − $\boxed{2}$BF ad $\boxed{2}$AB. *(a)* ipsa autem qvantitas ts est ad AB *(b)* ipsum autem rectangulum sub ts in AB est ad $\boxed{2}$BF etiam ut $\boxed{2}$AB − $\boxed{2}$BF ad $\boxed{2}$AB. Erit ergo rectang. sub ts. in AB. ad rectang. sub Σ in AB in composita ratione ex ratione $\boxed{2}$AB + $\boxed{2}$BF ad $\boxed{2}$AB, et ratione rectanguli sub ts in AB ad $\boxed{2}$BF *(2)* (2) *L*

(2) ts est ad rq ut $\boxed{4}AB$ ad $\boxed{4}BF$. Nam valor ipsius ts a r t i c. 1. multiplicatus per $\boxed{4}BF$, divisus per $\boxed{4}AB$ dat valorem ipsius rq.

(3) rq est ad pa etiam ut $\boxed{4}AB$ ad $\boxed{4}BF$ eandem ob rationem. Idemque est in caeteris.

(4) Ergo ts est ad rq ut rq ad pa per a r t i c. 2. 3. idemque est in caeteris sequentibus.

(5) Ergo s e r i e s ts. rq. pa. etc. e s t p r o g r e s s i o n i s G e o m e t r i c a e, e t q u i d e m d e c r e s c e n t i s, quoniam per artic. 2. 3. est in ratione $\boxed{4}AB$ ad $\boxed{4}BF$, quae est decrescens, quia AB est major quam BF.

(6) Summa hujus seriei, seu $ts + rq + pa$, etc. vocetur Σ.

(7) Ergo p e r p r o p. 2 6. Σ est ad ts ut ts ad $ts - rq$.

(8) $ts - rq$ est ad ts ut $\boxed{4}AB - \boxed{4}BF$ ad $\boxed{4}AB$ quia p e r a r t i c. 2. ts est ad rq ut $\boxed{4}AB$ ad $\boxed{4}BF$.

(9) Ratio $\boxed{4}AB - \boxed{4}BF$ ad $\boxed{4}AB$ composita est ex ratione $\boxed{2}AB + \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$, et ex ratione $\boxed{2}AB - \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$ quia differentia quadratoquadratorum est factum ex summa quadratorum in differentiam, ut notum est; et $\boxed{4}AB$ est factum ex $\boxed{2}AB$ in $\boxed{2}AB$. quod adhuc notius est.

(10) Ergo ratio ts ad Σ vel ts in AB ad Σ in AB etiam ex ratione $\boxed{2}AB + \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$ et ex ratione $\boxed{2}AB - \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$ composita erit p e r a r t i c. 7. 8. 9.

(11) Porro rectangulum sub ts in AB est ad $\boxed{2}BF$, in ratione $\boxed{2}AB - \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$ ut patet ex valore ipsius ts a r t i c. 1.

(12) Ergo ratio rectanguli sub ts in AB ad rectang. sub Σ in AB composita est ex rationibus duabus, $\boxed{2}AB - \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$, et $\boxed{2}BF$ ad rectang. sub Σ in AB. At eadem ratio p e r a r t i c. 1 0. composita est ex rationibus $\boxed{2}AB - \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$, et $\boxed{2}AB + \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$. Demta ergo utrinque communi ratione $\boxed{2}AB - \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$,

(13) erunt rationes, $\boxed{2}BF$ ad Σ in AB, et $\boxed{2}AB + \boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB$, aequales.

(14) Ergo Σ ad AB, vel dupla Σ ad BH ut $\boxed{2}BF$ ad $\boxed{2}AB + \boxed{2}BF$ vel (quia ex constructione BF aequalis ipsi BC,) ut $\boxed{2}BC$ ad $\boxed{2}AC$. Sed p e r p r o p. 2 7 FG est etiam ad BH, ut $\boxed{2}BC$ ad $\boxed{2}AC$.

(15) Ergo FG aequalis est duplae Σ, seu dimidia FG aequalis ipsi Σ, sive per a r t i c. 6. summae rectarum $ts + rq + pa$, adeoque et valori harum ex a r t i c. 1.

$$\underbrace{\frac{\boxed{2}\,BF}{\boxed{1}\,AB} - \frac{\boxed{4}\,BF}{\boxed{3}\,AB}}_{ts} + \underbrace{\frac{\boxed{6}\,BF}{\boxed{5}\,AB} - \frac{\boxed{8}\,BF}{\boxed{7}\,AB}}_{rq} \text{ etc. aequal. } FG \text{ dimidiae. Q. E. D.}$$

seu

Propositio XXIX

„Spatii $BFGB$ (seu trilinei quod $BEGB$ figurae segmentorum circuli complemento „est,) dimidium; sive huic dimidio aequale per prop. 10 trilineum Circulare $DCBOD$ „aequale est summae hujus seriei infinitae decrescentis $\frac{\boxed{3}\,BC}{3\boxed{1}\,AB} - \frac{\boxed{5}\,BC}{5\boxed{3}\,AB} + \frac{\boxed{7}\,BC}{7\boxed{5}\,AB} - \frac{9\boxed{8}\,BC}{9\boxed{7}\,AB}$ etc. Oportet autem AB non esse minorem quam BC.

Nam FG dimidia aequalis, per prop. 28.

$$Ft - Fs + Fr - Fq \text{ etc.}$$

et $(F)(G)$ dimidia aequalis est, per eandem

$$(F)(t) - (F)(s) + (F)(r) - (F)(q) \text{ etc.}$$

Ergo dimidia summa omnium FG, $(F)(G)$ etc. usque ad B, seu dimidium spatium $BFG(G)B$ aequale summae omnium

$$\left.\begin{array}{cccc} +\,Ft & -\,Fs & +\,Fr & -\,Fq \\ (F)(t) & (F)(s) & (F)(r) & (F)(q) \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ etc.}$$

seu spatiis Paraboloidum

$$+BFt(t)B - BFs(s)B + BFr(r)B - BFq(q)B \text{ etc.}$$

Jam horum spatiorum ultimae ordinatae assumtae seu bases,

$$Ft - Fs + Fr - Fq \text{ etc. (aequal. } \frac{1}{2}FG)$$

6 f. *Am Rand:* [sive posita BC vel BF, aequ. t. et AB aequ. 1. fiet aequ. $\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9}$ etc. modo sit t minor qvam 1. Sin sit t major qvam 1, utilis erit mutatis mutandis series $\frac{t}{1} - \frac{1}{1t} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5}$ etc. Qvanqvam ea non sit opus, cuius posterioris seriei fundamentum in scholio indicare suffecerit, priore tamen distincte in demonstrationis hic subiectae contextu ostensa] *gestr. L* 7 oportet ... BC *erg. L*

---

22 f. $\frac{t}{1}$ ... etc.: Richtig wäre $\frac{t}{1} + \frac{1}{1t} - \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{5t^5}$ etc. 23 scholio: s. das ergänzte Scholium S. 596 Z. 9 – S. 598 Z. 5.

per prop. 24. 28. valent

$$\frac{\boxed{2}\,BF}{\boxed{1}\,AB} - \frac{\boxed{4}\,BF}{\boxed{3}\,AB} + \frac{\boxed{6}\,BF}{\boxed{5}\,AB} - \frac{\boxed{8}\,BF}{\boxed{7}\,AB} \text{ etc.}$$

Ergo per prop. 25. eorum summa seu spatia paraboloidum valebunt

$$\frac{\boxed{3}\,BF}{3\boxed{1}\,AB} - \frac{\boxed{5}\,BF}{5\boxed{3}\,AB} + \frac{\boxed{7}\,BF}{7\boxed{5}\,AB} - \frac{\boxed{9}\,BF}{9\boxed{7}\,AB} \text{ etc.}$$

Ergo et summa omnium $\frac{1}{2}FG$, seu spatium dimidium $BFG(G)B$ quod his paraboloidum spatiis alternatim affirmatis negatisque id est additis et subtractis aequale ostensum est; ejusdem valoris erit adeoque pro BF ponendo ipsi aequalem BC, spatium dimidium dictum seriei in propositione enuntiatae aequabitur. Q. E. D.

Scholium.

Quod ope progressionis Geometricae demonstravimus, poteramus et demonstrare per divisiones in infinitum continuatas pulcherrimo Nic. Mercatoris Holsati e Societate Regia Britannica invento. Quod ita non ineleganter ostendetur ope aequationum, nempe sit quantitas $\frac{a}{b+c}$, ea erit: aeq. $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2+bc}$ (ut patebit reducendo has duas fractiones ad unum denominatorem). Jam ponamus ac aequ. (a) et b^2aequ. (b) et bc aequ. (c) fiet $\frac{a}{b+c}$ aequ. $\frac{a}{b} - \frac{(a)}{(b)+(c)}$. et quia $\frac{(a)}{(b)+(c)}$ eodem modo componitur quo $\frac{a}{b+c}$[,] erit et $\frac{(a)}{(b)+(c)}$ aequ. $\frac{(a)}{(b)} - \frac{(ac)}{(b^2)+(bc)}$. Est autem $\frac{(a)}{(b)}$ aequ. $\frac{ac}{b^2}$. ergo $\frac{a}{b+c}$. erit aequ. $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{(ac)}{(b^2)+(bc)}$. et ponendo rursus (ac) aequ. $((a))$ et (b^2) aequ. $((b))$ et (bc) aequ. $((c))$ fiet $\frac{(ac)}{(b^2)+(bc)}$ aequ. $\frac{((a))}{((b))+((c))}$ sive aequal. $\frac{((a))}{((b))} - \frac{((ac))}{((b^2))+((bc))}$. Est autem $\frac{((a))}{((b))}$ aequ. $\frac{(ac)}{(b^2)}$ aequ. $\frac{acbc}{b^4}$ aequ. $\frac{ac^2}{b^3}$ et fiet $\frac{a}{b+c}$ aequ. $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{((ac))}{((b^2))+((bc))}$ et

1 prop. 24. 27. *L ändert Hrsg.* 9–598,5 Scholium ... EM *erg. L*

12 invento: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668.

hanc residuam fractionem quantumlibet decrescentem eodem prorsus modo resolvendo in infinitum habebitur $\frac{a}{b+c}$ aequ. $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4}$ etc. Ergo si ponamus, $-\gamma$ aequ. c. tunc mutatis signis imparium dimensionum ipsius c, fiet $\frac{a}{b-\gamma}$ aequ. $\frac{a}{b} + \frac{a\gamma}{b^2} + \frac{a\gamma^2}{b^3} + \frac{a\gamma^3}{b^4}$ etc. quod coincidit cum prop. 26.

Si ponamus a aequ. BF^2 et c aequ. BF^2. et b aequ. AB^2 sive si loco $\frac{a}{b+c}$ proponatur $\frac{BF^2}{AB^2+BF^2}$. fiet: $\frac{BF^2}{AB} - \frac{BF^4}{AB^3} + \frac{BF^6}{AB^5}$ etc. prorsus ut expressimus ac demonstravimus prop. 28. Oportet autem series istas esse decrescentes. Simile quiddam ad radicum purarum vel affectarum extractiones accommodari potest in numeris literisve, nam et in illis divisio quaedam locum habet, quod jam dudum exemplis quibusdam expertus sum, (ob eos qui ex mea Circuli expressione sequi putabant Circulum esse quadrato diametri commensurabilem) etiam quantitates irrationales, e. g. diagonalem in quadrato per infinitam seriem rationalium numerorum efferri posse. Sed haec Clarissimum Virum Isaacum Neutonum ingeniose ac feliciter prosecutum, nuper accepi a quo praeclara multa theoremata expectari possunt.

Porro si contra ponatur c aequ. AB^2 et b aequ. BF^2, manente a aequ. BF^2 fiet $\frac{a}{b+c}$ aequ. $\frac{BF^2}{BF^2+AB^{[2]}}$ aequ. $1 - \frac{AB^2}{BF^2} + \frac{AB^4}{BF^4}$ etc. quemadmodum ante aequ. $\frac{BF^2}{AB^2} - \frac{BF^4}{AB^4} + \frac{BF^6}{AB^6}$ etc. sive ponendo AB constantem sive parametrum aequ. 1 et BF vel BC aequ. t. tunc priore modo supra posito $\frac{FG}{2}$ sive $\frac{t^2}{1+t^2}$. fiet aequ. $t^2 - t^4 + t^6$ etc. secundum prop. 28 et summa omnium $\frac{FG}{2}$ sive area dimidii spatii $BFGB$, erit $\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}$ et ad

2 etc. | modo residua fractio composita progrediendo, infra qvamlibet qvantitatem datam diminuatur *gestr.* | Ergo L

7–12 Simile ... posse: vgl. VII, 3 N. 32 S. 346 f., N. 33 S. 348–352 und N. 38_{15} S. 518–524. 10 eos: z. B. Huygens; vgl. dessen Brief an Leibniz vom 6. November 1674, III, 1 N. 40 S. 170 f. 13 accepi: sog. erster Brief Newtons für Leibniz, Newton an Oldenburg für Leibniz und Tschirnhaus, 13. (23.) Juni 1676, III, 1 N. 88_5 S. 533–554, den Leibniz am 24. August 1676 erhielt.

summam omnium $\frac{FG}{2}$ seu aream spatii dimidii $BFGB$ mutatis mutandis serviet series $\frac{t}{1} - \frac{1}{1t} + \frac{1}{3t^3}$ etc. ut probari poterit ex coroll. 2. prop. 25. Ex quibus expressionibus prior serviet cum t minor quam 1. posterior servit cum major est ⟨qu⟩anquam sufficiet prior sola quoniam si arcus $B(D)M$ ⟨fig. 9.⟩ sit major quadrante sufficit considerare excessum $(D)M$.

Propositio XXX

„Si a dimidio Rectangulo CBE sub BE sinu verso arcus integri BOD et tangente „BC semiarcus BO, auferatur series decrescens

$$„\quad \frac{\boxed{3}\,BC}{3\boxed{1}\,AB} - \frac{\boxed{5}\,BC}{5\boxed{3}\,AB} + \frac{\boxed{7}\,BC}{7\boxed{5}\,AB} - \frac{\boxed{9}\,BC}{9\boxed{7}\,AB} \text{ etc.}$$

„restabit segmentum circuli arcu integro ejusque subtensa contentum: Oportet au- „tem arcum BOD non esse quadrante majorem.

Nam in figura eadem, 9, si a dimidio rectangulo BEG vel CBE, id est a triangulo DCB auferatur trilineum $DCBO$, id est per praecedentem, summa seriei in propositione hac enuntiatae, restabit utique segmentum $DBOD$. Oportet autem arcum BOD non esse majorem quadrante $B(D)$, quoniam alioqui BC tangens semiarcus, major foret quam AB radius. Quod propositione 28. 29. vetitum est. Si D cadat in (D), seu si BOD et $B(D)$ aequales, sive si ipse arcus sit quadrans, patet fore $B(C)$ aequalem $A(D)$, seu AB.

Scholium

Servit haec propositio ad portiones a Circulo ejusve segmento abscindendas earumque magnitudinem calculandam. Sunt tamen in eo negotio compendia quaedam quae hoc loco exponere nimis prolixum foret. Adde infra prop. 48. cor. 3.

4 BEM *L ändert Hrsg.* 5 EM *L ändert Hrsg.* 12 9, *erg. L* 15–17 E *L ändert Hrsg. viermal zu* (D) 19 f. abscindendas *(1)* qvae ad residuum vel totum datam habent rationem *(2)* earumqve *L* 21 adde ... 3. *erg. L*

---

2 $\frac{t}{1} - \frac{1}{1t} + \frac{1}{3t^3}$ etc.: Richtig wäre $\frac{t}{1} + \frac{1}{1t} - \frac{1}{3t^3}$ etc. 2 coroll. 2. prop. 25: Das Korollar ist gestrichen; s. die Lesart zu S. 588 Z. 22 – S. 590 Z. 1.

Propositio XXXI.

„Si radius Circuli sit AB et arcus propositi semiquadrante minoris, BO, sit tangens „BC, erit magnitudo arcus ipsius

$$„\quad \frac{\boxed{1}BC}{1\boxed{0}AB} - \frac{\boxed{3}BC}{3\boxed{2}AB} + \frac{\boxed{5}BC}{5\boxed{4}AB} - \frac{\boxed{7}BC}{7\boxed{6}AB} + \frac{\boxed{9}BC}{9\boxed{8}AB} - \frac{\boxed{11}BC}{11\boxed{10}AB} \text{ etc.}$$

$\boxed{1}BC$ idem est quod BC, dignitas scilicet prima a recta BC, cum secunda sit $\boxed{2}BC$, seu quadratum a BC. At $\boxed{0}AB$. idem est quod 1. dignitas scilicet nulla a AB seu dignitas cujus exponens est 0. Quod ex hoc schemate intelligetur:

exponentes	0	1	2	3	4
dignitates:	1	2	4	8	16
vel	1	3	9	27	81
vel	1	latus	quad.	cub.	qquad.

Itaque $\frac{\boxed{1}BC}{1\boxed{0}AB}$. idem est quod BC. Scribere tamen priore modo maluimus, ut seriei progressio magis appareret. Sensus ergo est: Si a tangente arcus semiquadrante minoris auferatur triens Cubi tangentis divisus per quadratum radii; residuo addatur quinta pars surdesolidi seu quintae dignitatis tangentis divisa per quadrato-quadratum radii; summae rursus detrahatur septima pars septimae dignitatis tangentis divisa per sextam dignitatem radii; idemque perpetuo factum intelligatur, proveniet magnitudo arcus. Demonstratio haec est: A trapezio circumscripto, $ADCB$ (circumscripto inquam sectori $ADOB$, super arcu DOB, qui dati BO duplus est;) id est a rectangulo ABC sub radio et tangente, auferatur trilineum $DCBO$ restabit sector, $ADOB$ qui ad radium applicatus seu per radium divisus, dabit (ex Archimede) dimidium arcum DOB, seu arcum BO. Ex area autem trilinei prop. 29. inventa, patet rectangulum sub AB radio, et BC tangente, trilineo minutum, seu sectorem $ADOB$ esse

$$AB \text{ in } BC, -\frac{\boxed{3}BC}{3\boxed{1}AB} + \frac{\boxed{5}BC}{5\boxed{3}AB} - \frac{\boxed{7}BC}{7\boxed{5}AB} \text{ etc.}$$

Quo valore per AB diviso prodibit valor arcus BO,

$$BC - \frac{\boxed{3}BC}{3\boxed{2}AB} + \frac{\boxed{5}BC}{5\boxed{4}AB} - \frac{\boxed{7}BC}{7\boxed{6}AB} \text{ etc. Q. E. D.}$$

21 Archimede: ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*, prop. I.

Scholium

Hoc theorema totius tractationis nostrae palmarium est: ejusque causa reliqua scripsimus. Series longitudine infinitas, magnitudine finitas, esse quantitates veras, multis exemplis ostendi potest: imprimis vero manifeste exemplo progressionum Geometricarum, de quibus supra. Progressionibus autem geometricis et nostrae nituntur. At inquies magnitudo quaesita sic non potest exhiberi, quoniam in nostra potestate non est progredi in infinitum. Fateor: neque enim eam constructione quadam geometrica exhibere promitto, sed expressione Arithmetica sive analytica. Seriei enim, licet infinitae, natura intelligi potest, paucis licet terminis tantum intellectis, donec progressionis ratio appareat. Qua semel inventa frustra progredimur, quoties de mente potius illustranda, quam de operatione quadam mechanica perficienda agitur. Itaque si quis veram relationem analyticam generalem quaerit quae inter arcum et tangentem intercedit, is quidem in hac propositione habet, quicquid ab homine fieri potest ut infra demonstrabo. Habet enim aequationem simplicissimi generis quae incognitae quantitatis magnitudinem exprimit cum hactenus apud geometras appropinquationes tantum, non vero aequationes pro arcu circuli demonstratae extent. Ut taceam ne appropinquationes rationales cuilibet arcui aut portioni circulari communes a quoquam fuisse datas. Quare nunc primum hujus aequationis ope arcus circulares, et anguli instar linearum rectarum analytico calculo tractari possunt: et si quando contemplationem ad praxin referre licebit, operationes trigonometricae, ingenti geometriae miraculo sine tabulis perfici poterunt, errore quantumlibet parvo.

Propositio XXXII.

„Circulus est ad Quadratum circumscriptum, sive arcus Quadrantis ad Diametrum, „ut $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. ad unitatem.

15–17 cum ... datas *erg. L*

13 ut infra demonstrabo: s. u. prop. LI.

Sit arcus BO octava pars circumferentiae circuli, erit tangens ejus BC aequalis radio AB vel AE. Ergo in p r o p. 3 1. pro BC ponendo AB, arcus BO erit: $\frac{AB}{1} - \frac{AB}{3} + \frac{AB}{5} - \frac{AB}{7} + \frac{AB}{9} - \frac{AB}{11}$ etc. Ergo $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. est ad 1. ut arcus semiquadrantis BO est ad radium AB, vel ut integer arcus quadrantis BE est ad diametrum BH, sive (ex inventis Archimedeis) ut circulus $EBNH$ est ad CM quadratum circumscriptum. Q. E. D.

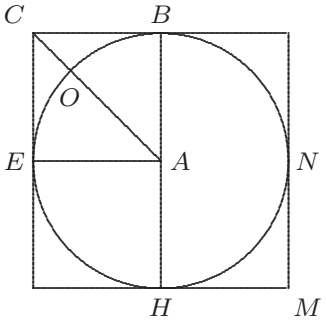
Scholium.

Ecce veram tandem in numeris Circuli Quadraturam, qua nescio an simplicior dari possit, quaeque mentem afficiat magis. Hactenus appropinquationes tantum proditae sunt, verus autem valor nemini quod sciam visus nec a quoquam aequatione exacta comprehensus est, quam hoc loco damus, licet infinitam, satis tamen cognitam, quoniam simplicissima progressione constantem uno velut ictu mens pervadit. Equidem posteritati sine certa demonstratione praejudicare non licet. Sunt tamen egregii Viri qui de meliore desperant ex quo hanc videre: alii ita judicant, si qua sperari possit quadratura Geometrica plena, aditum ad eam hinc apertum videri, praesertim cum aliarum serierum huic simillimarum summa absolute haberi possit, ut infra dicam prop. 42.

2 AE vel AE *L ändert Hrsg.* 15 plena, *(1)* non aliunde facilius qvam hinc petendam *(2)* aditum *L* 16 dicam. | prop. 42 *erg.* | | Ego aliqvid amplius adjicio, compertam mihi rationem per qvam aut inveniri hujus seriei summa possit, aut demonstrari impossibilitas inveniendi. Sed calculi analytici ingentes, qvibus praeparanda materia est, hactenus me deterruere. *gestr.* | *L*

---

1 arcus BO: Leibniz bezieht sich im Folgenden auf eine nicht aufgefundene Figur, die Fig. 5 von N. 28 S. 332 Z. 1 entspricht:



5 ex inventis: Archimedes, *Dimensio circuli*, prop. I. 13 Viri: vgl. Tschirnhaus an Oldenburg, 1. September 1676, III, 1 N. 92 S. 593f. 14 alii: Gemeint ist wohl u. a. Huygens, vgl. III, 1 N. 40 S. 170 f.

Propositio XXXIII.

„Series fractionum quarum numerator est constans, nominatores vero progressionis „arithmeticae sunt; est progressionis harmonicae.

Sint tres termini quilibet talis seriei, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$. ajo eos esse progressionis harmonicae, seu differentiam inter primum et secundum, seu $\frac{c}{a} - \frac{c}{a+b}$ esse ad differentiam inter secundum et tertium seu $\frac{c}{a+b} - \frac{c}{a+2b}$, ut est primus ad tertium, seu $\frac{c}{a}$ ad $\frac{c}{a+2b}$. Nam $\frac{c}{a} - \frac{c}{a+b}$ est $\frac{cb}{a \text{ in } \overline{a+b}}$. et eodem modo $\frac{c}{a+b} - \frac{c}{a+2b}$ est $\frac{cb}{\overline{a+b}, \text{ in } \overline{a+2b}}$. Est autem $\frac{cb}{a \text{ in } \overline{a+b}}$ ad $\frac{cb}{\overline{a+b} \text{ in } \overline{a+2b}}$ (dividendo utrumque per $\frac{b}{a+b}$) ut $\frac{c}{a}$ ad $\frac{c}{a+2b}$, seu ut terminus primus ad ultimum. Quod asserebatur. Hinc series $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. etc. vel $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{13}$. etc. vel $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{11}$. $\frac{1}{15}$. etc. aliaeve similes progressionis harmonicae sunt. Ut $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{13}$, sunt tres termini harmonice proportionales, quia coincidunt cum his: $\frac{c}{a}$. $\frac{c}{a+b}$. $\frac{c}{a+2b}$. posito c esse 1. a esse 5. et b esse 4. Idem in tribus aliis continuis quibuscunque sumtis ostendi potest.

Propositio XXXIV.

„Posito Quadrato Diametri 1. Circulus est differentia duarum serierum progressionis „harmonicae, $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13}$ etc., et $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15}$ etc.

Quoniam enim posito Quadrato 1. Circulus est $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. per prop. 32, erit utique idem cum differentia harum duarum serierum, $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13}$ etc. et $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15}$ etc. Una quaeque autem harum duarum serierum progressionis harmonicae est per prop. 33. Circulus ergo duarum serierum harmonicarum differentia erit.

6 inter primum et *L ändert Hrsg.* 10–13 ut ... potest *erg. L*

Propositio XXXV.

„Circulus est ad Quadratum inscriptum sive arcus quadrantis est ad radium ut

„ $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195}$ etc. ad $\frac{1}{4}$

„ seu ut fractiones a quadratis duplorum ad fractionem quadrati

„ imparium unitate minutis: duplorum imparium primi

„ $\frac{1}{4-1} + \frac{1}{36-1} + \frac{1}{100-1} + \frac{1}{196-1}$ etc. ad $\frac{1}{4}$ seu ut

„ $\frac{1}{4,1,,-1} + \frac{1}{4,9,,-1} + \frac{1}{4,25,,-1} + \frac{1}{4,49,,-1}$ etc. ad $\frac{1}{4}$ seu ut

„ $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{9-\frac{1}{4}} + \frac{1}{25-\frac{1}{4}} + \frac{1}{49-\frac{1}{4}}$ etc. ad 1.

(1) Circulus enim est ad Quadratum circumscriptum,

ut $\underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{7}}+\underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{11}}$ etc. ad 1. Ergo ad ejus dimidium, seu inscriptum

ut $\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99}$ etc. ad $\frac{1}{2}$, sive

ut $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ etc. ad $\frac{1}{4}$.

Nominatores autem provenientes 3. 35. 99. etc. esse quadratos duplorum imparium unitate minutos sic ostendetur:

(2) Numeros ipsos ordine sumtos

vocemus N, nempe	0 vel 1 vel 2 vel 3 vel 4 etc.
Ergo pares $2N$, nempe	0 vel 2 vel 4 vel 6 vel 8 etc.
Et impares $2N+1$.	1 vel 3 vel 5 vel 7 vel 9 etc.
Et duplos parium auctos unitate:	
seu $4N+1$	1 vel 5 vel 9 vel 13 vel 17 etc.
Et duplos imparium auctos unitate,	
seu $4N+3$	3 vel 7 vel 11 vel 15 vel 19 etc.
Ergo $\frac{1}{4N+1} - \frac{1}{4N+3}$ erit	$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ vel $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc.
sive	$\frac{2}{3}$ vel $\frac{2}{35}$ vel $\frac{2}{99}$ etc.

Est autem $\frac{1}{4N+1} - \frac{1}{4N+3}$ idem quod $\frac{4N+3-4N-1}{4N+1,\ \text{in},\ 4N+3}$ vel $\frac{2}{16N^2+16N+3}$ vel $\frac{2}{16N^2+16N+4,-1}$ id est $\frac{2}{3}$ vel $\frac{2}{35}$ vel $\frac{2}{99}$ etc.

Ergo $16N^2+16N+4,-1$ est 3 vel 35 vel 99 etc.

Est autem $16N^2+16N+4$ quadratum a $4N+2$, id est ab impare $2N+1$. duplicato. Et $16N^2+16N+4,-1$ est quadratum ab impare duplicato unitate minutum. Ergo et numeri, 3. 35. 99. etc. erunt quadrati duplorum imparium minuti unitate, quod asserebatur.

Propositio XXXVI

„Summa seriei infinitae $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. est $\frac{1}{2}$. Numeri autem 3. 15. 35. „63. 99. sunt quadrati parium, unitate minuti.

Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ etc. sit A.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}$ etc. sit B.

et $\frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{2}{63}$ etc. erit $2B$.

A serie A auferatur series $2B$ singuli scilicet termini a singulis respondentibus, residuum erit $A-2B$. Ut si ab $\frac{1}{1}$ auferas $\frac{2}{3}$ restabit $\frac{1}{3}$. Si ab $\frac{1}{3}$ auferas $\frac{2}{15}$ restabit $\frac{1}{5}$; si ab $\frac{1}{5}$ auferas $\frac{2}{35}$ restabit $\frac{1}{7}$ etc. Quod si continues, experieris semper futurum ut termini seriei A, ordine redeant; quemadmodum nullo negotio demonstrari generaliter potest, ad modum propositionis praecedentis, sed in re clara verbis parco.

Ergo $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ etc. erit $A-2B$.

Sed $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ etc. est etiam $A-1$.

Habetur ergo aequalitas inter $A-2B$ et $A-1$. sive (sublato utrinque A,) inter $2B$ et 1 vel inter B et $\frac{1}{2}$. Q. E. D.

21–605,1 Q. E. D. | Scholium Res satis mira videbitur seriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. Summam iniri posse, eamqve esse $\frac{1}{2}$: Seriem autem ex ipsa excerptam per saltus, nempe $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc exprimere

Propositio XXXVII.

„Si $\frac{1}{2}$ vel quod idem est series $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}$ repraesentet Quadratum „circumscriptum, tunc series $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. e priore excerpta per saltus, una „quantitate semper omissa, repraesentabit circulum inscriptum.

Nam si Quadratum inscriptum sit $\frac{1}{4}$, circulus erit $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. per prop. 35. Quadratum autem circumscriptum quippe inscripti duplum erit $\frac{1}{2}$. Sed $\frac{1}{2}$ idem est quod summa hujus seriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. per prop. 36. Quare si haec series repraesentet Quadratum circumscriptum, excerpta ex illa, ut dixi repraesentabit Circulum. Q. E. D.

Propositio XXXVIII.

„Si Quadratum radii valeat $\frac{1}{2}$. Quadrans ei inscriptus $ABOE$ valebit $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ „etc. et Trilineum $CBOE$, quod quadranti complemento est valebit $\frac{1}{15}+\frac{1}{63}+\frac{1}{143}$.

Nam Quadrans est ad quadratum radii ut circulus ad quadratum diametri; id est per prop. 37, ut $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. ad $\frac{1}{2}$, vel per prop. 36. ut $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. ad $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}$ etc. Quare si quadratum radii sit $\frac{1}{2}$, sive $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}$ etc. tunc quadrans erit $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. Auferatur hic valor a priore restabit $\frac{1}{15}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. valor Trilinei $CBOE$, quod etiam restat sublato quadrante $ABOE$, a quadrato radii circumscripto $BAEC$.

magnitudinem circuli cujus Quadratum inscriptum sit $\frac{1}{4}$, *(1)* vel cuius qua *(2)* ut ostendimus prop. 35. Cumqve posito quadratum *gestr.* | Propositio *L* 11 *(1)* Trilineum Circulare CBOE, quod quadranti ABOE complemento est, valet $\frac{1}{15}+\frac{1}{63}+\frac{1}{143}$ etc. *(2)* Si *L*

11 *ABOE*: s. Fig. in Erl. zu S. 601 Z. 1.

Propositio XXXIX

„Summa Seriei infinitae $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ etc. est 2. Numeri autem 1. 3. 6.
„10. 15. 21. etc. sunt trigonales.

Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ etc. sit A

$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ etc. sit $\frac{2}{1}B$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ etc. erit B.

A serie A auferatur series B singuli termini a singulis respondentibus restabit series $A-B$, ut si ab 1. auferas $\frac{1}{2}$ restabit $\frac{1}{2}$. Si ab $\frac{1}{2}$ auferas $\frac{1}{6}$ restabit $\frac{1}{3}$. Si ab $\frac{1}{3}$ auferas $\frac{1}{12}$ restabit $\frac{1}{4}$. Idemque semper futurum est ut numeri seriei A ordine redeant, quemadmodum generaliter demonstrari posset ad modum propositionis 35. Sed in re clara verbis parco.

Ergo $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc. erit $A-B$.

Sed eadem series $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc. etiam $A-1$.

Habetur ergo aequalitas inter $A-B$, et $A-1$, sive inter B et 1, sive inter $2B$ et 2. Ergo $2B$ sive $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ etc. valebit 2. Q. E. D.

Propositio XL.

„Sit Triangulum Harmonicum, sive cujus numeri sint reciproci numerorum trianguli
„Arithmetici a Pascalio editi.

10 34 *L ändert Hrsg.*

18 editi: B. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 (*PO* III S. 445–598).

T r i a n g u l u m a r i t h m e t i c u m

Numeri Naturales	Trigonales	Pyramidales	Trigono-trigonales	Trigono-pyramidales	Pyramido-pyramidales	Trigono-trigono-trigonales
1	1	1	1	1	1	etc.
2	3	4	5	6	etc.	
3	6	10	15	etc.		
4	10	20	etc.			
5	15	etc.				
6	etc.					
etc.						

T r i a n g u l u m h a r m o n i c u m

Naturalium	Trigonalium	Pyramidalium	Trigono-trigonalium	Trigono-pyramidalium	Pyramido-pyramidalium	R e c i p r o c i
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	etc.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	etc.	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	etc.		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	etc.			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	etc.				
$\frac{1}{6}$	etc.					
etc.						

„Erunt serierum trianguli Harmonici in infinitum decrescentium summae

„	$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	etc.

Demonstrabitur ad modum propositionis praecedentis, nam quemadmodum ostendimus $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ etc. esse $\frac{2}{1}$. ita demonstrabitur $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ etc. esse $\frac{3}{2}$.

Nam series proxime praecedens $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ etc. sit A

et series proposita $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}$ etc. sit $\frac{3}{2}B$.

Ergo $\frac{2}{3}+\frac{2}{12}+\frac{2}{30}+\frac{2}{60}+\frac{2}{105}$ etc. erit B.

Auferantur a singulis quantitatibus seriei A, singulae respondentes seriei B; residui erunt termini sequentes ejusdem seriei A, ut $\frac{1}{1}-\frac{2}{3}$ dat $\frac{1}{3}$, et $\frac{1}{3}-\frac{2}{12}$ dat $\frac{1}{6}$, et $\frac{1}{6}-\frac{2}{30}$ dat $\frac{1}{10}$, et ita porro. Quod semper futurum generaliter ostendere non difficile est.

Ergo $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ etc. erit $A-B$.

At $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ etc. est etiam $A-1$.

Ergo aequabuntur $A-B$, et $A-1$. sive B et 1. et $\frac{3}{2}B$ id est series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}$ etc. erit $\frac{3}{2}$. Idem in caeteris fieri et generaliter eventurum demonstrari non difficulter potest.

Scholium

Hinc etiam facile demonstrari potest, quotcunque terminorum, etiam numero finitorum, seriei cujusdam trianguli harmonici posse inveniri summam. Sint scilicet termini quotcunque continui ex aliqua serie ut trigonalium vel pyramidalium etc. Reciprocorum, sumti; ut $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ quorum quatuor terminorum quaeritur summa. Sumantur ex serie praecedenti termini duo, unus $\frac{1}{2}$ aeque altus ac $\frac{1}{3}$ primus assumtus; alter $\frac{1}{6}$ proxime inferior ipso $\frac{1}{15}$ novissime assumto. Horum duorum numerorum $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$ per $\frac{2}{1}$ numerum

seriei infinitae summam exprimentem, sive indicem, multiplicatorum differentia $\frac{2}{3}$ aequatur summae assumtorum quatuor $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$. Eodem modo et centeni termini ex una aliqua harum serierum sumti se continuo insequentes, duabus tantum brevissimis operationibus una scilicet subtractione, unaque multiplicatione in unum possunt addi, quod alioqui vix multarum horarum spatio, et incredibili labore fieret. Nec tabula opus est hic adscripta ad numeros qui a se invicem subtrahendi sunt inveniendos; nota est enim ratio fractionum nostrarum denominatores, id est numeros figuratos ut quidam vocant, sive numeros trianguli Arithmetici, sine tabula inveniendi. Quae omnia distincte exponi merentur; usus enim habent ingentes. Sed quoniam non nisi obiter attingere volui, suffecerit aditum aperuisse.

Porro Triangulum hoc voco Harmonicum quemadmodum Clarissimus quondam Geometra Blasius Pascalius suum vocabat Arithmeticum, qui et libellum de eo editum sic inscripsit. Utrumque iisdem constat numeris, Pascalianum integris, nostrum fractis. Utque series prima apud ipsum est numerorum progressionis Arithmeticae, 1. 2. 3. 4. 5. etc. ita prima series nostra quae illi reciproca est, $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{5}.$ etc. progressionis est harmonicae, quemadmodum etiam ostendimus prop. 3 3.

Et quemadmodum Numeri Arithmetici sive naturales continuo replicati per additionem faciunt triangulares; et hi eodem modo replicati pyramidales; et ita porro: Ita Harmonici sive arithmeticorum reciproci continuo per subtractionem replicati faciunt triangularium reciprocos, et hi eodem modo reciprocos pyramidalium etc. In Triangulo Arithmetico Pascalii ope seriei sequentis inveniri potest summa terminorum quotcunque seriei antecedentis; in nostro harmonico ope seriei praecedentis invenitur summa sequentis. Adde prop. 25. coroll. 2. Series Pascalianae crescunt nostrae decrescunt in infinitum.

24 Adde ... 2. *erg. L*

11 voco: vgl. VII, 3 N. 30 u. N. 53. 12 vocabat: B. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 (*PO* III S. 433–593); Leibniz hat in seinem Handexemplar die vor S. 1 eingebundene Tafel mit dem arithmetischen Dreieck mit Marginalien versehen. 24 prop. 25. coroll. 2: Das Korollar ist gestrichen; s. die Lesart zu S. 588 Z. 22 – S. 590 Z. 1.

Hinc in Pascalii triangulo nullius seriei in infinitum productae summa dari potest finita; in nostro omnium serierum in infinitum productarum summa dari potest finita excepta prima. Nam ut infra demonstrabitur prop. 45. ea est quantitas infinita ideo hoc loco exprimitur per $\frac{1}{0}$.

Pascalii Triangulum cum in integris consistat longe nostro tractabilius videri posset. At fractiones in nostro non minus proprietatum esse plenas, et simplicium usque adeo legum capaces, res profecto mira est. Quantae enim alioquin operae sit multas diversorum denominatorum fractiones in unam addere summam, norunt qui aliquem calculi usum habent. Exempli causa: $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}$ facit: $\frac{1}{1}-\frac{1}{36}$, in $\frac{3}{2}$; seu $\frac{35}{24}$. cujus veritatem qui experiri volet sentiet quam difficulter fractiones tractentur. Porro multae hic et praeclarae de triangulo harmonico propositiones condi possent, quae facile materiam justi tractatus darent, si scripturirem. Late enim patet ejus usus, et ad quadraturas, et quas vocant partitiones porrigitur.

Vir celeberrimus Christianus Hugenius cum circa aleam et incerti aestimationes versaretur, deprehendit seriem reciprocorum trigonalium seu $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ etc. esse $\frac{2}{1}$. Observavit enim hanc seriem singulari quadam ratione ex progressione geometrica dupla, $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{8}.\ \frac{1}{16}.\ \frac{1}{32}$ etc. posse conflari. Cujus summa cum sit $\frac{2}{1}$ utique et summam prioris esse $\frac{2}{1}$ consequebatur. Et credo viam aliquam esse qua idem ratiocinandi modus ad caeteras Trianguli Harmonici series extendi possit, et Pyramidales fractiones $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ etc. conflari ex fractionibus, progressionis geometricae triplae, nempe $\frac{1}{1}$.

3 f. Nam ... prop. | 44. *ändert Hrsg.* | ea ... $\frac{1}{0}$ *erg. L*

15 deprehendit: s. *HO* XIV S. 144–150.

$\frac{1}{3}.\ \frac{1}{9}.\ \frac{1}{27}$ etc. utriusque enim seriei summam reperi esse etiam, $\frac{3}{2}$; et Trigono-trigonales ex Geometricis quadruplis, nam seriei $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{5}.\ \frac{1}{15}.\ \frac{1}{35}$ etc. aeque ac seriei $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{16}.\ \frac{1}{64}$ etc. summam reperi esse $\frac{4}{3}$ et ita porro. Id vero ita esse alia plane methodo deprehendi; cum enim seriei reciprocorum trigonalium $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ etc. summam a se inventam mihi investigandam proposuisset Hugenius, felici inquisitione usus non hujus tantum sed et caeterarum hic propositarum omnium summam regula generalissima pariter ac simplicissima hic expressam, inveni.

Propositio XLI.

„Summa seriei infinitae $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}$ etc.
„est $\frac{1}{4}$.

„Summa seriei infinitae $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}$ etc.
„est $\frac{3}{4}$.

„Sunt autem numeri 8. 24. 48. 80. etc. quadrati imparium unitate minuti; et numeri „3. 8. 15. 24. 35. 48. 63. 80. etc. quadrati omnium numerorum tam parium quam „imparium eadem unitate minuti.

Nam $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ etc. erit 2. per prop. 39.

Ergo $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}$ etc. est $\frac{1}{4}$. divisis omnibus per 8.

Quae est propositionis pars prior.

---

1 reperi: vgl. III, 1 N. 2 S. 5. 3 deprehendi: vgl. VII, 3 N. 1 u. N. 2. 5 proposuisset: in einem Gespräch im Herbst 1672; s. VII, 3 N. 1.

Jam $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143}$ etc.

est $\frac{2}{4}$ per prop. 36.

Ergo $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{99} + \frac{1}{120} + \frac{1}{143}$ etc.

erit $\frac{3}{4}$. summa scilicet utriusque. Quae est pars propositionis posterior.

Propositio XLII.

[Quadratura Hyperbolae ejusque partium varia; et cum Circulo Symbolismus]

$$\left.\begin{array}{lcccccccccccl}
\text{„I.} & \frac{1}{3} & + \frac{1}{8} & + \frac{1}{15} & + \frac{1}{24} & + \frac{1}{35} & + \frac{1}{48} & + \frac{1}{63} & + \frac{1}{80} & + \frac{1}{99} & + \frac{1}{120} & \text{etc.} \\
\text{„II.} & \frac{1}{3} & . & \frac{1}{15} & . & \frac{1}{35} & . & \frac{1}{63} & . & \frac{1}{99} & . & \text{etc.} \\
\text{„III.} & . & \frac{1}{8} & . & \frac{1}{24} & . & \frac{1}{48} & . & \frac{1}{80} & . & \frac{1}{120} & \text{etc.}
\end{array}\right\}$$

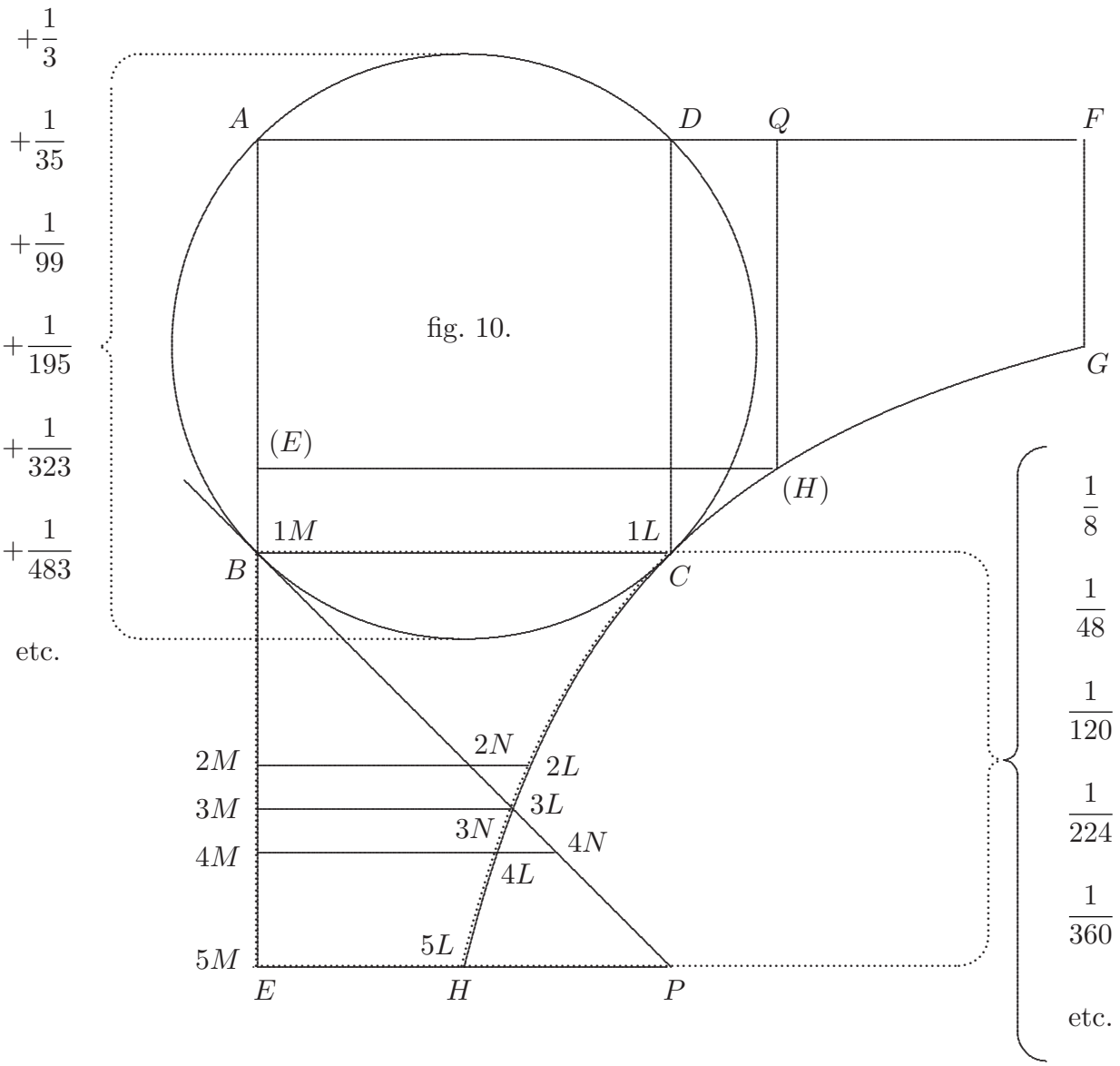
$$\left.\begin{array}{lcccccccccccl}
\text{„IV.} & \frac{1}{3} & . & . & . & \frac{1}{35} & . & . & . & \frac{1}{99} & . & \text{etc.} \\
\text{„V.} & . & \frac{1}{8} & . & . & . & \frac{1}{48} & . & . & . & \frac{1}{120} & \text{etc.}
\end{array}\right\}$$

„

$$\text{aequal.} \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ per prop. 41} \\ \frac{2}{4} \text{ per prop. 36} \\ \frac{1}{4} \text{ per prop. 41} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \text{exprimit} \\ \text{aream} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{circuli prop. 35.} \\ \text{Hyperbolae} \\ \text{primariae} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{cujus Quadra-} \\ \text{tum inscrip-} \\ \text{tum est } \frac{1}{4}. \end{array}$$

6 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz selbst.



[*Fig. 11*]

2 *Daneben:* AB aequ. BC aequ. BE aequ. EP.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324
0	3	8	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168	195	224	255	288	323
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{143}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{195}$	$\frac{1}{224}$	$\frac{1}{255}$	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{323}$
	$\frac{1}{3}$	.	$\frac{1}{15}$	.	$\frac{1}{35}$	.	$\frac{1}{63}$	.	$\frac{1}{99}$	.	$\frac{1}{143}$	.	$\frac{1}{195}$	.	$\frac{1}{255}$	.	$\frac{1}{323}$
	.	$\frac{1}{8}$	.	$\frac{1}{24}$	.	$\frac{1}{48}$	.	$\frac{1}{80}$	.	$\frac{1}{120}$	.	$\frac{1}{168}$	.	$\frac{1}{224}$	.	$\frac{1}{288}$	.
	$\frac{1}{3}$	.	.	.	$\frac{1}{35}$	.	.	.	$\frac{1}{99}$	.	.	.	$\frac{1}{195}$	.	.	.	$\frac{1}{323}$
	.	$\frac{1}{8}$	.	.	.	$\frac{1}{48}$	.	.	.	$\frac{1}{120}$	.	.	.	$\frac{1}{224}$	.	.	.

19	20				
361	400				
360	399				
$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{399}$	etc.	aequal.	$\frac{3}{4}$	
.	$\frac{1}{399}$	etc.		$\frac{2}{4}$	
$\frac{1}{360}$	.	etc.		$\frac{1}{4}$	
.	.	etc.	exprimit	Circuli AC	$\frac{1}{4}$ habentis, pro area
$\frac{1}{360}$	.	etc.	aream	Hyperbolae $CBEHC$	Quadrati inscripti $ABCD$.

Restat tantum probanda pars ultima de Hyperbola. Ut vero Symbolismus sane memorabilis clarius appareat, schema adhibeamus. Sit Hyperbola aequilatera vel primaria GCH, cujus centrum A. vertex C. potentia seu quadratum inscriptum $ABCD$. circa quod etiam Circulus describatur. Hoc Quadratum circulo Hyperbolaeve inscriptum ponatur esse $\frac{1}{4}$. erit circulus, $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. per p r o p. 3 5. Porro Circulo quodammodo respondet spatium Hyperbolicum $CBEHC$. posito angulum FAE asymptotorum AF, AE esse rectum, et BC, EH parallelas asymptoto AF, ac denique BC aequalem ipsi BE; ita enim etiam BE ipsi AB, et BC ipsi AD aequalis erit; neque aliud spatium (circa

18 appareat, *(1)* circa quadratum ABCD. describatur circulus, circa idem quadratum *(2)* schema *L*

asymptotos) quod Circulo melius respondeat, aut magis determinatum sit prae caeteris; assignari potest inprimis cum logarithmum binarii contineat, ut infra patebit. Hujus autem spatii Quadrilinei aream esse $\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{120}$ etc. sic ostendo. AM est $AB+BM$, et AML rectangulum aequale quadrato $ABCD$ ex natura Hyperbolae. Ergo ML est $\frac{\text{Quad. } AB}{AM}$. vel $\frac{\text{Quad. } AB}{AB+BM}$ sive ML aequal. $AB-BM+\frac{BM^2}{AB}-\frac{BM^3}{AB^2}+\frac{BM^4}{AB^3}-\frac{BM^5}{AB^4}$ etc. per prop. 26. ad modum prop. 28. vel schol. prop. 29. Ergo summa omnium ML seu spatium $CBEHC$ erit AB in BE $-\frac{BE^2}{2}+\frac{BE^3}{3AB}-\frac{BE^4}{4AB^2}+\frac{BE^5}{5AB^3}-\frac{BE^6}{6AB^4}$ etc. per prop. 25. ad modum prop. 29. Summa scilicet omnium ML aequabitur summae omnium AB, et omnium $\frac{BM^2}{AB}$, et omnium $\frac{BM^4}{AB^3}$ etc. ad BE ordine normaliter in punctis M applicatarum[,] demta summa omnium BM, et omnium $\frac{BM^3}{AB^2}$, etc. eodem modo applicatarum. Omnes autem AB, quia semper eadem, applicatae semper in punctis M, dant rectangulum ABE vel CBE, id est quadratum ab AB. et omnes BM vel MN applicatae in M dant triangulum BEP vel semiquadratum a BE, sive $\frac{BE^2}{2}$. et ita porro. Est autem BE hic aequal. AB. Ergo erit spatium $CBEHC$

aequal. $$\underbrace{\frac{AB^2}{1}-\frac{AB^2}{2}}+\underbrace{\frac{AB^2}{3}-\frac{AB^2}{4}}+\underbrace{\frac{AB^2}{5}-\frac{AB^2}{6}}\text{ etc.}$$

sive $$\frac{AB^2}{2}+\frac{AB^2}{12}+\frac{AB^2}{30}\text{ etc.}$$

sive (quia posuimus AB^2 aequal. $\frac{1}{4}$) erit spatium Hyperbolicum

$CBEHC$ $$\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{120}\text{ etc. Q. E. D.}$$

Hos spatii Hyperbolici $CBEHC$ numeros jam ex invento Vicecomitis Brounkeri

2 inprimis ... patebit. *erg. L* 6 vel ... 29. *erg. L* 10 f. demta ... applicatarum *erg. L* 18 f. Q. E. D. | Scholium *gestr.* | Hos *L*

19 invento: W. Brouncker, *The squaring of the hyperbola*, in: *Philosophical Transactions* III, Nr. 34 vom 13. (23.) April 1668, S. 645–649.

Societatis Regiae Anglicae praesidis inter primos nostri temporis Geometras censendi sumere licet; subtilissimi autem Viri Nicolai Mercatoris ex eadem Regia Societate Methodus non tantum eosdem numeros exhibet, sed et, si BE ipsa AB minor sit, nihilo minus formulam,

$$„\frac{BE}{1} - \frac{BE^2}{2} + \frac{BE^3}{3} - \frac{BE^4}{4} + \frac{BE^5}{5} - \frac{BE^6}{6} \text{ etc. (posito } AB\text{, vel } AB^2 \text{ esse 1.)}$$

spatio $CBEHC$. aequalem praebet. Sed et si recta $(E)(H)$ in alteram partem inter BC et Asymptoton AF cadat, eodem modo area spatii $CB(E)(H)C$ invenietur, tantum signis $-$ in $+$ mutatis, quia est $B(H)$ aequal. $\dfrac{AB^2}{AB - B(E)}$ eritque

$$„CB(E)(H)C \text{ aequal. } \frac{BE}{1} + \frac{BE^2}{2} + \frac{BE^3}{3} + \frac{BE^4}{4} + \frac{BE^5}{5} + \frac{BE^6}{6} \text{ etc.}$$

posito AB esse 1. et area spatii infiniti $CBAF$ etc. $G(H)C$ erit summa numerorum progressionis harmonicae in infinitum decrescentium,

$$„\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ etc.}$$

posito quadratum AB^2 seu rectam AB, esse 1.

Caeterum quia per prop. 18 Zona Hyperbolica quaelibet ut $CBEHC$, Zonae conjugatae $CDQHC$ aequalis est, hinc patet ejusdem spatii hyperbolici valorem bis obtineri sive duobus modis exprimi posse, uno per signa $+$ et $-$ alternantia, altero per sola signa affirmantia. Potest etiam pro AB vel AD. alia quaelibet assumi ut AQ. ut ponendo AF aeq. $AQ+QF$. erit FG aequal. $\dfrac{AB^2}{AQ+QF}$. et rectangulum FG in AQ. erit ad quadratum AB^2, ut $\dfrac{1}{1} - \dfrac{QF}{AQ} + \dfrac{QF^2}{AQ^2} - \dfrac{QF^3}{AQ^3}$ etc. est ad $\dfrac{1}{1}$. et spatium Hyperbolicum $(H)QFG(H)$ erit ad quadratum AB^2,

$$„\text{ut } \frac{QF}{1AQ} - \frac{QF^2}{2AQ^2} + \frac{QF^3}{3AQ^3} - \frac{QF^4}{4AQ^4} \text{ etc. est ad 1.}$$

---

2 f. Methodus: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668.

Unde jam habetur res mira, nimirum Quadratura ejusdem Spatii Hyperbolici, infinitis modis, et saepius quidem.

„Ut spatium $CDFG(H)$ est ad AB^2 ut $\frac{DF}{1AD} - \frac{DF^2}{2AD^2} + \frac{DF^3}{3AD^3} - \frac{DF^4}{4AD^4}$ etc. est ad
„1. at idem spatium rursus est ad AB^2,

$$\begin{array}{ll} „ & \\ „\text{ut} & \left\{ \begin{array}{ll} +\frac{QF}{1AQ} - \frac{QF^2}{2AQ^2} + \frac{QF^3}{3AQ^3} - \frac{QF^4}{4AQ^4} \text{ etc. ratio spatii } (H)QFGH & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ad } AB^2 & \\ +\frac{DQ}{1AQ} + \frac{DQ^2}{2AQ^2} + \frac{DQ^3}{3AQ^3} + \frac{DQ^4}{4AQ^4} \text{ etc. ratio spatii } CDQ(H)C & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ad } AB^2 & \end{array} \right\} \text{ est ad 1.} \\ „ & \end{array}$$

Quod pro dato Spatio infinitis fieri potest modis, datis enim licet punctis $D.\ C.\ F.\ G.$ adhuc puncto $Q.\ H.$ pro arbitrio assumi possunt. Hinc jam mirabilis nascitur aequatio infinita, scilicet series

„$\frac{DF}{1AD} - \frac{DF^2}{2AD^2} + \frac{DF^3}{3AD^3} - \frac{DF^4}{4AD^4}$ etc. aequalis est reliquarum duarum summae
„$\frac{DF+QF}{1AQ} + \frac{DQ^2-QF^2}{2AQ^2} + \frac{DQ^3+QF^3}{3AQ^3} + \frac{DQ^4-QF^4}{4AQ^4}$ etc. posita DF aeq. $DQ+$
„QF. et posita AQ aeq. $AD+DQ$ et puncto Q. pro arbitrio sumto. Unde una
„aequationis parte divisa per DF, altera per $DQ+QF$ fiet: $\frac{1}{1AD} - \frac{DF}{2AD^2} + \frac{DF^2}{3AD^3}$
„$-\frac{DF^3}{4AD^4}$ etc. aeq. $\frac{1}{AQ} + \frac{DQ-QF}{2AQ^2} + \frac{DQ^2, -\overline{DQ \text{ in } DF}, +DF^2}{3AQ^3}$
„$+\frac{DQ^3 - \overline{DQ^2 \text{ in } QF} + \overline{DQ \text{ in } QF^2} - QF^3}{4AQ^4}$
„$+\frac{DQ^4 - \overline{DQ^3 \text{ in } QF} + \overline{DQ^2 \text{ in } QF^2} - \overline{DQ \text{ in } QF^3} + QF^4}{5AQ^5}$ etc.

Quorum specimen ideo adjeci, ut quibus otium est in aliis seriebus idem tentent, multa enim miranda sub his latere arbitror theoremata, quae dies deteget; nec de usu dubitandum est quoniam Logarithmi includuntur. De quo mox superest ut aliam adhuc

1 res | nova et *gestr.* | mira L 1 f. Hyperbolici, | rationalis *gestr.* | infinitis L 6–9 ad 1 *(1)* Unde mirabilis sequitur aequatio infinita, scilicet $\frac{\mathrm{DF}}{1\mathrm{AD}} - \frac{\mathrm{DF}^2}{2\mathrm{AD}^2}$ *(2)* Qvod L

subjiciam Quadraturam Hyperbolae, ab hac plane diversam, sed quae ex eodem quo nostra Circuli Quadratura fonte fluxit, et circulo, Hyperbolae atque Ellipsi communis est; secundum quam Hyperbola non ad Asymptoton ut hactenus sed axem refertur.

Propositio XLIII

„Quadratura generalis Sectionis Conicae centrum, E, assignabile habentis, sive sec-
„toris $EAGC$ Circuli, Ellipseos aut Hyperbolae cujuscunque cujus vertex A, Axis
„AB. Regula autem haec est, si AT resecta ex AL tangente verticis, per CT tangen-
„tem alterius puncti extremi C, vocetur t, rectangulum autem sub semi-latere trans-
„verso in semi-latus rectum, ponatur esse unitas sive si recta aliqua AH, quae hoc
„rectangulum potest, (ut supponam) sit 1; erit sector $EAGC$ aequalis rectangulo sub
„EA semilatere transverso, et recta, cujus longitudo sit $+\frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \pm \frac{t^{11}}{11}$
„etc. modo t non sit major quam 1. posito signum ambiguum ($\pm$) valere $+$ in Hyper-
„bola, $-$ in Circulo et Ellipsi.

Hoc si distincte ac minutim ostendere vellem, repetenda essent pleraque quae in Circulo speciatim diximus, tantumque generalius enuntianda; sed quoniam id lectori pariter ac mihi taediosum foret, fontes indicasse suffecerit. Quadraturam autem hic non nisi earum Coni sectionum exhibeo quae centrum habent; quoniam quae centrum E non habent nec Sectorem $EAGC$ habere possunt ad centrum consistentem. Et vero earum quae centro assignabili carent, trianguli scilicet et parabolae quadratura aliunde non analytice tantum per seriem infinitam, sed absoluta constructione, per linearum ductus habetur. Centrum autem assignabile desidero, quoniam etsi in Parabola quoque centrum fingere liceat, id tamen infinito abhinc abest intervallo. His positis ita ratiocinor.

In omni sectione conica resecta AT est ad latus rectum NP, ut abscissa seu sagitta AB, ad ordinatam seu chordam FC. (ut facile ostendi potest) et in omni sectione Conica

---

24–619,3 *Am Rand:* Hoc non est opus.

8–12 z *zu* t *geändert L* 9 f. sive ... sit 1 *erg. L* 12 quam 1. | [si z sit major qvam 1, tunc ex coroll. 2. prop. 25. junct. schol. prop. 29. substituetur $\frac{1}{1z} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} - \frac{1}{7z^7}$ etc. | qvod ad imitationem prioris facile demonstrabit qvi nostra intellexerit: *erg.* |] *gestr.* | posito *L* 19 non *(1)* arithmetice per seriem infinitam, sed geometrice *(2)* analytice *L* 24–619,3 et ... NAB *erg. L*

---

27 coroll. 2. prop. 25: Das Korollar ist gestrichen; s. die Lesart zu S. 588 Z. 22 – S. 590 Z. 1.

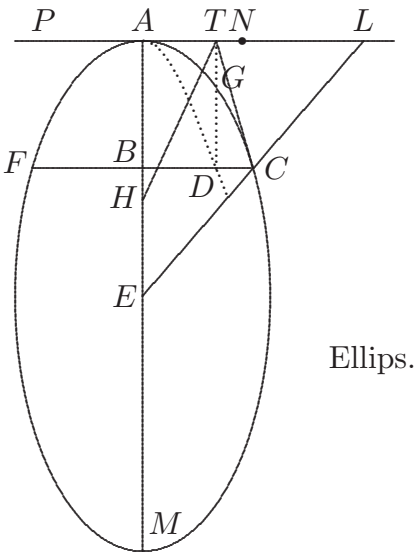


fig. 12

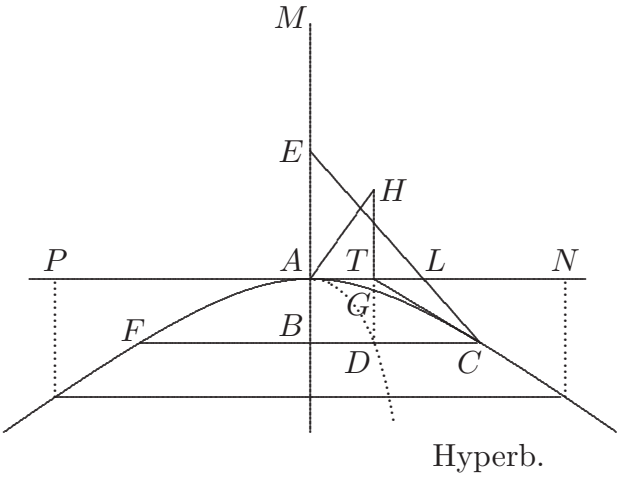


fig. 13

centrum ac proinde et latus transversum habente MB est ad AM, latus transversum, ut quad. BC (vel rectang. FBC) ad rectang. NAB. Unde ostendetur porro, quod sumta AH, tali ut possit rectangulum EAN sub semilatere recto AN in semi-latus transversum EA et posita AH. unitate constructionis, erit sagitta AB ad AM latus transversum, vel dimidia AB ad AE semilatus transversum, ut quadratum AT ad quadratum HT, (quod coincidit in Circulo cum prop. 27) seu ut t^2 ad $1 \mp t^2$. id est ut t^2 ad $1 + t^2$

---

1 BD aequ. AT. $\square HT$ ad $\square AT$ ut AE ad $\frac{1}{2}AB$.

EM aequ. EA et AM latus transversum.
AN aequ. AP et NP latus rectum. } $\square AH$ aequ. $\square PAE$.

TL ad AT ut EA ad EB. $TL : AB :: EA \cdot AN : EB \cdot BC$.

AT ad NP ut AB ad FC. $EATC = EA$ in AT.

7 (quod ... prop. 27) *erg. L*

in Ellipsi et Circulo, et ut t^2 ad $1 - t^2$ in Hyperbola. Nam signum ambiguum, $\mp$, in Hyperbola est $-$, in Circulo et Ellipsi $+$, quemadmodum contrarium, $\pm$ in Hyperbola est $+$ in Ellipsi et Circulo $-$. Unde semper cum in sequentibus ejusmodi signa ambigua occurrent, superius de Hyperbola, inferius de Ellipsi et Circulo interpretabimur. Erit ergo: $\frac{AB}{2}$ aequal. $\frac{t^2}{1 \mp t^2}$. sive erit $\frac{AB}{2}$ aequal. $+t^2 \pm t^4 + t^6 \pm t^8$ etc. per prop. 26. ad modum propositionis 28.

Ergo (vide prop. 29) summa omnium $\frac{AB}{2}$ applicatarum ipsis AT in punctis T. sive omnium $\frac{TD}{2}$ seu dimidium ipsius $ATDA$ complementi figurae resectarum $ABDA$ (vel hoc loco figurae segmentorum Conicae sectionis) id est denique per prop. 10. trilineum $CTAGC$, aequabitur summae omnium $t^2 \pm t^4 + t^6 \pm t^8$ etc. Id est per prop. 25. ad modum prop. 29 (pro BC quae ibi enuntiata reperitur prop. 29. ponendo t. et pro AB ibi posita hic ponendo 1. sive AH. quod in circulo ipsi AB illius figurae, id est ipsi AE hujus, coincidit) trilineum $CTAGC$ aequabitur rectangulo sub recta, $\frac{t^3}{3} \pm \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \pm \frac{t^9}{9}$ etc. et semilatere transverso EA.

Porro AL est ad EA seu rectangulum EAL est ad quadratum ab EA ut BC ad EB, ut patet, et recta TL est ad ipsam TD vel AB, ut quadratum ab AH, seu EAN rectangulum sub semilatere recto in semilatus transversum est ad rectangulum EBC; [vel TL est ad AT ut EA ad EB.] Unde tandem comperietur: Triang. EAL $\pm$ Triang. CTL seu trapezium $EATC$, sectori $EAGC$ inscriptum in Hyperbola, circumscriptum in Circulo aut Ellipsi aequari rectangulo EAT, sub semilatere transverso EA, et re-

13 f. *Am Rand:* NB. Haec reddenda clariora.

7 (vide prop. 29) *erg. L* 16 ut *(1)* facile ostendi potest ergo et duplum triangulum CTL, seu rectangulum *(2)* patet *L* 21–621,1 rectangulo EAT, *(1)* quod satis memorabile est ob universalitatem *(2)* sub ... AT, *(a)* (quod satis memorabile est ob universalitatem) *(b)* vel *L*

18 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz selbst.

s e c t a AT, vel t cui si addatur in Hyperbola, dematur in Circulo vel Ellipsi Trilineum $CTAGC$, id est rectangulum sub EA, et $\frac{t^3}{3} \pm \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \pm \frac{t^9}{9}$ etc. fiet sector $EAGC$, aequalis rectangulo sub EA, et recta $\frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \pm \frac{t^{11}}{11}$ etc. Q. E. D.

Scholium

Haec propositio videtur Quadraturae Conicae generalis fastigium obtinere: nescio equidem an haberi possit simplicior, illud tamen scio, et infra demonstrabo, impossibilem esse quae salva generalitate alterius sit generis simplicioris, id est quae non sit transcendens nec per series infinitas et tamen cuilibet circuli sectori (idem est de Hyperbola et Ellipsi) indistincte competat; et relationem arcus ad suum sinum aut tangentem, vel logarithmi ad numerum generaliter exprimat. Admissis autem seriebus infinitis, uti certe admittendae sunt cum solae supersint, nescio an possibile sit reperiri simpliciores. Propositiones conicas universales varias quas ad ejus demonstrationem attuli, paucis verbis indigitari satis putavi, id enim Geometrae ad inveniendam facile earum veritatem sufficit, et materiem forte exercitii non inutilis, dabit.

Definitio

Si quantitatibus $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ subscribantur
quantitates $m.\ n.\ l.\ p.\ q.\ r.$
et posito factum ex $\overline{a \text{ in } b}$ esse c. sit $m + n$ aequalis l, et posito $\overline{a \text{ in } c}$ esse e, sit $m + l$ aequ. q. et posito $\overline{a \text{ in } e}$ aequ. f. sit $m + q$ aequ. r. idemque semper fiat, tunc se-

4 Scholium *erg. L* 8 transcendens nec *erg. L* 8–10 et ... exprimat *erg. L* 14 f. dabit. *(1)*

P r o p o s i t i o X L I I I

$$\text{Aequatio haec:} \quad \mathrm{l\ aequal.}\ \frac{\mathrm{n}}{1} - \frac{\mathrm{n}^2}{2\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{n}^3}{3\mathrm{b}^3} - \frac{\mathrm{n}^4}{4\mathrm{b}^4}\ \mathrm{etc}$$

$$\text{vel} \quad \mathrm{l\ aequal.}\ \frac{\mathrm{d}}{1} + \frac{\mathrm{d}^2}{2\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{d}^3}{3\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{d}^4}{4\mathrm{a}^3}\ \mathrm{etc}$$

est ad curvam Logarithmicam, eritqve l, logarithmus; si priore casu b + n posteriore a − d sit numerus. *(2)* | Definitio *erg.* | Si *L* 18 f. aequalis l, | et ... fiat *erg.* | | id est verbo, si superscripta c aeqvante factam ex aliis superscriptis a. b. subscripta ipsi c, nempe l. aeqvatur summa m. n ex subscriptis ipsis a. b. *erg. u. gestr.* | tunc *L*

6 infra: s. u. prop. LI S. 674 Z. 3 – S. 676 Z. 6.

ries superior dicetur esse numerorum, inferior Logarithmorum. Unde aliae Logarithmorum proprietates consequuntur, ut exempli causa si *a*. *b*. *c*. etc. sint progressionis Geometricae, ipsas *m*. *n*. *l*. etc. progressionis arithmeticae fore patet. Unde illud quoque constat pro eadem serie numerorum aliam atque aliam seriem assumi posse Logarithmorum.

	qq.	cub.	quad.	lat.	unitas	latus	quad.	cub.	qq.	
Sint Numeri,	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	2	4	8	16	A
erunt Logarithmi seu exponentes:	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	B
	-8	-6	-4	-2	0	$+2$	$+4$	$+6$	$+8$	C
	$+0$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	D

Ubi prima series A est progressionis Geometricae, reliquae tres B, C, D progressionis Arithmeticae, et patet quamlibet ex ipsis praestare effectum desideratum. Nam in serie B summa ex -4 et $+1$ facit -3, quia in serie A productum $\frac{1}{16}$ in 2. facit $\frac{1}{8}$ et $-2+2$ facit 0. quia $\frac{1}{4}$ in 4. facit 1. Et $1+3$ facit 4, quia 2 in 8 facit 16. Et in serie C. $-6-2$ facit -8. quia in serie A $\frac{1}{8}$ in $\frac{1}{2}$ facit $\frac{1}{16}$.

Constat quoque aliquem terminorum, in qualibet harum serierum, B. C. D. esse 0. Quaeras an possit fieri series talis ut nullus logarithmus sit 0 ut si seriei C terminis ubique addatur 3, fiet enim: -5. -3. -1. $+1$. $+3$. $+5$. $+7$. $+9$. $+11$ sed sciendum est infinitis aliis interpositis necessario incidi et in 0. Effectum autem desideratum tum demum praestari, cum Logarithmus Unitatis ad Logarithmum alterius numeri rationem infinite

5 f. Logarithmorum; | series tamen fore inter se proportionales, aut addita ablataque perpetuo constanti quantitate reddi posse proportionales. *gestr.* | qq. *L* 6–11 *Am Rand:* ℜ an series semper proportionalis, erunt tantum differentiae semper proportionales potest una series esse crescens altera decrescens *gestr. L* 15 $\frac{1}{2}$ in 2. facit 1. *und* 2 in 4 facit 8. *L ändert Hrsg.* 16 f. $\frac{1}{16}$. *(1)* Et in serie D. si ubique auferas quantitatem constantem 4 fiet ex ea series eadem seriei B, proportionalis seriei C. adeoque post quantitatem constantem, 4, ablatam, termini seriei C. etiam effectum desideratum praestabunt. *(2)* Constat *L* 18–20 qvaeras ... in 0. *erg. L*

11 $+0$ ... D: Die Reihe D erfüllt die Bedingung S. 621 Z. 18 – Z. 1 nicht.

parvam aut infinit[esim]am habet. Unde illud quoque apparet in lineis, cum in arbitrio sit quamnam assumere velimus unitatem, etiam in arbitrio fore, cuinam assignare velimus Logarithmum 0. Patet etiam hoc modo et dividi posse et tertias mediasque proportionales inveniri, ut si a 3, auferas 2, in serie B restabit 1. quia in serie A si 8 dividas per 4, prodit 2. et si in serie B a 3 auferas -1. habebis 4. quia si in serie A, 8 dividas per $\frac{1}{2}$ habebis 16. Denique si mediam proportione quaeras in serie A inter $\frac{1}{4}$ et 1. sume -2. logarithmum ab $\frac{1}{4}$. ejus dimidium -1. dabit tibi logarithmum ab $\frac{1}{2}$. medio quaesito.

In lineis (quemadmodum jam a pluribus ostensum est) si inter CA et βT parallele positas quaerantur quotcunque mediae proportionales ωR, φS, eaeque ipsi rectae cuicunque $C\beta$, in totidem partes aequales sectae in punctis ω. φ. ordine applicentur, idque et inter duas proximas ωR, φS rursus aliae mediae quaerantur eodemque modo applicentur, idemque sine fine factum intelligatur, c u r v a $ARST$ per omnium mediarum extrema transiens erit L o g a r i t h m i c a , quae a parte minoris numeri βT. seu versus T. continuata nunquam tamen occurret rectae $C\beta$ utcunque productae.

Eruntque n u m e r i CA; CD vel ωR; CF vel φS; CH vel βT, at L o g a r i t h m i erunt 0; $C\omega$ vel DR; $C\varphi$ vel FS; $C\beta$ vel HT.

Commodissime autem fiet constructio curvae per meras unius mediae inventiones, ut si inter βT et ψK inveniamus proportione mediam quam ponamus esse ωR eamque rectae $\psi\beta$ in puncto ω inter ψ et β medio ordinatim applicemus et inter βT et ωR, item inter ωR et ψK, rursus quaeramus medias, φS mediam proportione inter βT et ωR[,] quam ordinatim applicabimus in puncto φ inter β et ω medio seu a β et ω aequaliter distante[,] et CA mediam proportione inter ωA et ψK[,] quam applicabimus in puncto C medio inter ω et ψ, seu a ω et ψ aequaliter distante (quanquam id fortasse in schemate non ita sit expressum) et rectarum inter duo puncta rectae $\psi\beta$ proxima interceptarum bisectionem ac mediarum proportionalium inter duas ordinatas proximas applicationem

3–8 Logarithmum 0. *(1)* Quia etiam si loco Unitatis scribamus in serie A, 100000. vel alium numerum res eodem redibit modo pro 2. *(2)* Scribamus 2 in quadratum ab 100000, pro 4, scribamus 4. *(3)* | patet ... quaesito *erg.* | In *L* 17–25 *und* 0001,2–0002,11 commodissime ... curva. *erg. L*

8 pluribus: vgl. I. G. Pardies, *Elemens de geometrie*, 1671, S. 89–91; J. Gregory, *Geometriae pars universalis*, 1668, prooemium.

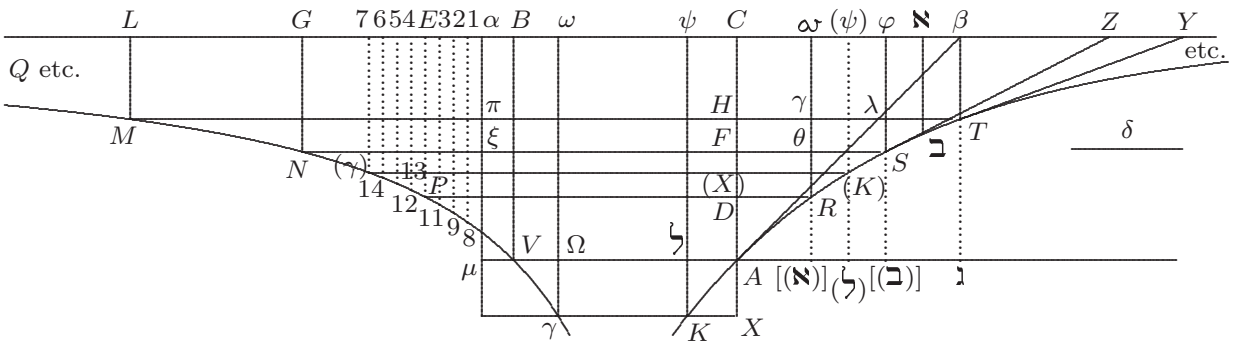


fig. 14

semper continuando aut continuatam intelligendo, prodibit curva quam logarithmicam vocare soleo. Si quis loco bisectionis adhibuisset trisectionem, et simul loco unius mediae inventionem duarum perpetuo applicandarum, ei continuando in infinitum prodiisset curva eadem. Quod apparebit etiam si aliquando desistat, tametsi enim puncta curvae inventa unam mediam nunquam coincident punctis inventis per trisectionem, tamen eousque progredi licebit, ut appareat quantumlibet parvo distare intervallo punctum inventum per trisectionem a puncto ordine respondente per bisectionem invento. Sive curva uno modo descripta per puncta, ita congruet curvae per alterum modum punctatim descriptae, ut distantia earum reddi possit minor quavis data. Idem futurum est etiamsi tres aut quatuor proportione mediae inveniantur aut etiamsi plurium pauciorumve mediarum inventio misceatur, modo illud semper observetur, ut datis in curva tribus ordinatis βT, ϖR, CA, sit ratio βT ad CA in tantum multiplicata rationis ϖR ad CA in quantum recta βC est multipla rectae ϖC. Verbi gratia si recta βC sit dupla (tripla) rectae ϖC, erit ratio $\frac{\beta T}{CA}$ duplicata (vel triplicata) rationis $\frac{\varpi R}{CA}$ id est, aequ. $\frac{\varpi R^2}{CA^2}$ (vel $\frac{\varpi R^3}{CA^3}$) seu

1 *Daneben:* MV Hyperbola.
φZ aequ. βY.
$A\mu$ aequ. AC.
DR ad FS ut PA ad NA.
... HT ... MA.

Darunter: Deberet φZ vel βY aequale esse CA. positis $A\beta$ tangente in A, SZ tangente in S. et TY tangente in T.

15 rationis $\frac{\beta \mathrm{T}}{\mathrm{CA}}$ id *L ändert Hrsg.*

βT ad CA ut ωR^2 ad CA^2 (vel ut ωR^3 ad CA^3). Unde generaliter si ordinatae quotcunque ad curvam ducantur βT, φS, ωR, CA, aequidistantes inter se, ita ut sint intervalla $\beta\varphi$, $\varphi\omega$, ωC aequalia[,] erunt ordinatae continue proportionales, sive si abscissae $C\omega$, $C\varphi$, $C\beta$ a puncto aliquo fixo ut C, incipientes sint progressionis arithmeticae[,] ordinatae CA, ωR, φS, βT erunt progressionis geometricae, quae omnia demonstrare facile nisi apud plerosque in confesso essent.

Intelligi autem ex his potest modum quo l o g a r i t h m i c a describitur per puncta affinem esse modo quo describitur q u a d r a t r i x . Nam ad logarithmicam opus est inventione mediarum proportionalium sive sectione rationis; ad quadratricem sectione anguli: et utrobique nil refert bisectio an trisectio adhibeatur. Semper enim eadem prodibit curva.

Poterit linea curva in infinitum continuari in utramque partem inventione tertiarum proportionalium, ut si ipsis ωR, CA, inveniatur tertia ψK. Unde eadem plane prodiisset curva, si pro CA, βT sumsissemus ωR et βT, iisdem punctis ω. β. applicatas, et inter eas medias invenissemus, et Logarithmi fuissent $\omega\varphi$ (sive θS), $\omega\beta$ (sive γT). Quomodo ergo in eadem curva alii atque alii assumi possunt Logarithmi? Nunc enim exempli causa numeri φS Logarithmus fit θS, vel $\omega\varphi$, cum antea fuerit FS vel $C\varphi$. Respondeo Logarithmos rem esse relatione quadam constantem, nimirum si inter ωR et βT mediam invenire velimus, nihil proprii constantisque dicimus, si logarithmum aliquem dicimus debere bisecari, sed dicendum est rectam $\omega\beta$ esse bisecandam, in puncto φ, indeque educendam ordinatam φS, occurrentem curvae (quae jam constructa supponitur) in S, quae sit futura media quaesita.

Quodsi vero omnino dicere velimus logarithmum esse bisecandum, tunc ut dicere liceat $\omega\beta$ esse logarithmum, dicendum erit ωR habere pro Logarithmo 0. Tunc enim logarithmus ipsius βT erit $\omega\beta$ vel γT, adeoque medii geometrici φS logarithmus erit medium arithmeticum prioris $\omega\varphi$ vel θS. Idem est si alteri βT dedissemus pro Logarithmo 0. Unde patet in nostra esse potestate, quemlibet Numerum, seu quamlibet rectam, ut CA, vel ωR, vel βT, sumere pro axe. Si CA sumamus pro axe curvae Logarithmicae, Logarithmi erunt ordinatae ex curva ad ipsam ductae, quarum prima ex A est 0. quia ibi curva Axi occurrit, ex R est DR, Logarithmus ipsius ωR. ex supposito axe CA, ordinata ex S est SF, logarithmus ipsius φS, et ita porro; at ordinata ex K, est Aל vel KX, logarithmus ipsius ψK, ubi notandum quoque si exprimendi sint valores horum logarithmorum, seu harum ordinatarum, tunc si logarithmi ab una parte axis exprimantur per $+$, ab altera parte exprimendos esse per, $-$, ut Analytices perito constat.

Unde si rectae Aל vel KX ponatur mole aequalis quantitas l et rectae A(א) vel DR, quantitas, a, et rectae A(ב) vel FS quantitas b, et ipsi HT vel Aג quantitas g. denique numerus ψK, sit p, CA sit c, ωR sit s, φS sit f, βT sit t, tunc

ex axe CA vel unitate, c, erunt numerorum	ψK	CA
	$p.$	$c.$
Logarithmi	$-l$	0
ex axe ωR vel unitate, s, Logarithmi	$-l-a$	$-a$
ex axe φS vel unitate, f, ...	$-l-a-b$	$-a-b$
ex axe βT vel unitate, t, ...	$-l-a-b-g$	$-a-b-g$
ex axe ψK vel unitate, p, ...	0	$+l$

ωR	φS	βT
$s.$	$f.$	$t.$
$+a$	$+b$	$+g$
0	$+b[-a]$	$+g[-a]$
$-b$	0	$+g[-a-b]$
$-b-g$	$-g$	0
$+l+a$	$+l+a+b$	$+l+a+b+g$

Eademque signa + vel − etiam inverti possunt, si non ut in hac tabula a parte dextra axium, signa, +, et a sinistra signa, −, sumantur; sed contrarium fiat: id enim in nostro arbitrio est.

Si iisdem sumtis numeris vel quantitatibus ut CA, βT, aliam assumsissemus distantiam $C\beta$ patet partes quoque lineae $C\beta$, sive logarithmos proportione majores minoresve fore prout ipsa linea major minorve assumta est; unde omnes lineae logarithmicae erunt quodammodo similes inter se, seu habebunt ordinatas earundem abscissarum proportionales, quemadmodum omnia triangula et Hyperbolae omnes aequilaterae ordinatis ad asymptotos normales sumtis.

Et ex his quidem naturam Logarithmorum et curvae Logarithmicae intelligi arbitror. Nam positis quotcunque c u r v a e L o g a r i t h m i c a e ordinatis ex curva ad asymp-

26 f. sumtis. | qvi qvidem similitudinis modus in Circulis aut Parabolis non obtinet. *gestr.* | Et *L*

1 f. A(א) ... A(ב): Leibniz verwendet die Punktbezeichnungen א und ב im Text doppelt. Zur besseren Unterscheidung werden die auf der Linie Aג liegenden Punkte (א) bzw. (ב) benannt. In Leibniz' Figur sind diese beiden Punktbezeichnungen enthalten, aber nachträglich durchgestrichen.

toton, demissis, sive numeris, CA, ωR, φS, βT, et ad aliquem ex his numeris pro axe sumtum, ut CA demissis ex iisdem curvae punctis, A, R, S, T ordinatis conjugatis, AA (quae infinite parva seu punctum est), RD, SF, TH, erit ut jam diximus, ratio φS ad CA, axem multiplicata rationis ωR ad eandem CA in ratione SF ad RD. Unde si ratio SF ad RD sit dupla [tripla], seu si SF sit aequal. $2RD$. [$3RD$] erit ratio φS ad CA duplicata [triplicata] rationis ωR ad CA. seu φS ad CA erit ut quad. a recta ωR ad quad. a CA [cubus a recta ωR ad cubum a CA.] Et contra per consequens quia RD subdupla seu dimidia SF, erit ratio $\frac{\omega R}{CA}$, subduplicata rationis $\frac{\varphi S}{CA}$ seu ωR ad CA ut radix quadratica a φS, ad radicem quadraticam a CA. seu $\sqrt{\frac{\varphi S}{CA}}$ aequal. $\frac{\omega R}{CA}$. Eodem modo si KX ad DR sit ut 2 ad 3 erit ψK ad CA, ut radix cubica ex quadrato ab ωR ad radicem cubicam ex quadrato ab ωR ad radicem Cubicam ex quadrato a CA, considerando lineas ut numeros, sive quod eodem redit, si legem homogeneorum servare velimus, et magis geometrice loqui erit ψK ad CA ut latus cubi aequalis parallelepipedo sub quadrato ab ωR ducto in altitudinem datam pro unitate assumtam, ad latus cubi aequalis parallelepipedo sub quadrato a CA ducto in eandem altitudinem sumtam pro unitate. Sive omissa unitate, si sit $\frac{KX}{DR}$ aequ. $\frac{2}{3}$ erit $\frac{\psi K}{CA}$ aequalis his formulis:

$$\frac{\sqrt[3]{\overline{\omega R}^2}}{\sqrt[3]{\overline{CA}^2}} \text{ aequ. } \sqrt[3]{\frac{\overline{\omega R}^2}{\overline{CA}^2}} \text{ aequal. } \sqrt[\frac{3}{2}]{\frac{\omega R}{CA}} \text{ aequal. } \boxed{\frac{2}{3}}\frac{\omega R}{CA}$$

sive ratio CA ad ψK erit multiplicata rationis CA ad ωR in ratione 3 ad 2. Notae quibus utor faciles sunt. Nam quadratum ab ωR notare soleo $\boxed{2}\omega R$, vel $\overline{\omega R}^2$ et cubum ab ωR, $\boxed{3}\omega R$ vel $\overline{\omega R}^3$. et radicem quadratam ab ωR, $\sqrt[2]{\omega R}$, vel $\boxed{\frac{1}{2}}\omega R$ vel $\omega R^{\frac{1}{2}}$. quemadmodum et quadratum ab ωR notari potest $\sqrt[\frac{1}{2}]{\omega R}$. Unde radix cubica ex quadrato ab ωR notabitur $\sqrt[3]{\omega R}^2$ vel $\sqrt[\frac{1}{2}]{\omega R}^{\frac{1}{3}}$ vel $\sqrt[\frac{3}{2}]{\omega R}$, vel $\omega R^{\frac{2}{3}}$ vel $\boxed{\frac{2}{3}}\omega R$ adeoque $\frac{\omega R^{\frac{2}{3}}}{CA^{\frac{2}{3}}}$

12–16 considerando ... pro unitate *erg. L*

5–7 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz selbst.

aequal. $\boxed{\frac{2}{3}}\frac{\omega R}{CA}$. Unde ut generali expressione analytica naturam curvae designemus si sit $\frac{KX \text{ vel } \psi C}{DR \text{ vel } C\omega}$ $\frac{a}{b}$, erit $\frac{\psi K \text{ vel } CX}{CA}$ aequal. $\boxed{\frac{a}{b}}\frac{\omega R \text{ vel } CD}{CA}$ eruntque

Numeri ψK vel CX. CA : ωR vel CD.
Logarithmi KX vel a vel ψC. 0 : DR vel b vel $C\omega$.

sive (phrasi magis geometrica), si sit curva aliqua RAK, axis $CDAX$ ordinatae sint: RD, KX sitque ratio CX ad CA multiplicata (vel submultiplicata) rationis CD ad CA in ratione KX ad RD curva dicetur L o g a r i t h m i c a .

Unde facile intelligi potest rationum quoque compositionem eadem methodo fieri. Quemadmodum enim multiplicatio rationum nihil aliud quam aequalium rationum compositio est, ita et inaequales rationes componi nil prohibet. Est enim composita ratio ex alias duabus (pluribusve) cum termini compositae sunt facti ex terminis duarum primarum, ut ratio $\frac{ab}{cd}$ est composita ex $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$. Ergo rationem rationi componere, sive rationem in rationem ducere velimus et praestabimus additione intervallorum. Et primum ponamus rationum componendarum terminum consequentem esse eundem CA, eumque esse unitatem, cujus logarithmus suppositus sit 0. Tunc intervalla illa coincident cum logarithmis. Nempe sit ratio $\frac{\beta T}{CA}$ composita ex rationibus $\frac{\varphi S}{CA}$ et $\frac{\omega R}{CA}$, seu si sit $\frac{\beta T}{CA}$ aequal. $\frac{\varphi S, \omega R}{CA^2}$, seu sit βT in CA aequ. φS in ωR[,] erit TH (qui est logarithmus rationis $\frac{\beta T}{CA}$ posito CA esse unitatem cujus logarithmus sit 0) aequalis $SF + RD$ (logarithmis duarum reliquarum), quia RD aequ. λT (si sint ex constructione $C\omega$ vel DR, $\omega\varphi$ vel θS, $\varphi\beta$ vel λT aequales). Est autem utique TH aequ. $SF + \lambda T$.

Contra: divisio fit subtractione, ut si sit $\frac{\omega R}{CA}$ aequal. $\frac{\beta T}{CA}$ divis. per $\frac{\varphi S}{CA}$ seu aequal. $\frac{\beta T}{\varphi S}$, erit RD (Logarithm. $\frac{\omega R}{CA}$) differentia SF, TH, (logarithmorum duarum reliquarum.) Tantum notandum est, si rationes a diversis axis lateribus sumtae sint, logarithmos ab alterutra parte esse quantitates negativas ut supra dixi, ideo si ponamus rationem

5–7 sive ... L o g a r i t h m i c a . *erg. L* 9 f. qvemadmodum ... prohibet *erg. L* 19 f. qvia ... SF + λT *erg. L*

$\frac{\varphi S}{CA}$ componi cum ratione $\frac{\psi K}{CA}$, et fieri rationem $\frac{\text{ϙ}R}{CA}$. ponamus jam logarithmos omnes a parte axis dextra seu numerorum unitate CA minorum esse quantitates negativas, et logarithmo rationis $\frac{\psi K}{CA}$, seu ipsi $-KX$ addi logarithmum rationis $\frac{\varphi S}{CA}$, seu ipsam $+SF$, fiet $-KX+SF$, id est $-RD$. posito RD esse differentiam inter KX et SF, et $\frac{\text{ϙ}R}{CA}$ ratio (cujus logarithmus est RD.) erit quaesita.

Si quis haec omnia in numeris explicare velit, potest fingere quod ratio בא ad βT et φS ad בא et $(\psi)(K)$ ad φS et ϙR ad $(\psi)(K)$ et ψK ad CA sit semper eadem, quae 5 ad 4. et CA ad ϙR sit quae 25 ad 16. Hinc posito CA aequ. 1. erit ψK aequ. $\frac{5}{4}$. et ϙR aequ. $\frac{25}{16}$. et $(\psi)(K)$ aequ. $\frac{125}{64}$. et φS aequ. $\frac{625}{256}$. et בא, $\frac{3125}{1024}$ et βT, $\frac{15625}{4096}$.

Si vero terminus homologus rationis utriusque non sit semper idem ut hoc loco CA, sed sint diversae rectae aut non sit unitas nihilominus Logarithmi adhiberi possunt. Tunc enim tantum addemus rationum componendarum intervalla, ut ratio ψK ad ϙR est composita ex rationibus φS ad βT et φS ad בא. quia ψϙ aequ. $\varphi\beta+\varphi$א. Facile autem dantur intervalla numerorum inter se ex datis eorum logarithmis seu intervallis ab unitate. Sed ut omnia melius intelligantur, ideo plures etiam compositionis terminos sumemus.

Nimirum quia in curvae logarithmicae asymptoto $C\beta$, sumtae sunt ϙ(ψ). $(\psi)\varphi$. φא. אβ. aequales et demissae in curvam, ordinatae ϙR. $(\psi)(K)$. φS. בא. βT. erunt ipsae continue proportionales. Si vero non sint puncta aequidistantia, nec ordinatae sint proportionales, nihilominus locum habebunt Logarithmorum et intervallorum proprietates, ut si sint puncta ϙ. φ. א. β. et ordinatae ϙR. φS. בא. βT. quae quatuor rectae non sunt continue proportionales; si tamen sumatur ratio ϙR ad βT et quaeratur quomodo sit multiplicata vel submultiplicata rationis φS ad בא, dicemus esse ejus multiplicatam in ratione ϙβ ad φא. seu 4 ad 1. sive esse ejus quadruplicatam. Similiter ratio ϙR ad בא

5–631,1 quaesita. | | Si qvis ... $\frac{15625}{4096}$ *erg.* | Si vero ... qvaesit⟨um.⟩ *erg.* | P r o p o s i t i o *L*
12–16 tunc ... sumemus. *erg. L*

9 $\frac{25}{16}$ ... $\frac{15625}{4094}$: Es müssten bei allen Brüchen jeweils die Kehrwerte stehen.

erit multiplicata vel submultiplicata rationis φS ad βT in ratione ω**א** ad $\varphi\beta$ seu 3 ad 2, quam vulgo vocant sesquialteram, ego hoc loco vocare malo: triplam subduplam, et erit ratio ωR ad **בא** triplicata subduplicata rationis φS ad βT. Jam cum ratio ωR ad βT possit composita intelligi ex rationibus ωR ad φS. φS ad **בא**. **בא** ad βT. constabit etiam distantia extremarum, $\omega\beta$ ex distantiis intermediarum $\omega\varphi$. φ**א**. **א**β. etsi sint plures. Imo nec refert etsi ordo perturbetur. Nam possumus intelligere rationem φS ad βT componi ex rationibus φS ad ωR et ωR ad βT. Erit enim $\varphi\beta$ aequ. $-\varphi\omega + \omega\beta$. ubi quidem ipsi $\varphi\omega$ praefigitur signum $-$ quia ratio φS ad ωR est minoris ad majus.

Eadem locum habent in compositione rationum non-continua[,] exempli gratia sit ratio $(\psi)(K)$ ad φS componenda cum ratione ωR ad **בא**, et quaeratur recta aliqua ad quam sit ωR in hujusmodi ratione composita. Addatur $(\psi)\varphi$ ad ω**א** fiet $\omega\beta$[,] erit βT quaesita. Si quaesita esse deberet in ratione quam diximus non ad ωR sed ad CA, tunc posito $(\psi)\varphi + \omega$**א** esse aequalem $C\varphi$[,] erit φS quaesita. Unde contra patet contrarium compositionis rationum, seu partitionem rationum subtractione fieri, nam si ratio ωR ad βT dividenda sit per rationem ωR ad **בא** et quaeratur recta ad quam sit $(\psi)(K)$ in ejusmodi ratione composita; ea erit φS nam $+\omega\beta - \omega$**א** aequ. $(\psi)\varphi$.

Denique cum in omni multiplicatione sit productus ad unitatem in composita ratione ex rationibus producentium ad unitatem. Hinc posita unitate CA. si velimus numerum ut βT (cujus logarithmus est $-\beta C$. quia ipse numerus minor unitate CA vel quia ratio βT ad CA est minoris ad majus) multiplicare per numerum ψK (cujus logarithmus est $+\psi C$), hinc tantum addendi erunt logarithmi $-\beta C$ et $+\psi C$. et fiet $-$**א**C (si fingamus ψC aequ. **א**β.) et productus erit **בא**.

Contra si velimus dividere **בא** per ψK. (id est posita CA unitate si velimus rationem **בא** ad CA, partiri per rationem ψK ad CA), tantum a $-$**א**C subtr⟨a⟩hatur $+\psi C$ fiet $-\beta C$ et βT erit proveniens. Hinc et reg⟨ula⟩ proportionum seu aurea facile constat. Sit ωR ad **בא** ⟨ut⟩ est $(\psi)(K)$ ad quaesitum, ex puncto (ψ) sumatur $(\psi)\beta$ aequal. ω**א** ab eadem parte, id est quia **א** a dextra ω, erit β a dextra (ψ) et βT erit quaesit⟨um.⟩

9–16 Eadem ... $(\psi)\varphi$. *erg. L* 17 omni | *(1)* ratione *(2)* fractione vel divisione sit numerator ad denominatorem, vel dividendus ad divisorem, ut ipsa fractio ad unitatem; et in omni *gestr.* | multiplicatione *L* 21 hinc *(1)* cum ipse unitatis logarithmus sit 0 (id enim commoditatis gratia semper efficere soleo) *(2)* tantum *L* 22 f. **בא**. *(1)* idque demonstratur ex regula compositionis generali, nam βT in ψK est ad CA in CA seu ad CA quadr. in ratione composita ex βT ad CA et ψK ad CA. fiet *(2)* Contra *L*

Propositio XLIV.

„Si sint quantitates quotcunque $b+n$ et $b-(n)$ et $b-((n))$ etc. sitque l. logarithmus „rationis $b+n$ ad b, et (l) logarithmus rationis $b-(n)$ ad b, et $((l))$ logarithmus „rationis $b-((n))$ ad b[,] erunt

$$\left.\begin{array}{ll} „ & l \\ „ & (l) \\ „ & ((l)) \\ „ & \text{etc.} \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{ut series} \\ \\ \text{decrescentes} \\ \\ \end{array} \left\{\begin{array}{l} \frac{n}{1}-\frac{n^2}{2b}+\frac{n^3}{3b^2}-\frac{n^4}{4b^3}\ \text{etc.} \\ \frac{(n)}{1}+\frac{(n)^2}{2b}+\frac{(n)^3}{3b^2}+\frac{(n)^4}{4b^3}\ \text{etc.} \\ \frac{((n))}{1}+\frac{((n))^2}{2b}+\frac{((n))^3}{3b^2}+\frac{((n))^4}{4b^3}\ \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

„Posita scilicet b semper constante, et ipsis n. vel (n) vel $((n))$ utcunque variantibus.

Id est si asymptoto $C\omega\beta$ etc. intervalloque $C\beta$, inter duas ordinatas CA, βT, describatur curva Logarithmica $ARST$ etc. (modo in definitione praecedenti explicato) et CA sit b.

et	AX sit n		$A(X)$ (n)	AF $((n))$.	
Et rationes sint	CX seu $b+n$	vel	$C(X)$ seu $b-(n)$	vel CF seu $b-((n))$,	ad CA
et logarithmi, sint	KX seu l		$(K)(X)$ seu (l)	SF seu $((l))$.	

Erunt l. (l). $((l))$. aliique quotcunque inter se quemadmodum diximus in propositione, et generaliter si ratio sit $b\pm n$ ad b. seu ut $CA\pm AX$ (id est CX) ad CA, erit $\frac{n}{1}\mp\frac{n^2}{2b}+\frac{n^3}{3b^2}\mp\frac{n^4}{4b^3}$ ut ejus Logarithmus KX.

Demonstratio ita habebitur: centro C. Asymptotis CBL. CA describatur Hyperbola $MNPV\gamma$, cujus ordinatae $X\gamma$, AV, DP, FN, HM, etc. (quae ipsis XK, AA, RD,

1 *(1)*

Propositio XLIII.

(a) Si b + n sit numerus, et l, logarithmus rationis b + n ad b. erit l aequal. $\frac{n}{1}-\frac{n^2}{2b}+\frac{n^3}{3b^2}-\frac{n^4}{4a^3}$ etc.

Si a − n sit numerus et l logarithmus rationis a − n ad a. erit l aequal. $\frac{n}{1}+\frac{n^2}{2a}+\frac{n^3}{3a^2}+\frac{n^4}{4a^3}$ etc

(b) Si b+n sint numeri sumta b. constante, et n quantitatibus variis quibuscunque; sintque et l, logarithmi rationum *(2)*

Propositio | XLIII. *ändert Hrsg.* |

| *Darüber:* imo XLIV | *L* 20–632,2 (qvae ... XK, | A$\mathfrak{h}$ *ändert Hrsg.* |, RD ... jacent) *erg. L*

SF, TH respondentibus logarithmicae curvae ordinatis seu logarithmis in directum jacent). Patet ex P. Gregorii a S. Vincentio libro de Hyperbola prop. 129. spatia $V\gamma XAV$, $VPDAV$, $VNFAV$, $VMHAV$, esse proportionalia Logarithmis, XK, RD, SF, TH rationum CX ad CA, CD ad CA, CF ad CA, CH ad CA, at eadem spatia verbi gratia $V\gamma XAV$, $VNFAV$, (positis CA, b, AF, $((n))$, et ideo CF, $b-((n))$; et positis AX, n, et CX, $b+n$,) sunt inter se, ut $\frac{n}{1}-\frac{n^2}{2b}+\frac{n^3}{3b^2}-\frac{n^4}{4b^3}$ etc. $\frac{((n))}{1}+\frac{((n))^2}{2b}+\frac{((n))^3}{3b^2}+\frac{((n))^4}{4b^3}$ etc. per dicta p r o p. 4 2. Idemque est in caeteris. Ergo dicti logarithmi inter se, eodem erunt modo. Q. E. D.

Scholium

Imo absolute dici poterit, si Logarithmi KX sive l, aut $(K)(X)$ sive (l) sint tales ut rectang. sub AV aequ. a in KX vel in $(K)(X)$ id est al vel $a(l)$ aequetur spatio $VAX\gamma V$ vel $VA(X)(\gamma)V$, fore l vel (l) non tantum ut $\frac{n}{1}-\frac{n^2}{b}$ etc. vel $\frac{(n)}{1}+\frac{(n^2)}{b}$ etc. sed fore omnino l aequ. $\frac{n}{1}-\frac{n^2}{b}$ etc. et (l) aequ. $\frac{(n)}{1}+\frac{(n^2)}{b}$ etc. Nam $X\gamma$ aequ. $\frac{ab}{b+n}$. seu rectang. CAV, quod est potentia Hyperbolae divisum per CX. Ergo $X\gamma$. erit $\frac{a}{1}-\frac{an}{b}+\frac{an^2}{b^2}-\frac{an^3}{b^3}$ etc. per p r o p. 2 6. adde schol. prop. 29. Unde area spatii $VAX\gamma V$ erit $\frac{an}{1}-\frac{an^2}{2b}+\frac{an^3}{3b^2}-\frac{an^4}{4b^3}$ etc. (per prop. 25. et prop. 25. cor. 1. ad modum prop. 29.) At eadem area aequal. al seu rectang. AV in KX. Ergo dividendo utrobique per a erit l. aequal. $\frac{n}{1}-\frac{n^2}{2b}+\frac{n^3}{3b^2}$ etc. Eodem modo probabitur fore (l) aequ. $\frac{(n)}{1}-\frac{(n^2)}{2b}$ etc. quia $(X)(\gamma)$ aequ. $\frac{ab}{b-(n)}$. ergo erit $(X)(\gamma)$ aequ. $\frac{a}{1}+\frac{a(n)}{b}+\frac{a(n^2)}{b^2}$ etc. per p r o p. 2 6.

9–633,2 Scholium ... etc. *erg. L* 15 adde ... 29 *erg. L*

2 libro: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXIX, S. 596 f.
16 prop. 25. cor. 1: Das Korollar ist gestrichen; s. die Lesart zu S. 588 Z. 22 – S. 590 Z. 1.

et spatium $VA(X)(\gamma)V$ vel $a(l)$. aequ. $\frac{a(n)}{1} + \frac{a(n^2)}{2b} + \frac{a(n^3)}{3b^2}$ etc. per prop. 25. ad modum prop. 29. et dividendo per a. erit l aequ. $\frac{(n)}{1} + \frac{(n^2)}{2b}$ etc.

Propositio XLV

„Spatium Hyperbolae conicae infinite longum, $VACQ$ etc. MV, etiam area infinitum „est, sive majus plano quovis assignabili; ac proinde summa seriei numerorum pro- „gressionis harmonicae in infinitum decrescentium,

„ $$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ etc.}$$

„quae hujus spatii aream exprimit (per dicta prop. 42) etiam infinita est.

Quoniam enim spatia Hyperbolica $VADPV$, $VAFNV$, $VAHMV$ etc. sunt proportionalia rectis Logarithmicis RD, SF, TH etc. per dicta ad prop. praecedentem[,] erit spatium Hyperbolicum (infinite longum) proportionale ipsi asymptoto sive infinitae rectae, $C\beta$ etc. Nempe spatium $VACQ$ etc. MV longitudine infinitum, erit ad spatium finitum verbi gratia $VADPV$, ut recta infinita $C\beta$ etc. (sive Logarithmus ipsius 0. infinite parvi) ad rectam finitam RD, logarithmum ipsius CD. adeoque spatii hujus Hyperbolici longitudine infiniti etiam area infinita erit. Superest tantum ut ostendamus rectam $C\beta$ etc. esse asymptoton seu non nisi infinito abhinc intervallo occurrere posse curvae Logarithmicae, $ARST$ etc. Id vero facile est.

Sumta enim qualibet recta ordinata RD, potest inter RD, et $C\beta$ alia interponi quae data recta alia quacunque major sit. Sit enim alia recta δ, major quam recta data, et sit recta δ ad rectam RD in ratione quacunque; poterit aliqua intelligi recta ut CF (vel φS) cujus ratio ad CA, sit multiplicata rationis CD (vel $\backsim R$) ad CA in ratione δ ad RD, ergo δ erit Logarithmus rationis CF ad CA, (ut RD est logarithmus rationis CD ad CA) adeoque FS e puncto F educta curvae Logarithmicae occurrens erit ipsi δ. aequalis; adeoque data recta major. Ergo ordinata ad curvam Logarithmicam inter DR et $C\beta$ potest fieri major recta quavis data, adeoque omnium maxima $C\beta$ etc. est asymptotos sive infinita. Quare et area spatii Hyperbolici (longitudine infiniti,) $VACQ$ etc. MV quae huic infinitae $C\beta$ etc. proportione respondet, infinitae erit areae, ut ostendimus. Q. E. D.

3 XLIV *L ändert Hrsg.* 23 ad DA *L ändert Hrsg.*

Scholium.

Saepe hactenus, etiam a Geometris, dubitatum scio, num forte spatium Hyperbolicum longitudine infinitum, area finitum sit; quemadmodum id de aliis multis spatiis compertum est. Equidem recte asseruerat Wallisius infinitum esse; sed quoniam ejus sententia conjectura tantum, licet ingeniosa, conjectura tamen, nitebatur, multis dubitandi causae superfuere. Quas liquidissima demonstratione tollere, operae pretium visum est.

Propositio XLVI.

„Quadratura figurae Logarithmicae totius pariter infinitae, ac portionum finitarum; „per numeros sive per ordinatas ex curva in asymptoton ductas absectarum. Est „autem haec Quadratura absolute Geometrica, nec Logarithmorum constructionem „supponit, sed tantum notitiam Hyperbolae ex qua orti sunt.

Data Hyperbola $MNPV\gamma$ cujus centrum C. asymptoti CQ, CX, CA abscissa, VA ordinata descripta; intelligatur curva Logarithmica, $ARST$ etc. ejus scilicet naturae, ut ductis ordinatis ad ipsam pariter et Hyperbolicam, γKX, V[illegible]A, PDR, NFS, MHT, (quae ipsam CAX secant in punctis X, A, D, F, H,) usque ad Asymptoton communem $QC\beta$ etc. Sint zonae $VADPV$, $VAFN$, $VAHM$, aequales rectis, RD, SF, TH, in rectam constantem AV ductis; appellabimus CA, numerum primarium, et determinatam habebimus speciem Logarithmicae. Area enim zonae alicujus $VAHMV$ divisa per AV, ⟨recta⟩ proveniens HT, vel $C\beta$. Serviet ⟨di⟩stantia numerorum CA, βT (vel CH) ⟨inter⟩ quos medias proportionales interpondendo ⟨(modo⟩ supra in definitione explicato) ⟨curva⟩ describetur.

His positis rectangulum πHX sub πH vel CA numero primario, cujus logarithmus scilicet sumtus est, 0, sive CA axe, et sub HX duorum numerorum extremorum ψK, βT, differentia, comprehensum, aequatur spatio quadrilineo sive zonae $T\beta\psi KAT$ duobus numeris extremis, βT, ψK, portione asymptoti, $\beta\psi$ (logarithmorum a duobus numeris

19 [illegible]

7 XLV. *L ändert Hrsg.*

4 asseruerat: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, Scholium zu prop. 101 bis Scholium zu prop. 107, S. 74–84 (*WO* I S. 407–412).

nunc summa, nunc differentia) et curva Logarithmica KAT, comprehenso. Quod spatium inveniri patet, etiamsi curva non sit constructa.

Demonstratio haec est, quoniam ita Logarithmi sunt Zonis proportionales, ut ex constructione, sit rectangulum sub AV et sub Logarithmo RD, aequale zonae Hyperbolicae $VADPV$; et eodem modo rectangulum, sub AV, et FS aequale zonae hyperbolicae $VAFNV$ et ita porro; manifestum est differentias zonarum, seu quadrilinea exigua, $PDFNP$, $NFHMN$ etc. aequari differentiis Logarithmorum in AV ductis, seu θS in AV, λT in AV, etc. Ponatur jam rectas DF, FH, adeoque et rectas θS, λT infinite parvas esse; erunt utique et quadrilinea exigua, infinite parva. Constat autem pro quadrilineis ejusmodi infinite parvis DN, FM, assumi posse rectangula, FDP, HFN. Ergo rectangula haec differentiis logarithmorum in AV ductis, aequantur, exempli causa rectangulum FDP, rectangulo VA in θS. Est autem rectangulum FDP aequale ordinatae Hyperbolicae DP in DF (differentiam numerorum CD, CF) et ordinata Hyperbolica DP producitur ut constat, potentiam Hyperbolae, seu rectangulum CAV, dividendo per abscissam CD. Ergo erit DP aequal. $\dfrac{CA \text{ in } AV}{CD}$, et rectangul. FDP aequal. $\dfrac{CA \text{ in } AV, \text{ in } DF}{CD}$. At idem rectang. FDP, aequale rectangulo AV in θS, ergo tollendo communem altitudinem AV, erit $\dfrac{CA \text{ in } DF}{CD}$ aequ. θS. vel CA in DF aequal. θS in CD. vel (quoniam DF infinite parva est, adeoque CD a CF assignabiliter non differt,) erit CA in DF, aequale θS in CF, vel rectangulo $\varphi S\theta$. Eodem modo ostendetur CA in FH aequale rectangulo $\beta T\lambda$, et quoniam ex rectangulis infinite parvis ut $\beta T\lambda$, $\varphi S\theta$, componitur spatium $T\beta\backsim RT$ et ex rectangulis πHF, ξFD, seu CA in FH, CA in DF (posito πH, vel ξF aequal. CA) componitur rectangulum πHD, ideo spatium $T\beta\backsim RT$ aequabitur rectangulo πHD. et quoniam idem fit perpetuo, ideo si in AV producta si opus est, sumatur $A\mu$ aequal. CA, et per puncta, π. ξ. μ. etc. ducatur ipsi CA parallela et aequalis $\mu\alpha$, et πH, vel ξF,

2 f. constructa. *(1)* Demonstratio haec est. Centro C Asymptotis CL. CA normalibus per punctum V. descripta intelligatur Hyperbola aequilatera VPNM, cuius ordinatae praeter AV, DP, FN, HM, et zonae Hyperbolicae VADPV, VAFNV, VAHMV, logarithmis, AA, DR, FS, HT (quae dictis ordinatis in directum jacent) proportionales, ut constat ex dictis. quoniam autem multis modis id fieri potest, pro alia atque alia Hyperbola ad datam Logarithmicam jam constructam, accommodata, ideo ea electa intelligatur Hyperbola, ut ad CA, ordinata AV, cujus punctum V ita sit determinatum, sive AV, ordinata ipsius CA abscissa, talis sit, ut rectangulum sub AV (ordinata Hyperbolica, numero ad numerum primarium CA, velut abscissam respondente) *(2)* Demonstratio *L* 6 porro *(1)*. Ergo differentiae harum zonarum (ita enim erunt et manebunt Logarithmi zonis proportionales;) et semper talem Hyperbolam demonstrationis causa mente concipere licet. His positis *(2)*; manifestum *L*

vel μA sint ipsi CA aequales, erit perpetuo rectangulum, ut πHX, aequale quadrilineo Logarithmico $T\beta\psi KAT$. Quod erat demonstrandum.

Hinc patet Rectangulum μAC, id est quadratum a CA, (numero primario) aequari spatio infinito AC etc. TA. Si vero non AV fuisset constans assumta, sed alia ut δ. fuissetque rectangulum sub δ et RD aequale zonae $VADPV_{[,]}$ habuissemus $\frac{CA \text{ in } AV}{\delta}$ in DF, aequal. θS in CF, seu rectangulo $\varphi S\theta$. et ita in caeteris quoque: eritque area hujus figurae logarithmicae, ad aream prioris ut AV ad δ. seu in reciproca altitudinum logarithmos zonis aequantium ratione.

Si vero alia quaecunque figura Logarithmica assumta aut constructa intelligatur, cujus origo ex Hyperbola nota non sit, tunc Geometrice sive supposita Logarithmi alicujus saltem constructione, expediri non potest. Sufficit autem unus tantum. Quoniam enim omnes Logarithmi earundem rationum ad eandem CA inter se sunt proportionales (ut patet ex dictis ad Definitionem Logarithmi), erunt quoque eorum differentiae, ut λT, θS, in una pariter et in alia figura (quam appingere necesse non putavi) proportionales, ergo et rectangula $\beta T\lambda$, $\varphi S\theta$, sub iisdem in qualibet figura logarithmica numeris, βT, φS, et rectis proportionalibus λT, θS, erunt proportionalia; ergo et horum rectangulorum summae, seu area in una figura logarithmica, erit ad aream intra eosdem numeros βT, φS contentam in alia figura logarithmica, ut hae differentiae respondentes seu ut Logarithmi respondentes seu ut $\omega\beta$ intervallum duorum numerorum in una, est ad intervallum eorundem numerorum in alia; vel etiam ut TH logarithmus rationis βT ad CA in una est ad logarithmum ejusdem rationis in alia. Quare ut ex quadratura unius figurae Logarithmicae derivetur quadratura alterius figurae logarithmicae, (ignotae originis ex Hyperbola) opus est ejusdem rationis logarithmum, bis, in una scilicet pariter ac in altera notum esse.

Scholium

Magnus est consensus inter dimensionem figurae numerorum ad Logarithmos applicatorum seu Logarithmicae, et figurae sinuum ad arcus applicatorum. Utriusque enim

4 TA; *(1)* eodemque jure et quadratum ab ωR vel CD aequari spatio infinito Rω etc. TR, adeoque et horum duorum infinitorum spatiorum differentiam, spatium finitum ACωRA esse differentiam quadratorum a CD et a CA. patet etiam unius habito Figurae *(2)* Logarithmica habita quadratura, haberi quadraturam caeterarum omnium | ex eadem Hyperbola ortarum, si altitudo communis, non AV, sed alia quaecunque fuisset *erg.* | ut supra ostendimus (in Definitione) omnium Curvarum Logarithmicarum ordinatae seu Logarithmi earundem rationum sunt inter se proportionales. *(3)* Si *L* 14 in una ... putavi) *erg. L* 18 f. ut hae ... seu ut *erg. L*

area perpetuo rectangulo sub recta quadam constante ducta in altitudinem [aequalis est]; quae recta constans hic est Numerus primarius; in figura sinuum vero radius circuli generatoris. Caeterum figuram Logarithmicam hactenus quod sciam quadravit nemo; nec alioquin pro dignitate tractavit.

Possem multa singularia circa tanti momenti curvam annotare, nisi ad rem tantum pertinentia dicere constituissem. Nam abstinuissem hac quoque propositione, utcunque pulcra, nisi ad sequentia demonstranda, et regulam Logarithmorum inversam, id est inventionem numeri ex dato Logarithmo demonstrandam conferre animadvertissem. Tantum de tangentibus ejus obiter annotabo proprietatem omnium maxime admirabilem; nempe, si ex quibuscunque curvae punctis T. S. etc. educantur tangentes TY, SZ, fore interceptas in asymptoto inter tangentem et ordinatam, βY, φZ, etc. semper aequales rectae constanti CA seu n u m e r o p r i m a r i o, ac proinde et aequales inter se. Id vero facile ex his quae diximus demonstrari potest.

Incidi autem in hanc proprietatem methodo tangentium inversa, (qua saepe cum successu utor) et cum mihi hujusmodi curvam investigandam proposuissem inveni esse Logarithmicam. Cujus occasio meretur edisseri. Cum nuper tertium tomum Epistolarum Cartesii volverem, incidi in Epistolam 71. quam ad Beaunium scripsit in qua curvam hujusmodi quaerere instituit, Beaunio proponente quaestionem. Equidem motus quosdam ad eam describendam comminiscitur; sed irregulares, nec nisi forte in angeli cujusdam potestate existentes; unde imperfectionem solutionis ipse agnoscit, fassus (quod non solet, nisi cum difficultatem nulli alii superabilem putat) nihil a se melius afferri posse ad naturam lineae definiendam, quoniam ex analyticarum numero non sit.

Haec, fateor, confessio, tanti Geometrae excitavit curiositatem meam. Nec mora semihorulae spatio, admotis quibusdam machinis, analysi quadam mea usus, quae Cartesio certe nota non fuit, Logarithmicam eduxi. Cujus rei testis amicus esse potest, qui cum

9 tangentibus *(1)* ejus obiter dicam, si ex punctis T. S. educantur tangentes TY, SZ ad asymptoton, fore interceptas βY, φZ, numeris βT, φS, reciproce proportionales. Inde una tangente habita, ex supposita curvae constructione possunt caetera haberi *(2)* eius *L* 18 Equidem | agnoscit (quanqvam per conjecturam tantum) hujusmodi curvam non esse Analyticam sive aequatione certi gradus explicabilem; et *gestr.; daneben am Rand:* delenda | motus *L* 25 fuit, | *(1)* nescio an non aliis, *(2)* credo non aliis, *gestr.* | Logarithmicam *L*

18 instituit: s. den Brief von Descartes an Debeaune vom 20. Februar 1639 in: R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 412–415 (*DO* II S. 514–517). 25 eduxi: s. VII, 5 N. 90 S. 600–602 sowie N. 91 S. 603–605. 25 amicus: nicht gefunden.

librum mihi retulisset, et quaestionem notasset, postero die a me solutionem habuit. Inter Cartesii figuram pag. 413 et meam hic expressam hoc tantum interest, quod ille angulum ABP, axis ad asymptoton sumsit obliquum ego rectum; quoniam Logarithmicae ordinatas facilitatis causa normales assumere soleo quanquam angulus quantum ad hanc tangentis proprietatem nihil ad rem faciat.

Fateor tamen hanc Quaestionem, quae tantum negotii Cartesio frustra fecit, esse unam ex methodi tangentium inversae facillimis, et pluribus modis ad ejus solutionem posse perveniri. Unde clare video methodum quandam certam et analyticam in hoc argumento nondum vel Cartesio vel quod sciam aliis, fuisse exploratam. Ejus vero semina quaedam in his quae diximus hac propositione diligens scrutator facile deprehendet.

Propositio XLVII

„Si sint quantitates seu numeri $b+n$, et $b-(n)$, et $b-((n))$, sitque l logarithmus „rationis $b+n$ ad b; et (l) logarithmus rationis $b-(n)$ ad b, et $((l))$ logarithmus ratio„nis $b-((n))$ ad b, erunt

$$\begin{array}{lll} \text{„} & n & \text{ut series} \\ \text{„} & (n) & \text{decre-} \\ \text{„} & ((n)) & \text{scentes} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{l}{1}+\dfrac{l^2}{1,2b}+\dfrac{l^3}{1,2,3b^2}+\dfrac{l^4}{1,2,3,4b^3}\ \text{etc.} \\ \dfrac{(l)}{1}-\dfrac{(l)^2}{1,2b}+\dfrac{(l)^3}{1,2,3b^2}-\dfrac{(l)^4}{1,2,3,4b^3}\ \text{etc.} \\ \dfrac{((l))}{1}-\dfrac{((l))^2}{1,2b}+\dfrac{((l))^3}{1,2,3b^2}-\dfrac{((l))^4}{1,2,3,4b^3}\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

„posito b esse numerorum primarium.

15–17 $1,2.$ id est 1 in 2. seu 2. et $1,2,3.$ id est 1 in 2 in 3 seu 6. et $1,2,3,4.$ id est 24. etc.

4–6 soleo | quanquam ... faciat *erg.* | *(1)* Equidem fateor hanc regressuum methodum nondum esse perfectam et absolutam. *(2)* Fateor *L* 8 methodum *(1)* maxime simplicem et naturalem *(2)* quandam *L* 11 XLVI *L ändert Hrsg.*

---

16 $\dfrac{(l)}{1}$ ... etc.: Die Reihenentwicklung wäre korrekt, wenn (l) den Logarithmus von $\dfrac{b}{b-(n)}$ statt $\dfrac{b-(n)}{b}$ wiedergäbe. Der Fehler wirkt sich bis S. 640 Z. 14 aus. Im *Compendium quadraturae arithmeticae* (*LMG* V S. 111) formuliert Leibniz die prop. XLVII unter Beibehaltung der hier gegebenen Reihen um für Logarithmen, bei denen der Zähler im Argument größer ist als der Nenner; vgl. S. 640 Z. 23 f.

Id est si curva Logarithmica ex Hyperbola modo in propositionis 46. explicatione tradito, derivetur ac describatur, ut habeatur numerus primarius AC vel b. literaeque ac lineae eodem modo ut ad prop. 44. sumantur, AX posita n. et $A(X)$ posita (n) vel AF posito $((n))$. Ac CX posita $b+n$, $C(X)_{[,]}$ $b-(n)$ et CF, $b-((n))$, denique KX posito l, $(K)(X)$, (l) et SF, $((l))$, erunt inter se n. (n). $((n))$ ex datis l. (l). $((l))$. quemadmodum propositio enuntiat. Quod ita demonstrabitur:

Ponamus datam esse curvam ejusmodi KAR, in qua abscissis $A\text{ל}$ vel KX positis l, ordinatis $\text{ל}K$ vel AX positis n, et recta constante seu parametro b aequ. CA, sit

$$n \text{ aequ. } \frac{l}{1}+\frac{l^2}{1,2b}+\frac{l^3}{1,2,3b^2}+\frac{l^4}{1,2,3,4b^3} \text{ etc.}$$

ajo curvam quae huic aequationi satisfaciat esse Logarithmicam qualem diximus.

Hoc ita demonstro; quoniam n vel $\text{ל}K$. ordinata ultima spatii $A\text{ל}KA$ est aequalis seriei decrescenti $\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1,2b}+\frac{l^3}{1,2,3b^2}+\frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$ etc. erit summa omnium aliarum ordinatarum, inter verticem A, et basin $\text{ל}K$ comprehensarum, seu area spatii $A\text{ל}KA$, aequalis seriei decrescenti, $\frac{l^2}{1,2}+\frac{l^3}{1,2,3b}+\frac{l^4}{1,2,3,4b^2}+\frac{l^5}{1,2,3,4,5b^3}$ etc. quemadmodum demonstratur ex prop. 25 ad modum propositionis 29. et $A\text{ל}KA$ spatium divisum per CA sive b, erit $\frac{l^2}{1,2b}+\frac{l^3}{1,2,3b^2}+\frac{l^4}{1,2,3,4b^3}+\frac{l^5}{1,2,3,4,5b^4}$ etc. Ergo $\frac{A\text{ל}KA}{b}+\frac{l}{1}$ aequal. $\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1,2b}+\frac{l^3}{1,2,3b^2}+\frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$ etc. at eadem series aequal. $\text{ל}K$, ex constructione, ergo ex natura curvae, erit $\frac{A\text{ל}KA}{b}+l$ aequal. $\text{ל}K$. sive $A\text{ל}KA+lb$ aequal. $\text{ל}K$, in b. Est autem lb factum ex l. in b. seu ex $A\text{ל}$ in CA, seu rectang. $CA\text{ל}$, et $\text{ל}K$, aequal. AX. et μA ponatur aequal. CA, vel b. erit $\text{ל}K$ in b aequal. rectang. μAX. Ergo fiet spatium $AC\psi KA$ compositum ex spatio $A\text{ל}KA$, et rectangulo (lb id est) $CA\text{ל}$, aequale rectangulo μAX. Id vero quocunque in curva sumto puncto K, infra A contingere pro-

1 45. *L ändert Hrsg.* 3 43. *L ändert Hrsg.*

prietas est curvae Logarithmicae, quemadmodum demonstratum est in Quadratura ejus, propositione praecedenti exhibita.

Curva ergo KAR. proposita est logarithmica, et KX seu l est logarithmus rationis numeri CX, (seu $CA + AX$) seu $b + n$ ad CA seu b. Posito scilicet numerum primarium esse CA sive b. qui scilicet originem curvae logarithmicae ex hyperbola sua ostendit modo ad prop. 46. initium explicato; et perpetuo aequatur portioni asymptotae intra ordinatam et tangentem interceptae, quemadmodum sub finem scholii dictae prop. 46. diximus.

Eadem demonstratio est si punctum curvae (K) fuisset supra A, mutatis tantum signis. Quia enim posita Aל, (l) et $A(X)$, (n)[,] ipsa $A(X)$ vel (n) ex hypothesi in curva proposita aequal. seriei decrescenti $\frac{(l)}{1} - \frac{(l^2)}{1,2b} + \frac{(l^3)}{1,2,3b^2} - \frac{(l^4)}{1,2,3,4b^3}$[,] erit area spatii A(ל)$(K)A$ aequal. $\frac{(l^2)}{1,2} - \frac{(l^3)}{1,2,3b} + \frac{(l^4)}{1,2,3,4b^2} - \frac{(l^5)}{1,2,3,4,5b^3}$ etc. et $\frac{A(\text{ל})(K)A}{b}$ aequal. $\frac{(l^2)}{1,2b} - \frac{(l^3)}{1,2,3b^2} + \frac{(l^4)}{1,2,3,4b^3} - \frac{(l^5)}{1,2,3,4,5b^4}$ etc. Ergo $(l) - \frac{A(\text{ל})(K)A}{b}$ aequal. $\frac{(l)}{1} - \frac{(l^2)}{1,2b} + \frac{(l^3)}{1,2,3b^2} - \frac{(l^4)}{1,2,3,4b^3}$ etc. at eadem series aequal. (n) ex hypothesi. Ergo $(l)b - A$(ל)$(K)A$ aequal. $(n)b$; est autem $(l)b$ aequal. rectangulo CA(ל) ergo $(l)b - A$(ל)$(K)A$, aequal. spatio $AC(\psi)(K)A$ ergo spatium $AC(\psi)(K)A$ aequale rectangulo $(n)b$, seu $\mu A(X)$ quod rursus in Curvae Logarithmicae proprietatem esse propositione praecedenti demonstratum est; ut dixi, patet.

2 f. exhibita. | Et vero nunquam id in alia curva contingere potest, ut examinanti eam demonstrationem patebit, quia omnes in ea adhibitae propositiones sunt convertibiles; et statim demonstratio per regressum inde concinnari potest. *gestr.; dazu am Rand, gestr.:* Dieß kan ausgeleschet werden, dann es verstehet sich daß nur eine curva einer aeqvation genug thuet | Curva *L* 6 45. *L ändert Hrsg.* 8 45. *L ändert Hrsg.* 12 f. *Am Rand:* videndum hic ne sit erratum ut in compendio videor correxisse nempe semper + nec oritur − nisi per accidens cum l est negativus *gestr. L* 18 est; *(1)* eique soli competere, *(a)* ob propositionis convertibilitatem *(b)* ex propositionum ibi adhibitarum convertibilitate *(2)* ut dixi, *(a)* ostendi pot *(b)* patet *L*

23 compendio: *Compendium quadraturae arithmeticae*, *LMG* V S. 111.

Proprietas autem illa reciproca est, quia non nisi una curva unius curvae nempe Hyperbolae, quadratrix tali modo esse potest, ut ordinatae ejus in aliquam datam ductae sint semper spatiis Hyperbolicis dato modo sumtis aequales. Nec nisi curva hujusmodi Hyperbolae quadratrix eam proprietatem habere potest.

Scholium.

Quemadmodum propositio 44 modum exhibet ex datis numeris seu rationibus inveniendi Logarithmos, assumto quodam numero primario quocunque CA, et Hyperbola etiam quacunque, cujus potentia sit rectangulum CAV, quaeque transeat per V. (qui Logarithmi aliis Logarithmis alio modo inventis erunt proportionales, et ad eos poterunt regula aurea reduci); ita vicissim ex dato tali Logarithmo ut KX et rectis CA, AV. adeoque et Hyperbola cognita, ex quibus ducti sunt Logarithmi, atque educendi modo, supra ad prop. 46. initium explicato; poterit inveniri numerus CX aut ratio CX ad CA, quaesita, logarithmo dato respondens. Quod ad operationes Logarithmorum sine tabulis faciendas, tabulasque ipsas perficiendas aut corrigendas sufficit.

Porro methodus inveniendi Logarithmos ex datis numeris, ex duobus pendet inventis; uno Patris a S. Vincentio e Societate Jesu, qui analogiam inter Logarithmos et spatia hyperbolica ostendit primus; altero Nicolai Mercatoris Holsati qui ostendit quomodo ordinata curvae Hyperbolicae in ordinatas infinitarum parabolarum possit resolvi; quae ejus methodus et ad alias curvas rationales, et certis quoque casibus irrationalibus extendi potest.

Sed quoniam Circuli curva non est hujus naturae, ideo Mercator eam non attigit; mihi ergo methodus innotuit, qua tum Circulus tum alia quaelibet figura in aliam rationalem aequipollentem transmutari, ac per summas infinitas rationales exhiberi potest. Mercator modum invenit figuras rationales quadrandi per seriem infinitam, nos viam deprehendimus qua omnes figurae aequationis cujuscunque reduci possint ad rationales aequipollentes. (Quanquam aliae sint multae rationes sine hac reductione quadrandi figuras per series rationales infinitas.)

1–4 proprietas ... potest. *erg. L* 6 45 *L ändert Hrsg.* 12 45. *L ändert Hrsg.*

16 uno: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXV–CXXX, S. 594 bis 597. 17 altero: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XIII–XVIII, S. 24–32 [Marg.]. 24 invenit: *a. a. O.*

Unde orta est regula generalis quadrandi sectionem Conicam centrum habentem quamlibet, prop. 43. ex qua et Hyperbolae Quadratura et Logarithmi inventio a Mercatoris expressione diversa habetur quam tamen satis fuse explicare non vacavit. Atque haec de modo inveniendi Logarithmos ex datis numeris, cujus laus prima aliis debetur, tametsi non nihil a me quoque adjectum credam. Sed quoniam ad operationem per Logarithmos sine tabulis, opus est regressu quoque, seu ut ex dato Logarithmo reperiri possit numerus, ideo non ante destiti, quam regulam hac propositione expositam, simplicitate elegantia et fructu vix alteri cessuram, reperi. Methodus autem qua ad eam perveni ex asse mea est, nec praeter notam omnibus quadraturam paraboloidum quicquam supponit. Hinc jam similem regulam pro regressu Trigonometrico, seu inventione laterum ex angulis datis, demonstrare difficile non fuit; quam nunc exponam.

[*Erste Fassung*]

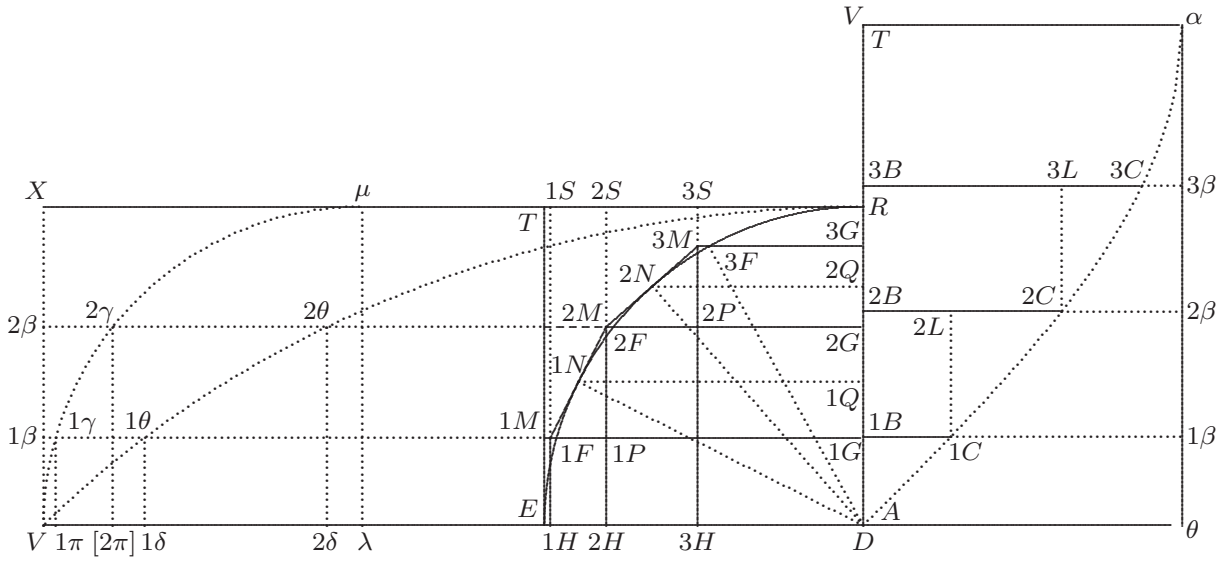
Propositio XLVIII.

„Si arcus sit a, radius, r; sinus rectus, s; erit

„ s aequal. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3r^2} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^4} - \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^6}$ etc.

Sit linea curva $A1C2C3C$, cujus abscissae ut AB etc. appellentur a. et ordinatae normales ut BC appellentur s. Sit parameter seu recta constans DR, quam vocabimus r, sitque aequatio curvae naturam explicans, s aequ. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3r^2}$ etc. qualem dixi, ajo curvam esse Lineam sinuum, qualem explicabo, id est si recta AB aequetur arcui EF quadrantis EFR, centro D, radio DR descripti, tunc recta BC aequabitur sinui recto ejus arcus, nempe rectae DG vel HF respondenti usque ad ultimam $V\alpha$, quae aequatur radio DR. Hoc ita demonstrabimus.

3 quam ... vacavit *erg. L* 9 f. supponit. | Unde multa meditatione mihi constitit, et si inventa, difficultate simul et usu aestimanda sunt, contemni non meretur. *gestr.* | Hinc *L* 13 XLVII. *L ändert Hrsg.*



[*Fig. 15a*]

(1) Inter ordinatas $3B3C$, $2B2C$, $1B1C$, etc. differentiae designentur: $3L3C$, $2L2C$, etc. idque ponatur usque ad A continuatum esse, easque differentias esse infinite parvas; patet posita abscissarum differentia, (ipsa scilicet $1B2B$, vel $2B3B$,) semper constante infinite parva, et appellata 1 una scilicet infinitesima parte altitudinis AB et abscissis ut dixi appellatis, a, fore differentiam ordinatarum ut, $3L3C$, $1 - \frac{a^2}{1,2r^2} + \frac{a^4}{1,2,3,4r^4}$

2 (1) *(1)* Sit A3B, a, erit utique 3B3C, $\frac{\mathrm{a}}{1} - \frac{\mathrm{a}^3}{1,2,3\mathrm{r}^2}$ etc. Inter ordinatam 3B3C, et aliam minorem, 2B2C, sit differentia 2L, et inter sum *(2)* Inter L 5 appellata *(1)* β. et abscissis ut dixi appellatis, a, fore differentiam ordinatarum ut, 3L3C, $\beta - \frac{\beta\mathrm{a}^2}{1,2\mathrm{r}^2} + \frac{\beta\mathrm{a}^4}{1,2,3,4\mathrm{r}^4} - \frac{\beta\mathrm{a}^6}{1,2,3,4,5,6\mathrm{r}^6}$ [quoniam summa omnium hujusmodi differentiarum ut 3L3C, +2L2C+ etc. dat ultimam ordinatarum, 3B3C, et summa omnium $\beta - \frac{\beta\mathrm{a}^2}{1,2\mathrm{r}^2}$ etc. (positis β. constantibus, et differentiis ipsarum a,) reddit $\frac{\mathrm{a}}{1} - \frac{\mathrm{a}^3}{1,2,3\mathrm{r}^2}$ etc. etiam ultimam ordinatam assumtam 3B3C.] Summa autem omnium s in β. ductarum, seu summa rectangulorum 3C3B2B, 2C2B1B, seu *(2)* 1 L

1 *Fig. 15a*: In der Figur, die eine Vorstufe von Fig. 3 aus N. 35 (s. S. 402 Z. 1) wiedergibt und die Leibniz für die überarbeitete Fassung von prop. XLVIII zu fig. 15 (s. S. 652 Z. 1) umgearbeitet hat, tritt die Punktbezeichnung V doppelt auf. Der Punkt V im später gestrichenen linken Teil der Zeichnung wird jedoch nur in der gestrichenen Lesart zu S. 647 Z. 1 f. benutzt.

$-\dfrac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^6}$ [quoniam summa omnium hujusmodi differentiarum ut $3L3C$, $+2L2C+$ etc. dat ultimam ordinatarum, $3B3C$, et summa omnium $1-\dfrac{a^2}{1,2r^2}$ etc. reddit $\dfrac{a}{1}-\dfrac{a^3}{1,2,3r^2}$ etc. etiam ultimam ordinatam assumtam $3B3C$.]

(2) Summa autem omnium s, seu BC usque ad ultimam $3B3C$, cujus arcus $A3B$, sit a[,] seu summa omnium $\dfrac{a}{1}-\dfrac{a^3}{1,2,3r^2}$ etc. id est spatium $ABCA$ dat $\dfrac{a^2}{1,2}-\dfrac{a^4}{1,2,3,4r^2}+\dfrac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^4}$ etc., quae si prius divisa per r^2, auferatur postea ab 1. differentia arcuum semper constante, fiet $1-\dfrac{a^2}{1,2r^2}+\dfrac{a^4}{1,2,3,4r^4}$ etc. quem supra artic. 1 hujus prop. invenimus valorem ultimae differentiae $3L3C$. Ergo area figurae seu spatii $A3B3CA$ divisa per r^2, quadratum a DR, et postea subtracta ab 1. sive $1B2B$, (vel $2B3B$, quod idem est) relinquet $3L3C$. sive generaliter loquendo: $1-\dfrac{ABCA}{r^2}$ aeq. $\dfrac{LC}{1}$.

(3) Nunc id ostendam fieri in linea sinuum qualem descripsi. Arcu circuli $E3F$ in infinitas partes aequales diviso, vel, ejus loco, adhibito polygono regulari infinitorum laterum, circumscripto, cujus latera sint $3M2M$, $2M1M$ etc. quorum puncta media $1N$, $2N$. ducantur radii $D1N$, $D2N$, et ex punctis M demittantur in DE perpendiculares MH et in DR perpendiculares MG, in ipsis MH sumantur $3M2P$, $2M1P$, etc. aequales ipsis $3G2G$, $2G1G$; et ex punctis N, in DR, demissis perpendicularibus NQ. Patet Triangula, $2M1P1M$ et $1N1QD$ esse similia (ob angulum DNM rectum) adeoque esse rectang. $1M1P$ in $D1N$ aequale rectangulo $1M2M$ in $D1Q$.

4–10 Corrigenda haec.

4 cujus radius A3B *L ändert Hrsg.* 9 1B2C, (vel 2B3C *L ändert Hrsg.* 10 f. 3L3C. | sive ... $\dfrac{\text{LC}}{1}$ *erg.* | *(1)* Nunc id ostendam fieri in Linea Sinuum qualem descripsi; qvoniam E1F, E2F, E3F arcus rectis A1B, A2B, A3B, aequales sunt, erunt 1F2F, 2F3F, ipsis 1B2B, 2B3B aequales, adeoque constanti quantitati 1, scilicet uni infinitesimae arcus circuli, loco arcus 1F2F3F, adhibeatur polygo *(2)* (3) Nunc *L* 18 D 1 N *(1)* (id est rectangulo 1S1H2H, quia H aequal. DR et DN, et 1H2H aequale 1M1P) *(2)* aequale *L*

1–3 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz selbst.

(4) Porro rectangulum sub $1M2M$ in $D1Q$, coincidit rectangulo $1C1B2B$, nam differentia inter $D1Q$ et $D1G$ infinite parva est, adeoque pro uno possunt haberi, est autem $D1G$ aequal. $1B1C$, posito curvam AC esse lineam sinuum, ex constructione, ergo et $D1Q$ aequal. $1B1C$. Porro $1M2M$ aequalis habetur arcui $1F2F$, possumus enim Circulum considerare, ut polygonum regulare infinitorum laterum, quorum unum est $1M2M$. Est autem $1F2F$ aequalis $1B2B$, posito rursus curvam esse lineam sinuum, ex constructione, ergo haberi potest $1M2M$ pro aequali $1B2B$, et proinde rectangulum $1M2M$ in $D1Q$ coincidit rectangulo $1C1B2B$.

(5) Similiter rectangulum $1M1P$ in $D1N$, coincidit rectangulo $1S1H2H$. quia qualibet $S1H$ posita aequali RD, vel DN, et $1H2H$ aequali $1N1P$.

(6) Quoniam ergo rectangula $1M2M$ in $D1Q$; $1M1P$ in $D1N$
coincidunt rectangulis $1C1B2B$ $1S1H2H$
per artic. 4. 5. et vero per artic. 3. rectangula $1M2M$ in $D1Q$ aequalia sunt, etiam rectangula $1C1B2B$, $1S1H2H$ aequalia erunt, et quia ob infinite parvam latitudinem $1B2B$, non differt rectangulum $1C1B2B$ a quadrilineo exiguo $1C1B2B2C1C$[,] erit rectang. $1S1H2H$ aequal. quadrilineo $1C1B2B2C1C$, et pari jure rectangulum $2S2H3H$ aequale quadrilineo $2C2B3B3C2C$. Et quoniam id semper fit erit (posita TE aequali et parallela RD) rectangulum TEH aequale spatio $ABCA$ respondenti. Quae est quadratura figurae sinuum dudum aliis quoque nota; et quae cum quadratura figurae logarithmicae prop. 46 exhibita pulcherrime consentit, ut

---

1–646,2 Corrigenda et conferenda cum descriptis jam arcubus RF in rectas AB translatis, et sinubus eorum versis RG translatis in ordinatas BC, quemadmodum supra dictum est, constituatur figura sinuum versorum $AV\alpha CA$, et ei [*bricht ab*]

22 45 *L ändert Hrsg.*

---

21 aliis: z. B. H. Fabri, *Opusculum geometricum*, 2. Aufl., in: ders., *Synopsis geometrica*, 1669, prop. XXIII, cor. VII, S. 383; Bl. Pascal, *Traité des sinus du quart de cercle*, 1658, S. 1 (*PO* IX S. 61 f.).

conferentibus patebit. Nec vero alteri quam lineae sinuum qualem explicuimus competere potest.

(7) Porro ob eadem Triangula similia $2M1P1M$, et $1N1QD$ artic. 3 erit rectang. sub $D1N$ in $1P2M$ aequal. rectang., sub $1N1Q$ in $1M2M$. Posuimus autem $1M2M$ aequ. $1B2B$. aequ. 1. seu uni infinitesimae arcus RE sive rectae AV, et $1P2M$ aequ. $1G2G$, aequ. $2L2C$. et $1N1Q$ aequ. $2M2G$. (ob differentiam infinite parvam) vel $2HD$. Ergo fiet rectang. $D1N$ vel DR in $2L2C$ aequal. $2HD$ in 1. eodem modo DR in $3L3C$ aequal. $3HD$ in 1. sive $3HD$ aequal. DR in $3L3C$ sive generaliter HD aequal. LC in DR, vel rectang. $RD3H$ aequ. $3L3C$ in quad. DR.

(8) Porro quia rectang. TEH. seu DR in $ED - HD$ sive in $DR - HD$, aequ. Spat. $ABCA$ per artic. 6 erit DR quad. $- DR$ in HD aequ. $ABCA$, vel DR in HD aequ. DR quad. $- ABCA$. at idem DR in HD vel rectang. RDH aequ. LC in DR quad. per artic. 7. Ergo DR quad. $- ABCA$. aequ. LC. in DR quad. divisisque omnibus per DR quad. erit $1 - \frac{ABCA}{r^2}$ aequ. LC. quemadmodum desiderabatur; Nam artic. 2. ostensum est figuram, in qua AB posita a, et BC, s. est s. aequ. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,[3]r^2} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^4}$ etc. hoc habere ut sit $1 - \frac{ABCA}{r^2}$ aequ. LC. Hic vero ostensum est id praestari a linea sinuum. Nec vero ab alia praestari potest quoniam ex proprietatibus lineae sinuum reciprocis deducta est interventu propositionum reciprocarum unde facile demonstratio conversa concinnari potest. Et certe determinata methodo hujusmodi curvam quaerendo in lineam sinuum necessario incidi. Et generaliter hujusmodi proprietates curvarum in quibus ordinatae aut summae ordinatarum aut summae summarum etc., aut differentiae, auctae certis quantitatibus aut minutae inter se aequantur, specificae sunt, quemadmodum facile ostendi posset. Sed prolixitatis vitandae causa haec deducere omitto.

Quoniam quadratura artic. 6. exposita non nisi lineae sinuum qualem explicuimus competere potest, ut ibi diximus; ea vero ad hanc rem necessaria est, ut hic patet. Ergo linea $A1C2C$ proposita, proprietatem habens explicatam linea sinuum est, et sinus rectus ad arcum relationem habet quam diximus in propositione. Q. E. D.

1 f. Nec ... potest | quia propositiones adhibitae convertibiles sunt, et facile demonstratio per regressum continuari posset nisi inutilem prolixitatem vitarem *gestr.* | *erg. L*

Eadem proprietas paucis mutatis ad naturam cycloidis aequatione explicandam adhiberi potest, quemadmodum et superior prop. [47.] idemque est de aliis curvis quae arcum aut quadraturam circuli, inventa supponunt.

Propositio XLIX.

„Si arcus sit a, radius r, sinus complementi c, erit

„ $$c \text{ aequ. } \frac{r}{1} - \frac{a^2}{1,2,r} + \frac{a^4}{1,2,3,4,r^3} - \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^5} \text{ etc.}$$

In eodem schemate si arcus EF sit a, et FG vel HD sinus complementi, c, et DR seu radius, r. Ajo fore c aequ. $\frac{r}{1} - \frac{a^2}{1,2,r} + \frac{a^4}{1,2,3,4,r^3}$ etc. Hoc ita demonstro: si (arcus EF seu) AB sit a, erit sinus rectus (HF vel DG vel) BC aequal $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3r^2} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^4}$ etc. per prop. 48. Ergo summa omnium sinuum rectorum ad arcum applicatorum seu area spatii $ABCA$, erit $\frac{a^2}{1,2} - \frac{a^4}{1,2,3,4,r^2} + \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6,r^4}$ etc. (quemadmodum jam diximus in demonstratione dictae propositionis 48 praecedentis). At eadem area spatii $ABCA$, est aequalis rectangulo TEH, seu TE id est DR, in EH, id est in $ED - HD$, sive in $DR - HD$. Ergo DR quad. $- DR$ in HD, aequ. spat. $ABCA$, seu HD aequ. $DR - \frac{\text{spat. } ABCA}{DR}$, sive HD id est c aequ. $r - \frac{ABCA}{r}$ id est pro spatio $ABCA$ ponendo valorem inventum, erit c aequ. $\frac{r}{1} - \frac{a^2}{1,2,r} + \frac{a^4}{1,2,3,4,r^3}$ etc. Q. E. D.

Scholium

Haec expressio praecedente (utcunque simplici et pulchra,) melior adhuc et tractabilior est, celeriusque appropinquat veritati. Posset aliunde demonstrari, et ex ipsa contra

1 f. adhiberi *(1)* potest. Sit enim Semicycloidis portio RθV, supra DV basi vel plano volutionis subjectam per D centrum circuli transeuntem, eminens. Erigatur VX aequalis et parallela DR, cui GF productae occurrant in β. et cycloidi in θ. centro λ radio λV aequ. DR. describatur quadrans V$\gamma\mu$. patet omnes Fγ fore inter se et ipsi EV arcui quadrantis aequales; ipsas Fθ aequales arcubus RF. Ergo ipsas $\theta\gamma$ aequari arcubus EF. vel a. At Vβ ipsarum sinubus HF vel DG sive s. Habemus ergo modum omnia cycloidis puncta inveniendi analytice. Sumta enim abscissa qualibet ut Vδ quaeritur ordinata $\delta\theta$ ab Vλ (sive DR) radio auferatur $\lambda\pi$ Ergo *(2)* potest *L* 4 XLVIII. *L ändert Hrsg.* 10 per prop. 47 *erg. L, ändert Hrsg.* 12 propositionis 47 *L ändert Hrsg.*

derivari praecedens, quoniam summa seu area sinuum complementi ad arcum dat rectangulum ex sinu in radium; adeoque posito radio 1. dat sinum. Sed hanc viam judicavi clariorem. Hinc etiam ex arcu habetur sinus versus EH, posito enim arcu a, erit EH sinus versus aequ. $\frac{a^2}{1,2,r} - \frac{a^4}{1,2,3,4,r^3}$ etc.

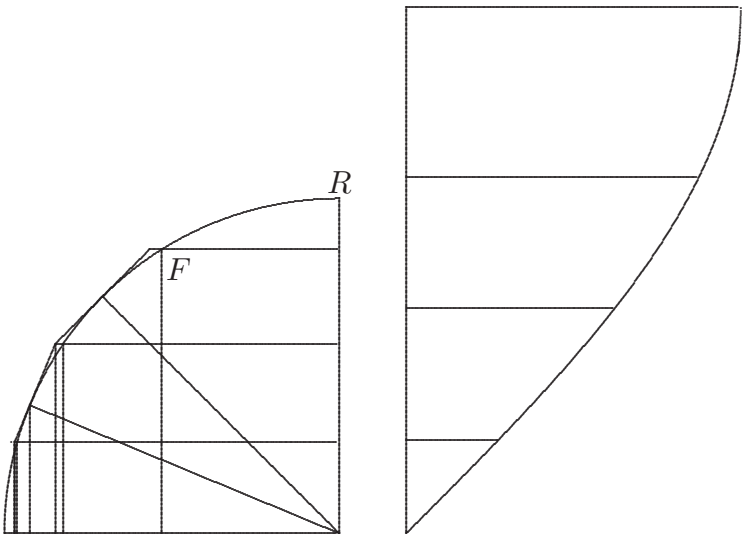
[*Zweite Fassung der Artikel (1) bis (4) und (8)*]

„Si arcus sit a, radius r, sinus versus s, erit

„ $$s \text{ aequal. } \frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3} + \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^5} \text{ etc.}$$

(1) Sit linea curva $A1C2C3C$ cujus abscissae ut AB appellentur a. et ordinatae normales ut BC appellentur s, sitque parameter seu recta constans DR, quam vocabimus A, sitque aequatio naturam curvae explicans s aequ. $\frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3} + \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^5}$

1 f. qvoniam ... sinum. *erg. L* 4 etc. | ubi si duobus tantum primis terminis utamur *gestr.* | *L* 6 radius *(1)* 1, sinus complementi s, erit s aequal. $1 - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4} - \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6}$ *(2)* r, sinus *(a)* complementi s, erit s aequal. $r - \frac{a^2}{1,2r} + \frac{a^4}{1,2,3,4r^3} - \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^5}$ etc. (1) Sit linea A1C2C3C cuius abscissae ut AB appellentur a. et ordinatae normales ut BC appellentur s, sitque parameter seu recta constans DR, quam vocabimus A, sitque aeqvatio naturam curvae explicans s aequ. $r - \frac{a^2}{1,2r} + \frac{a^4}{1,2,3,4r^3} - \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^5}$ etc. ajo curvam esse lineam sinuum complementi qvalem explicabo, id est si recta AB aequetur arcui RF, quadrantis RFE, centro D radio DR descripti tunc recta BC aeqvabitur sinui complementi ejusdem arcus nempe rectae RG respondenti | usqve ad ultimam Tα, qvae aeqvatur radio RD *erg.* |. Hoc ita demonstrabimus: Inter ordinatas 3B3C, 2B2C, 1B1C etc. differentiae designentur: 3L3C, 2L2C, etc. idque ponatur usque ad A continuatum esse, easque differentias esse infinite parvas; patet posita abscissarum differentia, ipsa scilicet 1B2B, vel 2B3B semper constante et infinite parva, eaque appellata 1, una scilicet infinitesima parte altitudinis AB, et abscissis, ut dixi appellatis a, fore differentiam ordinatarum ut 3L3C: a constante qvantitate r, subtractarum, *(aa)* id est differentiam inter *(bb)* $r, -r + \frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4,r^3}$ etc. vel a^2 *(b)* versus *L*



[*Fig. 15b*, *Blindzeichnung*]

etc. Ajo curvam esse lineam sinuum versorum qualem explicabo, id est si recta AB aequetur arcui RF, quadrantis RFE, centro D. radio DR descripti tunc recta BC aequabitur sinui verso ejusdem arcus nempe rectae RG, respondenti usque ad ultimam $T\alpha$, quae aequatur radio RD. Hoc ita demonstrabimus: Inter ordinatas $3B3C, 2B2C, 1B1C$ etc. differentiae designentur: $3L3C, 2L2C$, etc. idque ponatur usque ad A continuatum esse, easque differentias esse infinite parvas; patet posita abscissarum differentia; ipsa scilicet $1B2B$, vel $2B3B$ semper constante et infinite parva, eaque appellata 1, una scilicet infinitesima parte altitudinis AB, et abscissis, ut dixi appellatis a, ordinatis vero s, aequ. $\frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3}$ etc. fore differentiam ordinatarum ut $3L3C$: $\frac{a}{r} - \frac{a^3}{1,2,3r^3} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^5}$ etc. [quoniam summa omnium hujusmodi differentiarum ut $3L3C, 2L2C$ etc. dat ultimam ordinatarum $3B3C$, id est summa omnium $\frac{a}{r} - \frac{a^3}{1,2,3r^3} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^5}$ etc. dat $\frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3} + \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^5}$ etc.]

1 *Fig. 15b*: Leibniz hat die Figur wohl als Reinzeichnung nach der Skizze in Fig. 15a begonnen, dann aber abgebrochen. 11–13 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

(2) Summa autem omnium s. id est omnium BC, id est spatium $A3B3CA$, dabit $\frac{a^3}{1,2,3r} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^3} + \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^5}$ etc. ac proinde spatium $A3B3CA$ per r^2 divisum erit $\frac{a^3}{1,2,3r^3} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^5} + \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^7}$ [etc.]. Quare si Spatium $A3B3CA$ per r^2 divisum addatur differentiae $3L3C$, seu $\frac{a}{r} - \frac{a^3}{1,2,3r^3} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^5}$ etc. fiet $\frac{a}{r}$. Curva ergo proposita $A1C2C3C$ ejus est naturae, ut $\frac{A3B3CA}{r^2} + 3L3C$ sit aequ. $\frac{a}{r}$ seu $\frac{A3B}{r}$.

(3) Hanc jam curvam quae id praestet, ajo esse lineam sinuum versorum qualem descripsi. Arcu Circuli $R3F$ in infinitas partes aequales cogitatione diviso, vel ejus loco adhibito polygono infinitorum laterum, circumscripto cujus latera sint $1M2M, 2M3M$ etc. quorum puncta media $1N, 2N$ ducantur radii $D1N, D2N$, et ex punctis M demittantur in DE perpendiculares MH, in quibus sumantur $1M1P, 2M2P$, aequales ipsis $1G2G, 2G3G$, patet Triangula ut $1M1P2M$, et $1N1QD$ esse similia (ob angulum DNM rectum) adeoque esse rectangulum $2M1P$ in $D1N$ aequale rectangulo $1M2M$ in $D1Q$.

(4) Porro toti Spatio figurae sinuum versorum $AT\alpha A$ circumscribatur rectangulum $AT\alpha\theta$ et ipsi $\alpha\theta$ in punctis β occurrant productae BC. Erunt ipsae βC sinus complementi, differentiae scilicet inter radium $T\alpha$, et sinum versum BC. sive quia $1B1\beta$ aequal. RD radio, et $1B1C$ aequ. $R1G$ sinui verso arcus $R1F$ seu $A1B$ erit $1C1\beta$ aequ. $D1G$ sinui complementi. Hinc jam rectang. $1M2M$ in $D1Q$ coincidit rectangulo $1C1\beta2\beta$. quia differentia inter $D1Q$ et $D1G$ infinite parva, adeoque pro uno possunt haberi, est autem $D1G$ aequ. $1\beta1C$ posito curvam AC esse lineam sinuum versorum, ex constructione ergo et $D1Q$ aequal. $1\beta1C$. Porro $1M2M$ aequalis habetur arcui $1F2F$ (possumus enim circulum considerare, ut polygonum regulare infinitorum laterum, quorum unum est $1M2M$) est autem $1F2F$ aequalis $1\beta2\beta$ posito rursus curvam esse lineam sinuum versorum ex constructione, ergo haberi potest $1M2M$ pro aequali $1B2B$ et proinde rectang. $1M2M$ in $D1Q$ coincidit rectangulo $1C1\beta2\beta$.

1 omnium *(1)* r−s. | seu omnium *nicht gestr.* | *(a)* DG, ut D1G, D2G, D3G seu sinuum complementi arcuum R1F, R2F, R3F, ad arcum applicatorum, *(aa)* dat *(bb)* seu summa omnium $\mathrm{r} - \frac{\mathrm{a}^2}{1,2\mathrm{r}} + \frac{\mathrm{a}^4}{1,2,3,4\mathrm{r}^3}$ etc. dat ra − *(b)* RD, ad arcus applicatorum, *(2)* s. *L* 16 sinui ... arcus | E1F *ändert Hrsg.* | seu A1B *erg. L*

(5) Similiter rectangulum $2M1P$ in $D1N$ coincidit rectangulo $1S1H2H$.

[(8)] Porro quia $ED3H$ aequal. spatio $A\theta 3\beta 3CA$ per artic. 6 et Spatium $A\theta 3\beta 3CA$ aequatur residuo rectanguli $A3B3\beta\theta$ id est ar demto spatio $A3B3CA$, ergo fiet $ED3H$ aequal. $ar - A3B3CA$, sive spatium $A3B3CA$ aequal. $ar -$ rectang. $ED3H$. Est autem per artic. 7. $D3H$ aequ. DR in $3L3C$, ergo rectang. $ED3H$, vel ED in $D3H$, vel DR in $D3H$, aequal. DR in DR in $3L3C$ vel r^2 in $3L3C$. et erit Spat. $A3B3CA$ aequal. $ar - r^2$ in $3L3C$, vel $3L3C$ aequal. $\frac{a}{r} - \frac{A3B3CA}{r^2}$ quemadmodum supra artic. 2. desiderabatur.

[*Dritte Fassung*]

Propositio XLVIII.

„Si arcus sit a, radius, r; sinus versus, v; erit

„ v aequal. $\frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3} + \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^5} - \frac{a^8}{1,2,3,4,5,6,7,8r^7}$ etc.

Sit linea curva $A1C2C3C$, cujus abscissae ut AB etc. appellentur a. et ordinatae normales ut BC appellentur v. Sit parameter seu recta constans DR, quam vocabimus r, sitque aequatio curvae naturam explicans, v aequ. $\frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3}$ etc. qualem dixi, ajo curvam esse Lineam sinuum versorum, qualem explicabo, id est si recta $A1B$ aequetur arcui RF quadrantis EFR, centro D, radio DR descripti, tunc recta $1B1C$ aequabitur sinui verso ejus arcus, nempe rectae $R1G$ respondenti usque ad ultimam $V\alpha$, quae aequatur radio DR. Hoc ita demonstrabimus.

(1) Inter ordinatas $3B3C$, $2B2C$, $1B1C$, etc. differentiae designentur: $3L3C$, $2L2C$, etc. idque ponatur usque ad A continuatum esse, easque differentias esse infinite parvas; patet posita abscissarum differentia, (ipsa scilicet $1B2B$, vel $2B3B$,) semper constante infinite parva, et appellata 1, una scilicet infinitesima parte altitudinis AB et abscissis ut dixi appellatis, a, fore differentiam ordinatarum ut, $3L3C$, $\frac{a}{r} - \frac{a^3}{1,2,3r^3} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^5}$ etc.

10 XLVII. *L ändert Hrsg.*

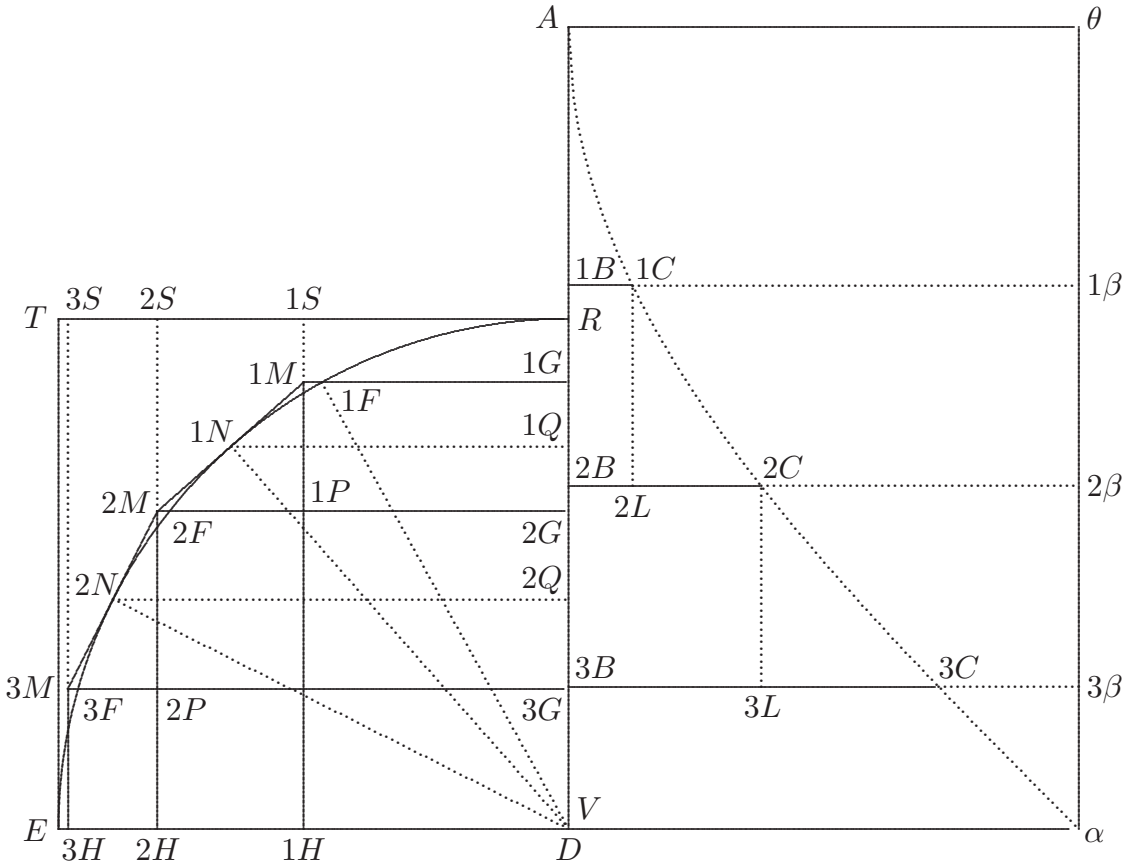


fig. 15.

[quoniam summa omnium hujusmodi differentiarum ut $3L3C, +2L2C+$ etc. dat ultimam ordinatarum, $3B3C$, et summa omnium $\frac{a}{r} - \frac{a^3}{1,2,3r^3}$ etc. reddit $\frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3}$ etc. etiam ultimam ordinatam assumtam $3B3C$.]

---

1 *Darunter:* $1N2M$ aequ. $2N2M$.
$A\,1\,B$ aequ. arc. $R\,1\,F$. $1\,B\,1\,C$ aequ. $R\,1\,G$.
$A2B$ aequ. arc. $R2F$. $2B2C$ aequ. $R2G$.
$TEH = \alpha\beta C\alpha$.
$rv = \int \overline{\text{sin. in } d\overline{a}}$.

Dazu: Figura 15 non respondet discursui.

2–4 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz selbst.

(2) Summa autem omnium v, seu BC usque ad ultimam $3B3C$, cujus arcus $A3B$, sit $a_{[,]}$ seu summa omnium $\frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3}$ etc. id est spatium $ABCA$ dat $\frac{a^3}{1,2,3r} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^3} + \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^5}$ etc., quae si prius divisa per r^2 auferatur postea ab $\frac{a}{r}$, sive $\frac{A3B2B}{r}$, arcu $A3B$ in unitatem $3B2B$ ducto, per radium diviso, redibit: $\frac{a}{r} - \frac{a^3}{1,2,3r^3} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^5}$ etc. quem supra a r t i c. 1 hujus prop. invenimus valorem ultimae differentiae $3L3C$. Ergo area figurae seu spatii $A3B3CA$ divisa per r^2, quadratum a DR, et postea subtracta ab $\frac{A3B2B}{r}$, sive $\frac{a}{r}$ relinquet $3L3C$. sive generaliter loquendo: $\frac{a}{r} - \frac{ABCA}{r^2}$ aeq. $\frac{LC}{1}$.

(3) Nunc id ostendam fieri in linea sinuum versorum qualem descripsi. Arcu circuli $R3F$ in infinitas partes aequales diviso, vel, ejus loco, adhibito polygono regulari infinitorum laterum, circumscripto, cujus latera sint $1M2M$, $2M3M$ etc. quorum puncta media $1N$, $2N$. ducantur radii $D1N$, $D2N$, et ex punctis M demittantur in DE perpendiculares MH et in DR perpendiculares MG, in ipsis MH sumantur $1M1P$, $2M2P$, etc. aequales ipsis $1G2G$, $2G3G$; et ex punctis N, in DR, demissis perpendicularibus NQ. Patet Triangula, $1M1P2M$ et $1N1QD$ esse similia (ob angulum DNM rectum) adeoque esse r e c t a n g. $2M1P$ i n $D1N$ a e q u a l e r e c t a n g u l o $1M2M$ i n $D1Q$.

(4) Circumscribatur rectangulum $AV\alpha\theta$, et ipsi rectae $\alpha\theta$ in punctis β occurrunt productae BC. Erunt ipsae βC sinus complementi, differentiae scilicet inter radium $V\alpha$ (vel DR) et sinum versum BC, sive quia $1B1\beta$ aequal. RD radio et $1B1C$ aequal. $R1G$ sinui verso arcus $R1F$ seu $A1B_{[,]}$ erit $1C1\beta$ aequ. sinui complementi, $D1G$. Hinc jam r e c t a n g u l u m s u b $1M2M$ i n $D1Q$, c o i n c i d i t r e c t a n g u l o $1C1\beta2\beta$, nam differentia inter $D1Q$ e t $D1G$ infinite parva est, adeoque p r o u n o p o s s u n t h a b e r i, est autem $D1G$ a e q u a l. $1\beta1C$, ex con-

8 *Daneben, später hinzugesetzt:* $(ABCA = ar - LC.r[)]$

1 cujus radius A3B *L ändert Hrsg.* 21 arcus E1F *L ändert Hrsg.*

structione, ergo et $D\,1\,Q$ aequal. $1\,\beta\,1\,C$. Porro $1\,M\,2\,M$ aequalis habetur arcui $1\,F\,2\,F$, possumus enim Circulum considerare, ut polygonum regulare infinitorum laterum, quorum unum est $1M2M$. Est autem $1\,F\,2\,F$ aequalis $1\,B\,2\,B$, vel $1\,\beta\,2\,\beta$ (posita $A1B$ aequ. $R1F$ et $A2B$ aequ. $R2F$ ex constructione). Ergo haberi potest $1\,M\,2\,M$ pro aequali $1\,\beta\,2\,\beta$, et proinde rectangulum $1M2M$ in $D1Q$ coincidit rectangulo $1C1\beta2\beta$.

(5) Similiter rectangulum $2\,M\,1\,P$ in $D\,1\,N$, coincidit rectangulo $1\,S\,1\,H\,2\,H$. per artic. 3 et eodem modo, $3M2P$ in $D2N$ rectangulo $2S2H$ $3H$, qualibet $S1H$ vel $S2H$ posita aequali RD, vel DN, et $1H2H$ aequali $2M1P$ et $2H3H$ aequ. $3M2P$.

(6) Quoniam ergo rectangula $1M2M$ in $D1Q$; $2M1P$ in $D1N$
coincidunt rectangulis $1C1\beta2\beta$ $1S1H2H$

per artic. 4. 5. et vero per artic. 3. rectangula $1M2M$ in $D1Q$ et $2M1P$ in $D1N$ aequalia sunt, etiam rectangula $1C1\beta2\beta$, $1S1H2H$ aequalia erunt, et quia ob infinite parvam latitudinem $1\beta2\beta$, non differt rectangulum $1C1\beta2\beta$ a quadrilineo exiguo $1C1\beta2\beta2C1C$[,] erit rectang. $1S1H2H$ aequal. quadrilineo $1C1\beta2\beta2C1C$, et pari jure rectangulum $2S2H3H$ aequale quadrilineo $2C2\beta3\beta3C2C$. Et quoniam id semper fit erit (posita TE aequali et parallela RD) rectangulum $A\,\theta\,\beta$ et rectang. $T\,E\,H$ aequale spatio $\alpha\,\beta\,C\,\alpha$ respondenti et $TE2H$ aequ. spatio $\alpha2\beta2C\alpha$ et $TE1H$ aequ. spatio $\alpha1\beta1C\alpha$ et denique TED seu quadratum radii aequ. figurae toti $\alpha\theta AC\alpha$, ac proinde et rectang. $R\,D\,1\,H$ aequale spatio $A\,\theta\,1\,\beta$ $1\,C\,A$.

Quae est quadratura figurae sinuum dudum aliis quoque nota; et quae cum quadratura figurae logarithmicae prop. 46 exhibita pulcherrime consentit, ut conferentibus patebit. Nec vero alteri quam lineae sinuum qualem explicuimus competere potest.

(7) Porro ob eadem Triangula similia $2M1P1M$, et $1N1QD$ artic. 3 erit rectang. sub $D1N$ in $1P1M$ aequal. rectang., sub $1N1Q$ in $1M2M$. Posuimus autem $1M2M$ aequ. $1B2B$. aequ. 1. seu uni infinitesimae arcus RE sive rectae AV, et $1P1M$ aequ. $1G2G$,

9 aequali 1M1P et *L ändert Hrsg.* 24 45 *L ändert Hrsg.* 29 arcus AE *L ändert Hrsg.*

23 aliis: s. Erl. zu S. 645 Z. 21.

aequ. $2L2C$. et $1N1Q$ aequ. $2M2G$. (ob differentiam infinite parvam) vel $2HD$. Ergo fiet rectang. $D1N$ vel DR in $2L2C$ aequal. $2HD$ in 1. eodem modo DR in $3L3C$ aequal. $3HD$ in 1. sive $3HD$ aequal. DR in $3L3C$ sive generaliter HD aequal. LC in DR, vel rectang. $RD3H$ aequ. $3L3C$ in quad. DR.

(8) Porro $RD3H$ aequal. spatio $A\theta 3\beta 3CA$ artic. 6. et spatium hoc aequale residuo rectanguli $A3B3\beta\theta$. id est ar, (ex $A3B$ arcu in $3B3\beta$ radium) demto spatio $A3B3CA$. Ergo fiet $RD3H$ aequal. $ar - A3B3CA$ sive spatium $A3B3CA$ aequal. $ar -$ rectang. $RD3H$. Est autem per artic. 7. in fine $D3H$ aequ. DR in $3L3C$ sive rectang. $RD3H$, vel DR in $D3H$, aequ. DR in DR in $3L3C$ vel r^2 in $3L3C$; ergo erit spatium $A3B3CA$ aequal. $ar - r^2$ in $3L3C$ vel omnibus per r^2 divisis, erit $3L3C$. aequal. $\frac{a}{r} - \frac{A3B3CA}{r^2}$ quemadmodum supra artic. 2. desiderabatur. Linea ergo sinuum versorum qualem explicuimus idem praestat quod linea $A1C2C$ etc. cujus aequatio est v aequ. $\frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3}$ etc. nec vero idem ab alia praestari potest.

Quoniam quadratura artic. 6. exposita non nisi lineae sinuum qualem explicuimus competere potest, ut ibi diximus; ea vero ad hanc rem necessaria est, ut hinc patet. Ergo linea $A1C2C$ proposita, proprietatem habens explicatam linea sinuum versorum est, et sinus versus ad arcum relationem habet quam diximus in propositione. Q. E. D.

Eadem proprietas paucis mutatis ad naturam cycloidis aequatione explicandam adhiberi potest, quemadmodum et superior prop. [47.] idemque est de aliis curvis quae arcum aut quadraturam circuli, inventa supponunt.

20–656,1 supponunt. *(1)* Coroll. 1. *(2)*

Prop. XLVIII

„Si arcus R1F sit a, radius r, erit segmentum R1FR duplicatum aequ. $\frac{a^3}{1,2,3r} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^3} +$
„$\frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^5}$ etc.

Nam summa sinuum versorum ad arcum applicatorum, seu spatium A1B1CA (positis iisdem qvae in prop. praecedenti) est $\frac{a^3}{1,2,3r} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^3}$ etc (vid. artic. 2. prop. praeced.) at summa sinuum versorum ad arcum applicatorum aequatur duplo segmento, qvemadmodum Geometris notum est, et

„ C o r o l l. 1. Posito arcu $R1F$, a, sinu complementi, $D1G$ posito c, radio DR, r erit „c aequ. $r - \frac{a^2}{1,2r} + \frac{a^4}{1,2,3,4r^3} - \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6r^5}$ etc.

Nam $R1G$ sinus versus v. aequ. $\frac{a^2}{1,2r} - \frac{a^4}{1,2,3,4r^3}$ etc. per p r o p. h a n c. Est autem c aequ. $r-v$, seu $D1G$ aequ. $DR-R1G$ ergo c aequ. $r-\frac{a^2}{1,2r}$ etc. quemadmodum diximus.

„C o r o l l. 2. Posito arcu $R1F$, a[,] sinu $1F1G$ vel $1M1G$ vel $D1H$ (quia puncta $1M$ „et $1F$ coincidere seu infinite parvo distare intervallo ponuntur) posito s. radio DR, „r. erit s. aequ. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3r^2} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^4}$ etc.

Nam spatium $A1B1CA$ aequ. $\frac{a^3}{1,2,3r} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^3}$ etc. p e r p r o p. h a n c, a r t i c. 2. quod spatium $A1B1CA$ aequ. rectangulo $A1B1\beta\theta$ seu ar, (posito $A1B$, aequ. arc. $R1F$, aequ. a) demto quadrilineo $A\theta1\beta1CA$, id est per a r t i c. 6. p r o p. h u j u s demto rectangulo $R1DH$, seu DR in $1DH$ seu rs. ergo spat. $A1B1CA$, aequ. $ar - rs$. seu s aequ. $a - \frac{A1B1CA}{r}$ id est s aequ. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3r^2}$ etc. ut diximus.

„C o r o l l. 3. Posito arcu $R1F$, a, radio DR, r, erit segmentum Circulare $R1FR$ „duplicatum aequ. $\frac{a^3}{1,2,3r} - \frac{a^5}{1,2,3,4,5r^3} + \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7r^5}$ etc.

1–657,12 Ad propositionem XLVIII.

facile demonstrari posset

Scholium

Hinc pulcherrima et expeditissima habetur ratio ex datis arcubus calculandi segmenta sub arcubus et chordis comprehensa, et qvod hinc sequitur datam a circulo aut eius segmento portionem recta abscindendi conferatur prop. . . . *(3)* „ C o r o l l. 1. *L* 16 XLVII *L ändert Hrsg.*

Id est per artic. 2. erit aequal. spatio $A1B1CA$ (posita $A1B$ aequ. arcui $R1F$,) constat enim Geometris spatium $A1B1CA$, sinuum versorum arcubus applicatorum, aequari segmento $R1FR$ duplicato. Idem et sic demonstrari potest ne longius ire necesse sit. Si segmento circulari $R1FR$, addas triangulum $RD1F$, fiet sector $RD1FR$. Ergo si duplo segmento $R1FR$ addas duplum triangulum $RD1F$, id est rectangulum RDH, id est per artic. 6. quadrilin. $A\theta1\beta1CA$ fiet sector, $RD1FR$, duplicatus, id est rectangulum sub arcu $E1F$ in radium, seu rectang. $A1B1\beta\theta$, ergo dupl. segm. $R1FR$ + quadrilin. $A\theta1\beta1CA$, aequal. rectang. $A1B1\beta\theta$. Jam $A1B1CA$ + quadrilin. $A\theta1\beta1CA$ etiam aequal. rectang. $A1B1\beta\theta$. Ergo duplum segm. $R1FR$. aequ. spat. $A1B1CA$. seu seriei $\dfrac{a^3}{1,2,3r} - \dfrac{a^5}{1,2,3,4,5r^3}$.

Hinc expeditissima habetur ratio ex solis datis angulis sive arcubus, (et radio) calculandi areas segmentorum, adde supra prop. 30. schol.

Propositio XLIX.

„Si sit quantitas A aequalis seriei $b-c+d-e+f-g$ etc. ita decrescenti in infinitum,
„ut fiant termini tandem data quavis quantitate minores,

„	$+b$	major quam A, ita ut differentia sit minor quam	c
„	$+b-c$	minor	d
„	$+b-c+d$	major	e
„	$+b-c+d-e$	minor	f.

„Et generaliter portio seriei decrescentis alternis additionibus et subtractionibus for-
„matae terminata per additionem erit summa seriei major, terminata per subtrac-
„tionem erit minor; error autem vel differentia semper erit minor termino seriei,
„portionem proxime sequente.

12 segmentorum, *(1)* tametsi sinus, chordaeve aut aliae rectae, in calculum non intrent, *(a)* unde tam facile est segmentum datae magnitudinis, e circulo abscindere *(b)* Adde quae supra diximus prop. ... *(2)* adde L

13 Propositio XLIX: Durch die nachträgliche Umarbeitung der Erstfassung von prop. XLVII und XLVIII (in konsequenter Zählung XLVIII und XLIX) zu prop. XLVII und coroll. 1 bis 3 fehlt in der Endfassung in Leibniz' Zählung die prop. XLVIII. Wegen der Doppelzählung von prop. XLIII ist Leibniz' Nummerierung damit ab prop. XLIX wieder korrekt.

Demonstratio: $c + e + g$ etc. est majus quam $d + f + h$ etc. quia cum series decrescat erit d minor quam c; et f minor quam e etc. Porro ipsi b demendum est $c + e + g$ etc. addendum $d + f + h$ etc., ut fiat aequale ipsi A, ex hypothesi, ergo plus ei adimendum quam addendum, ut fiat aequale ipsi A. At si cui plus demendum quam addendum, ut alicui aequale fiat, id eo majus est. Ergo b majus quam A. Eodem modo demonstrabitur esse $b-c+d$, vel $b-c+d-e+f$ aliaeve portiones similes maj. quam A.

Contra $d + f + h$ etc. maj. quam $e + g + l$. quia d maj. quam e, et f quam g. etc. ipsi $b - c$ addendum $d + f + h$ etc. demendum $e + g + l$ etc. ut fiat aequ. A plus ergo ei addendum quam adimendum ut fiat A. Ergo $b - c$ min. quam A. Eodem modo $b-c+d-e$, vel $b-c+d-e[+f-g]$. aliaeve portiones similes, min. quam A.

Hinc jam demonstro porro differentiam inter A et b. esse minorem quam c. nam b maj. quam A. et A maj. quam $b - c$. ergo differentia unius extremi b a medio A, erit minor differentia extremorum, b et $b - c$. seu ipsa c. Eodem modo demonstratur differentiam inter A et $b - c$. esse minorem quam d, nam $b - c$ est minor quam A. et A min. quam $b - c + d$, ut ostendimus, ergo differentia extremi unius $b - c$ a medio A, erit minor differentia extremorum $b - c$ et $b - c + d$, id est ipsa d. Eademque in caeteris demonstratio est.

Propositio L.

„Ex datis trianguli rectanguli angulis latera, et ex lateribus angulos; item ex data ra-
„tione Logarithmum; ex dato Logarithmo rationem invenire; in numeris aut lineis, ita
„ut error sit minor quovis errore assignabili; operatione brevi et exacta: Unde habe-
„tur Trigonometria, quantum licet perfecta, et sequitur Tabulis Canonis Mathema-
„tici si res ita postulet careri posse. Quoniam non est in potestate nostra libros aut
„instrumenta per terras et maria circumgestare; regulas autem breves ac simplices
„quisque facile animo circumfert.

(1) Hoc problema ex praecedentibus propositionibus collectis formatur. Si arcus sit a, tangens t. radius 1. erit a aequal. $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11}$ etc. per prop. 3 1. pro AB dictae propositionis ponendo 1. pro BC, t. Oportet autem t esse minorem

21 *(1)* „Ex data tangente arcum, ex dato arcu sinum | vel sinum complementi *erg.* | *(2)* „Ex L

radio, 1, seu esse fractionem, quia hoc modo fractionum potestates decrescunt; adeoque tandem fiunt quovis assignabili quantitate minores. Hinc ducimus si pro arcu sumas

$\frac{t}{1}$	fore justo	majorem, errorem vero minorem quam	$\frac{t^3}{3}$
$\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3}$	.....	minorem	$\frac{t^5}{5}$
$\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$	.....	majorem	$\frac{t^7}{7}$
$\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$	.....	minorem	$\frac{t^9}{9}$

idque per p r o p. 4 9. quia series $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3}$ etc. est in infinitum decrescens alternatim affirmata et negata. Quod jam ad Trigonometriam Canonicam applicemus, et quoniam Triangula obliquangula revocari possunt ad rectangula, satis erit triangula rectangula resolvi. Ostendam ergo hanc regulam servire ad inveniendos trianguli rectanguli angulos omnes, ex datis lateribus et angulo uno scilicet recto.

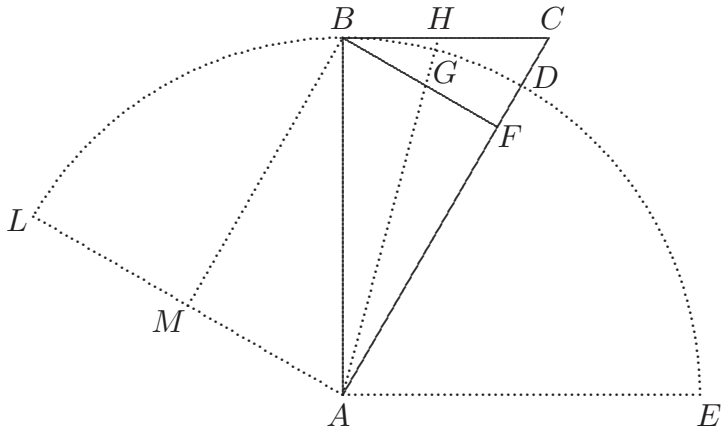


fig. 16

Sit fig. [16.] triangulum ABC cujus dantur latera, et angulus B. rectus. Quoniam ergo dantur trianguli latera, dabuntur ejus latera circa rectum AB, BC. Centro A, (altero extremo majoris lateris AB) describatur quadrans circuli BDE secans hypotenusam AC in D. Patet arcus BD sive anguli BAD vel BAC, fore AB radium, BC tangentem. Ponatur exempli causa BC esse $\frac{1}{3}AB$. Ergo AB posito 1. erit BC, $\frac{1}{3}$, et arcus BD sive a. erit $\frac{1}{1,3} - \frac{1}{3,27} + \frac{1}{5,243} - \frac{1}{7,2187}$ etc. quoniam $\frac{1}{27}$ est cubus ab $\frac{1}{3}$; et $\frac{1}{243}$ est

surdesolid. seu Quinta dignitas ab $\frac{1}{3}$. et $\frac{1}{2187}$ est septima dignitas ab $\frac{1}{3}$. Jam $3,27$, seu 3 in 27. est 81. et $5,243$ est 1215. et $7,2187$ est 15309. Sumtis ergo tribus tantum primis seriei valorem arcus BD exprimentis terminis fiet arcus BD aequal. $\frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}$, sive $\frac{405-15+1}{1215}$, vel $\frac{391}{1215}$ vel $\frac{31255}{100000}$. Qui valor quidem justo major erit, sed error erit minor quam pars 15309ma radii ac per consequens minor quam pars 90000ma peripheriae, sive nondum quarta parte minuti.

Posito autem radio 1. peripheria est $\frac{628318}{100000}$. Contra vero hoc supposito, Radius est paulo major quam 206275, partium qualium peripheria est 1296000, sive scrupulorum secundorum, id est peripheria in rectum extensa, tunc 206275 scrupuli secundi constituent radium tam propinque, ut error sit uno scrupulo secundo minor. Quae expressio Radii per secundos scrupulos in hac praxi perutilis est. Hoc facto, numerus 206275 multiplicetur per 391. et productum dividatur per 1215, habebitur 66381 circiter, qui numerus est secundorum scrupulorum arcum quaesitum constituentium, id est 18 grad. 26 minut. et 21 secundorum. Ubi cum error major quam 15 secundorum esse non possit, concludemus arcum quaesitum inter 18 grad. 26 minut. et 6 vel 21 secund. consistere. Quod certe praxi facillima obtinuimus.

Sin BC sit $\frac{1}{5}AB$, tunc eadem praxi error longe infra scrupulum secundum consistere reperietur; sed adhibitis tantum duobus prioribus terminis $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3}$ eo casu quo BC est

7 $\frac{628318}{100000}$. *(1)* eius ratio ad $\frac{31255}{100000}$ seu ad arcum BD habebitur si prior fractio per posteriorem seu peripheria per arcum dividatur; seu si 628318 dividatur per 31255 et minutum secundum $\frac{484862}{100,000,,00,000}$. *(2)* Contra L

---

4 $\frac{31255}{100000}$: Richtig wäre $\frac{32181}{100000}$. Leibniz übernimmt den falschen Wert aus N. 27 S. 307 Z. 9.

8 major quam 206275: Es müsste minor quam 206265 heißen. Leibniz übernimmt den falschen Wert 206275 aus N. 42 S. 442 Z. 2. 22 $\frac{484862}{100,000,,00,000}$: Leibniz übernimmt den Wert aus N. 33 S. 379 Z. 11.

$\frac{1}{5}AB$ error erit minor quam quarta pars minuti. Si BC fere aequetur ipsi AB. tunc si duobus aut tribus tantum terminis uti velimus angulus bis bisecandus est; quod semper ex datis lateribus fieri potest, quoniam semper regula habetur per quam data qualibet tangente BC, arcu BD, facile BF tangens arcus sive anguli dimidii BG inveniri potest tametsi anguli quantitas non detur.

Alias caeteris casibus ubi exigua est ratio ipsius BC ad ipsam BA semel tantum aut nunquam bisecandus est angulus, prout duobus tribusve terminis utimur. Quae omnia distincte exponere locus non patitur; demonstratio ex prop. 49. sumta statim limites praescribet, ex quibus ante calculum praevideri possit magnitudo erroris. Compendia etiam praxis ostendet. Quorum nonnulla indicare, et alias quoque regulas pro certis casibus componere possem, per quas omnem anguli bisectionem evitare liceret. Sed haec in alium locum commodius rejicientur.

(2) Ex datis arcubus sinus vel latera hoc modo inveniemus. Radio AB iterum posito 1. arcu BD autem (modo radio minor sit) posito a, sinus complementi AF, erit $\frac{1}{1} - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4} - \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6}$ etc. per p r o p. 4 8 . vel quod idem est sinus versus DF, erit $\frac{a^2}{1,2} - \frac{a^4}{1,2,3,4} + \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6}$ etc. Quodsi non sinum complementi, sed sinum rectum BF immediate velimus, (mediate enim uno dato constat alterum haberi) dicemus per p r o p. 4 8. iisdem positis fore BF aequal. $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1,2,3} + \frac{a^5}{1,2,3,4,5} - \frac{a^7}{1,2,3,4,5,6,7}$ etc.

Sed sinus complementi vel versi expressio utilius adhibebitur, quoniam citius appropinquat et ut mox dicam universalis est, atque utramque simul trigonometriae praxin directam, et inversam, una continet. Poterit tamen investigatio sinus pariter et sinus complementi altera ad alterius examen inservire, quoniam diversa plane methodo in idem desinere debent. Hinc jam utilissima Trigonometricae praxeos pars pendet, ex datis an-

3 f. qvoniam ... potest *erg. L* 12 f. rejicientur. | et addi potest appendix de praxi *erg. u. gestr.* | *(2)* (2) Ex *L* 18 4 7 *L ändert Hrsg.* 19–21 qvoniam ... continet. *erg. L*

15 p r o p. 4 8 : s. Lesart *(1)* zur Variante zu S. 655 Z. 20 – S. 656 Z. 1 bzw. coroll. 1 zu prop. XLVIII S. 656 Z. 1 f.

gulis et latere uno in Triangulo rectangulo (hoc enim nunc quidem utimur, ut generalius loqui liceat, tametsi et obliquangulis praxes peculiares accommodari possent) invenire latera reliqua.

Latus in triangulo proposito datum vel est hypotenusa, vel alterutrum latus circa rectum. Si sit hypotenusa, tunc nihil mutandum; et hypotenusa pro radio erit, ut in triangulo rectangulo AFB, datis angulis et hypotenusa AB, quaeruntur latera. Centro A radio AB describemus quadrantem BDE et latus AF producemus in D. Patet AF fore sinum complementi arcus dati BD, FD sinum versum, BF sinum rectum; unde alterutra regularum adhiberi potest.

Si vero latus datum sit non hypotenusa, sed alterutrum circa rectum, ut si in triangulo ABC. dentur anguli et latus AB; tunc huic triangulo aliud aequiangulum constituemus AFB, in quo latus AB jam hypotenusa erit. Atque posteriore resoluto, ejusque lateribus repertis, latera prioris, quippe illis proportionalia etiam habebuntur. Praxin ad imitationem eorum quae diximus artic. 1. hujus prop. mutatis mutandis quivis experiri potest: est autem valde commoda exactaque, praesertim si sinubus complementi utamur.

Inde enim habetur regula generalis pro Trigonometria directa pariter et inversa, id est investigandis arcubus ex lateribus, quam solam memoria retineri sufficit. Nimirum radio AB posito 1. Arcu BD minore quam 1. posito a, et AF sinu complementi appellato c, erit c aequ. $1 - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4} - \frac{a^6}{1,2,3,4,5,6}$, etc. ubi si tribus tantum minoribus terminis utamur erit c. paulo minor quam pars 720ma sextae potentiae ipsius a, seu fractionis unitate sive radio minoris, arcum exprimentis, constat autem quo minor fractio est, hoc magis ejus potentias decrescere. Jam in omni triangulo resolvendo semper erit a seu arcus assumendus minor quam 1 radius.

Nam triangulum rectangulum propositum AFB, aut est isosceles aut scalenum, si isosceles est, id est si AF, et FB latera circa rectum aequalia sunt, tunc etiam anguli A. B. erunt aequales, et uterque 45 graduum. Arcus ergo BD erit octava pars periφeriae qui minorem habet rationem ad radium, quam 4 ad 5 seu minor est quam $\frac{4}{5}$ radii seu

8 arcus dati AF *L ändert Hrsg.* 13 quippe *(1)* homologa *(2)* illis *L* 16–664,6 utamur. | *(1)* sed exemplum infra in appendice dabitur *(2)* inde ... bisecemus *erg.* | (3) Qvod *L* 20 et BD sinu *L ändert Hrsg.*

unitatis. Ergo ejus sexta potentia minor est quam $\frac{1}{3}$ adeoque $\frac{a^6}{720}$ minor non erit quam $\frac{1}{2160}$ radii, vel $\frac{1}{12960}$ periφeriae, sed nondum duorum minutorum.

Nam quando Triangulum AFB non est isosceles tunc minorem angulum ut BAF eligendo pro c patet eum fore minorem, quam 45 grad. ergo et error multo minor erit. Sumendo ergo c. aequ. $1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}$ pro aequatione vera, non tantum ejus ope inveniemus c, sinum complementi ex dato arcu a, sed et contra posito c esse cognitum et quaeri a, id est ex lateribus quaeri angulos poterit inveniri valor ipsius a sive radix hujus aequationis, quia a in ea non habet alias potestates quam quadratum a^2 unde aequatio est plana et radix ejus sola extractione radicis quadraticae inveniri potest. Reducta nimirum aequatione fiet: $a^4 - 12a^2 + 24$ aequ. $24c$, sive $a^4 - 12a^2 + 36$ aequ. $+12 + 24c$. sive $a^4 - 12a^2 + 36$ (quad. ab, $\pm a^2 \mp 6$) aequ. $12 + 24c$. Ergo extrahendo ubique radicem quadraticam, fiet $\pm a^2 \mp 6$ aequ. $\sqrt{12+24c}$, sive a^2 aequ. $6 \pm \sqrt{12+24c}$ id est a^2, duos habet valores, unum $6+\sqrt{12+24c}$ alterum $6-\sqrt{12+24c}$ uterque enim aequationem primam restituet. Ex his duobus valoribus eligendus est minor qui est, a^2 aequ. $6-\sqrt{12+24c}$: quod statim ita evincitur: is valor eligi debet qui exhibet arcum et sic omnibus quidem casibus. At hic posterior exhibet arcum in casu in quo prior non exhibet, nimirum in casu quo arcus fit nullus sive evanescit, id est cum sinus complementi c. aequ. radio, 1. Tunc enim fit a^2 aequ. $6-\sqrt{12+24c}$ sive a^2 aequ. $6-\sqrt{36}$ id est a^2 aequ. $6-6$, sive a aequ. 0. Ex proposita ergo serie infinita habemus aequationes duas[,] unam c. aequ. $1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}$ quae ex arcu dat sinum complementi, seu ex datis angulis et uno latere trianguli rectanguli, exhibet latera reliqua[,] alteram a aequ. $\sqrt{6-\sqrt{12+24c}}$ quae ex dato sinu complementi exhibet arcum, seu quae ex datis lateribus trianguli rectanguli exhibet angulos.

Itaque hanc unicam seriem utique simplicissimam et retentu facillimam in animo haberi sufficit: c aequ. $1-\frac{a^2}{1,2}+\frac{a^4}{1,2,3,4}$ etc. inde enim quivis extractionem tantum radicum ex aequationibus planis edoctus, facile inversam quoque, seu ipsius a tantum ex data c. valorem vicissim modo praescripto deducet. Sin contra regulam hanc a, aequ. $+\sqrt{6-\sqrt{12+24c}}$ retinuerit[,] facile ex ea sublatis irrationalibus inveniet valorem ipsius c. nempe quadrando utrobique fiet $12+24c$ aequ. $36-12a^2+a^4$ sive $24c$ aequ. $24-12a^2+a^4$ et denique c aequ. $1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}$.

Haec series ergo unica c aequ. $1 - \frac{a^2}{1,2} + \frac{a^4}{1,2,3,4}$ etc. universalissima et omnium quas norim ad usum publicum aptissima est, ut mechanicis, ingeniariis, Architectis (quos vocant) geodaetis vel Nautis nihil in eam rem melius optandum videatur. Ad exactissimos quoque Astronomicorum calculos plerumque sufficiet, imo semper, si modo certis casibus angulum semel aut aliquando bis ad summum ante operationem bisecemus.

(3) Quod attinet ad Logarithmos, dixi prop. 44. (ubi adde Scholium) logarithmum rationis $b+n$ ad b. appellando l, fore:

$$l \text{ aequ. } \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2b} + \frac{n^3}{3b^2} - \frac{n^4}{4b^3} \text{ etc. et contra fore per prop. 47.}$$

$$n \text{ aequ. } \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3} \text{ etc.}$$

b. semper manente, et modo quaerendo l, ex n; per aequationem priorem, modo n ex l per aequationem posteriorem. Eodem modo si logarithmus rationis $b-m$ ad b vocetur (l), erit

$$(l) \text{ aequ. } \frac{m}{1} + \frac{m^2}{2b} + \frac{m^3}{3b^2} + \frac{m^4}{4b^3} \text{ etc. et contra erit}$$

$$m \text{ aequ. } \frac{(l)}{1} - \frac{(l^2)}{1,2b} + \frac{(l^3)}{1,2,3b^2} - \frac{(l^4)}{1,2,3,4b^3} \text{ etc.}$$

Patet in fig. [14] CA posita b fore AX aequ. n. $A(X)$ aequ. m. KX aequ. l. $(K)(X)$ aequ. (l). Hinc idem logarithmus ex ratione, vel ratio ex logarithmo bis inveniri potest. Nam ratio $b+n$ ad b eundem habet logarithmum quem habet ratio reciproca b ad $b+n$. Nam spatium $\begin{matrix} CX & CA \\ V & A\,X\,\gamma\,V \\ CA & CX \end{matrix}$ aequ. spatio $VB\omega\gamma V$ ut saepe diximus, et demonstratur ex prop. 18. (cujus exemplum est), itemque ex eo statim uno verbo, quia rectang. $AX\gamma$. aequ. rectang. $VB\omega$. Unde et rectang. $AX\gamma+$ spat. $\gamma\Omega V\gamma$. seu spatium $VAX\gamma V$, aequale erit rectangulo $VB\omega+$ spat. $\gamma\Omega V\gamma$ seu spatio $VB\omega\gamma V$. Rectangula autem $A\,X\,\gamma$ et $V\,B\,\omega$ in Hyperbola aequalia sunt quia si utrique idem rectangulum $CA\Omega$ addatur, provenientia, rectangulum CAV et rectang. $CX\gamma$ aequalia sunt.

6 41. *L ändert Hrsg.* 8 46. *L ändert Hrsg.*

11 $b-m$ ad b: Richtig wäre b ad $b-m$; vgl. Erl. zu S. 638 Z. 16.

Quia ergo spatia $VAX\gamma V$ et $VB\omega\gamma V$ aequalia, hinc jam ponamus ipsi $C\omega$ vel $X\gamma$ aequ. esse $C(X)$ et rursus ipsi $\omega\gamma$ vel CX aequalem esse $(X)(\gamma)$. Tunc si ponamus AV aequ. CA. seu V. verticem Hyperbolae, erit spatium $VA(X)(\gamma)V$ utique per omnia simile et aequale spatio $VB\omega\gamma V$. ergo et spatio $VAX\gamma V$. Est autem spatium $VAX\gamma V$ logarithmus rationis $b+n$ sive CX ad b sive CA et spatium $VA(X)(\gamma)V$ logarithmus rationis $\frac{ab}{b+n}$ seu $C(X)$ id est γX ad b seu CA. Unde posito a. aequ. b. erit $C(X)$ ad CA, ut b ad $b+n$. ergo idem erit logarithmus rationis $b+n$ ad b. qui rationis b ad $b+n$. scilicet si V. vertex, seu AV aequ. CA. seu si b. numerus primarius sit ipsius potentiae hyperbolicae CAV, (quadrati a CA) latus id est si b latus ipsius ab. quia ab aequ. b^2.

Si vero sumta AV non sit aequalis CA, tunc idem tamen praestari potest, ponendo CX. CA. $C(X)$ esse continue proportionales. Et ita ponendo $A(X)$ aequ. m. et AX aequ. n. et CX aequ. $b+n$. et $C(X)$ aequ. $b-m$, aequabuntur inter se spatia $VAX\gamma V$ et $VA(X)(\gamma)V$ adeoque et duae rectae KX, $(K)(X)$ sive l. et (l) ergo etiam duae series $\frac{n}{1}-\frac{n^2}{2b}+\frac{n^3}{3b^2}$ etc. et $\frac{m}{1}+\frac{m^2}{2b}+\frac{m^3}{3b^2}$ etc. Vicissim ex duobus logarithmis KX sive $(K)(X)$ sive l. et (l) coincidentibus, habebimus quoque rationem vel numerum duobus modis vel inveniendo CX sive n. aequ. $\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1,2b}+\frac{l^3}{1,2,3b^2}$ vel inveniendo ipsi CX et CA tertium proportionalem $C(X)$ sive m aequ. $\frac{l}{1}-\frac{l^2}{1,2b}+\frac{l^3}{1,2,3b^2}$.

1 aequalia; *(1)* et Hyperbola aeqvilatera rectangula, qualem nostram supponimus utrinque similis aequalisque est *(2)*, hinc *L* 4 VAXγV. *(1)* sed etsi sint VA et CA inaequales, tunc sumatur C(X) talis ut sint CX, CA, C(X) proportionales continue eritque spatium *(2)* est *L* 17–666,1 aequ. $\frac{\mathrm{l}}{1}$ | $-\frac{\mathrm{l}^2}{1,2\mathrm{b}^2}+\frac{\mathrm{l}^3}{1,2,3\mathrm{b}^3}$. *ändert Hrsg.* | *(1)* (4) Sed quoniam Logarithmi inventio ad aream spatii VAXγV redit, quae postea per AV dividenda est, ut det KX logarithmum, et vero spatium etiam aliter invenire licet, ideo idem ad Logarithmos applicabimus. Ponatur iisdem quae supra positis CX aequ. d. erit γX aequ. $\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{b+n}}$ sive $\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{n+b}}$. unde fiet $\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{n+b}}$ aequ. $\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{n}}-\frac{\mathrm{ab}^2}{\mathrm{n}^2}+\frac{\mathrm{ab}^3}{\mathrm{n}^3}-\frac{\mathrm{ab}^4}{\mathrm{n}^4}$ et *(2)* Sed quoniam tunc cum n est major quam b. series $\frac{\mathrm{n}}{1}-\frac{\mathrm{n}^2}{2\mathrm{b}}+\frac{\mathrm{n}^3}{3\mathrm{b}^2}-\frac{\mathrm{n}^4}{4\mathrm{b}^3}$ etc. servire non potest; ideo ad Logarithmum KX sive l vel spatium VAXγV inveniendum sic agere licebit. CX seu b + n vocetur d. erit CA aequ. d − n et AV

Altera ergo operatio ad alteram probandam inservire potest. Item si sit n major quam b; erit m minor quam b. unde si series $\frac{n}{1} - \frac{n^2}{2b} + \frac{n^3}{3b^2}$ etc. non sit decrescens, tunc series $\frac{m}{1} + \frac{m^2}{2b} + \frac{m^3}{3b^2}$ etc. decrescens erit. Nam quia $C(X)$ aequ. $\frac{CA \text{ quad.}}{CX}$[,] erit m, vel $A(X)$ aequ. $CA - \frac{CA \text{ quad.}}{CX}$. id est $b - \frac{b^2}{b+n}$ id est m aequ. $\frac{nb}{b+n}$ quae utique minor quam b sive b major $\frac{nb}{b+n}$ vel 1. major $\frac{b}{b+n}$, quia $b+n$ major est quam n.

Ut praxis intelligatur, proponatur inveniendus logarithmus binarii, id est si CX sit dupla ipsius CA, quaeritur KX erit n aequ. b. seu AX aequ. CA. ac proinde Logarithmus binarii erit: $\frac{b}{1} - \frac{b}{2} + \frac{b}{3} - \frac{b}{4} + \frac{b}{5} - \frac{b}{6}$ id est erit ad b, ut $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. est ad 1. cujus seriei summa quantum satis est exacte inveniri posset ope summarum serierum progressionis harmonicae. Verum possumus quoque nonnihil immutare constructionem, utendo ipsa m. seu $A(X)$ quae erit $\frac{1}{2}b$ et idem logarithmus ipsius 2 erit $\frac{b}{1,2} + \frac{b}{2,4} + \frac{b}{3,8} + \frac{b}{4,16} + \frac{b}{5,32} + \frac{b}{6,64} + \frac{b}{7,128}$ etc.

Eodem modo si Logarithmus quinarii sit inveniendus tunc ponendo n aequ. $4b$. non poterit usui esse series $\frac{n}{1} - \frac{n^2}{2b}$ etc. sed adhibenda est m. Est autem m aequ. $\frac{nb}{b+n}$. et

aequ. $\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{d}-\mathrm{n}}$ et spatium γXAVγ. (sive VAXγV) erit $\frac{\mathrm{ab}}{1\mathrm{d}}\mathrm{n} + \frac{\mathrm{ab}}{2\mathrm{d}^2}\mathrm{n}^2 + \frac{\mathrm{ab}}{3\mathrm{d}^3}\mathrm{n}^3$ etc (quae series est decrescens, quia d. major quam n.) eritque KX sive l aequ. $\mathrm{b}\frac{\mathrm{n}}{1\mathrm{d}} + \mathrm{b}\frac{\mathrm{n}^2}{2\mathrm{d}^2} + \mathrm{b}\frac{\mathrm{n}^3}{3\mathrm{d}^3}$ etc aequ. KX. | si d numerus propositus et d−n numerus primarius seu si ratio d. ad d−n. *erg.* | Eodem modo ad inveniendum spatium VA(X)(γ)V. C(X) seu b−m vocetur (d) erit CA aequ. (d)+m. si A(X) aequal. m. et AV aequ. $\frac{\mathrm{ab}}{(\mathrm{d})+\mathrm{m}}$. et spatium ($\gamma$)(X)AV($\gamma$) (: sive VA(X)($\gamma$)V :) erit $\mathrm{ab}\frac{\mathrm{m}}{1(\mathrm{d})} - \mathrm{ab}\frac{\mathrm{m}^2}{2(\mathrm{d}^2)} + \mathrm{ab}\frac{\mathrm{m}^3}{3(\mathrm{d}^3)}$ etc. et Logarithmus (K)(X) sive (l) erit $\mathrm{b}\frac{\mathrm{m}}{1(\mathrm{d})} - \mathrm{b}\frac{\mathrm{m}^2}{2(\mathrm{d}^2)} + \mathrm{b}\frac{\mathrm{m}^3}{3(\mathrm{d}^3)}$ etc. si (d) numerus propositus, et (d) + m. numerus primarius quae series est decrescens si (d) major quam m. Si vero esset m major quam *(3)* Altera *L* 12 f. etc. | Verum si adhuc citius appropinquare velimus, alio quodam artificio opus est. *gestr.* | Eodem *L*

pro n ponendo ejus valorem $4b$. erit m aequ. $\frac{4b}{5}$. et logarithmus quinarii erit ad b, ut $\frac{4}{1,5} + \frac{16}{2,25} + \frac{64}{3,125} + \frac{256}{4,625} + \frac{1024}{5,3125}$ est ad 1. Pari ratione quorumlibet numerorum sive rationum datarum habebuntur Logarithmi. Nam si $b+n$ est $2b$. tunc m erit $\frac{1}{2}$. si $b+n$ sit $3b$. tunc m erit $\frac{2}{3}b$. si $b+n$ sit $5b$. tunc m erit $\frac{4}{5}b$. et ita porro. Qui modus exhibendi Logarithmos novus est, nec inelegans, si theorema spectes. Sed in praxi, si de numeris magnis ad quotvis notas accuratis inveniendis agatur, utique non satis velociter appropinquat veritati.

Aliam ergo praxin quaesivi, qua quis sine tabulis logarithmum numeri quaesiti 2 satis exacte et breviter reperire possit. Id fiet hoc modo[:] ponamus exempli causa quaeri Logarithmum rationis $C(7)$ ad $C\alpha$. id est 2. ad 1. (posito $\alpha(7)$ aequ. $C\alpha$ aequ. CA). Sumamus punctum (1) pro arbitrio tale, ut (1) non sit multo major quam $C\alpha$, sive ut $\alpha(1)$ sit multo minor quam $C\alpha$ exempli causa si $C\alpha$ (id est CA) sit 1. (positis AV et $\alpha\mu$ vel CA aequalibus) ponamus $\alpha(1)$ esse $\frac{1}{10}$. eritque $C(1)$ aequ. $\frac{11}{10}$. Quaeritur ergo logarithmus ab $\frac{11}{10}$, sive $1+\frac{1}{10}$. Tunc erit b aequ. 1, et n aequ. $\frac{1}{10}$ et recta (1)(8) erit $\frac{1}{1+\frac{1}{10}}$ et logarithmus numeri $\frac{11}{10}$ seu $\frac{n}{1} - \frac{n^2}{2b} + \frac{n^3}{3b^2} - \frac{n^4}{4b^3}$ etc. sive spatium $\alpha(8)(9)$ erit $\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40,000} + \frac{1}{500,000} - \frac{1}{6000,000}$ etc. ubi si omnes hos sex terminos addas, habebis $\frac{22874}{300000}$ seu $\frac{953101666 \text{ etc.}}{10000000000 \text{ etc.}}$ quae logarithmum ab $\frac{11}{10}$ seu spatium $\alpha(8)$ dabunt tam exacte, ut error non sit futurus pars unitatis 70,000,000^{ma}.

3 Logarithmi. *(1)* Haec operatio etsi ad computum satis apta non sit, neque enim in numeris *(2)* nam L 5 inelegans, *(1)* et satis exactus pro constructionibus linearibus quas postea exponam. Sed non *(2)* si L 12 f. et Aμ L *ändert Hrsg.* 16 si | quatuor tantum priores terminos adhibeas et in unum conjungas, defectus a vero non erit pars 500000ma unitatis. Et si *gestr.* | omnes L

17 $\frac{22874}{300000}$: Richtig wäre $\frac{22874}{240000}$, der Wert des folgenden Bruchs ist jedoch wieder korrekt. Weiter unten (s. S. 671 Z. 1) benutzt Leibniz ebenfalls den richtigen Ausdruck, den er in N. 48 S. 470 Z. 2 abgeleitet hat.

Hoc posito toties in se multiplicetur $\frac{11}{10}$ donec productum satis accedat rationi quae est $C(7)$ ad $C\alpha$. ut si $C(7)$ sit dupla $C\alpha$. multiplicetur $\frac{11}{10}$ in se ipsum donec habeatur ejus septima dignitas $\frac{19487171}{10000000}$. Quae si auferatur a $\frac{20000000}{10000000}$. id est a $C(7)$, a 2. cujus logarithmus quaeritur; restabit $\frac{512829}{10{,}000{,}000}$.

	1	2	3	4	5	6	7
Dignitatibus:	$\frac{11}{10}$	ejus quadrato	cubo	qq.	qc.	qqq.	qqc.
respondeant rectae	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$	$C\varepsilon$	$C(4)$	$C(5)$	$C(6)$

ita ut $C(6)$ seu septima dignitas, sit $\frac{19487171}{100{,}00{,}000}$ erit recta (6)(7) aequalis $\frac{512829}{10{,}00{,}000}$.

Et quoniam spatia $\alpha(8)$ et (1)(9), et (2)(11), et $P(3)$, et $\varepsilon(12)$ et (4)(13) et (5)(14) aequalia sunt quia rectae $C\alpha$, $C(1)$, $C(2)$, $C(3)$, $C\varepsilon$, $C(4)$, $C(5)$, $C(6)$ continue proportionales; ideo habito ut dixim. primo $\alpha(8)$, habebuntur caetera omnia, adeoque et eorum summa, seu spatium totum $\alpha(14)$ quod est $\alpha(8)$ septuplicatum, sive septies $\frac{953101666 \text{ etc.}}{10000000000 \text{ etc.}}$. id est $\frac{66717166 \text{ etc. } 2}{100000000 \text{ etc. } 0}$.

Superest ergo tantum ut inveniamus spatium $(6)(\gamma)$, seu $(14)(6)(7)(\gamma)(14)$. Quod jam non difficile est quia (6)(7) exiguam habet rationem ad $C(6)$ vel $C(7)$ distantiam a centro (C). $C(7)$ id est 2. vocemus c et (6)(7), id est $\frac{512829}{10{,}000{,}000}$ vocemus d. erit $C(6)$ aequ. $c-d$ et (6)(14) erit $\frac{1}{c-d}$, sive $\frac{1}{c}+\frac{d}{c^2}+\frac{d^2}{c^3}+\frac{d^3}{c^4}+\frac{d^4}{c^5}$ etc. et spatium $(6)(\gamma)$ erit $\frac{d}{c}+\frac{d^2}{2c^2}+\frac{d^3}{3c^3}$ etc. Sin $C(6)$ vocemus e. erit $C(7)$ aequ. $e+d$. et $(7)(\gamma)$ aequ. $\frac{1}{e+d}$ sive aequ. $\frac{1}{e}-\frac{d}{e^2}+\frac{d^2}{e^3}-\frac{d^3}{e^4}$ etc. et idem spatium $(6)(\gamma)$ erit $\frac{d}{1e}-\frac{d^2}{2e^2}+\frac{d^3}{3e^3}-\frac{d^4}{4e^4}$ etc. unde alterutrum modum eligere poterimus, et posteriore electo, si tribus tantum primis terminis utamur $\frac{d}{e}-\frac{d^2}{2e^2}+\frac{d^3}{3e^3}$ sive $\frac{6e^2d-3ed^2+2d^3}{6e^3}$, sive pro e ponendo $2-d$, (quia numerus c. id est hic 2 est tractabilior quam numerus e) fiet $\frac{24d-30d^2+11d^3}{+48-72d+36d^2-6d^3}$, sive $\frac{11533751}{444014996}$ sive $\frac{25976039}{100000000[0]}$ area spatii ita ut error non sit pars 1000000ma unitatis, cui si addamus

aream spatii $\alpha(14)$ id est septuplum areae spatii $\alpha(8)$, id est numerum $\frac{667171[1]62}{100000000[0]}$ habebimus Logarithmum binarii quaesitum $\frac{0693147201}{1000000000}$ cujus septem primae notae sunt verae, deberet enim esse, 06931471 etc. quod alias semper continuet adeoque uno habito Hyperbolico logarithmo et uno tabulari, poterit semper alio dato Hyperbolico inveniri tabularis vel contra.

Haec methodus serviet etiam ad Logarithmorum tabulam sine ulla Hyperbolae consideratione et sine ulla inventione mediarum proportionalium, condendam, si sumatur ratio aliqua ut 10,000,001 ad 10,000,000 sive fractionis $\frac{10{,}000{,}001}{10000000}$ ad 1, cujus in se ipsam continue ductae potestates dabunt seriem progressionis geometricae omnes numeros, aut quantitates ab ipsis intervallo quod negligi possit differentes, comprehendentem, ubi mira quaedam compendia excogitari possint. Sed adhibita Hyperbolae consideratione methodo quam exposui, facile erit cujuslibet numeri dati invenire Logarithmum, sine tabulis conditis aut condendis. Ut si logarithmum denarii quaeramus; supposito jam logarithmo binarii, tantum logarithmo binarii triplicato addamus hanc seriem $\frac{d}{1e} - \frac{d^2}{2e^2} + \frac{d^3}{3e^3}$ etc. ponendo e esse 8. et d esse 2. quia 8 est cubus de 2. et $8+2$ est 10. vel quod idem est $\frac{1}{1,4} - \frac{1}{2,16} + \frac{1}{3,64} - \frac{1}{4,256} + \frac{1}{5,1024} - \frac{1}{6,4096} + \frac{1}{7,16384} - \frac{1}{8,65536}$ etc. ex quibus sex primos adhiberi sufficit, si Logarithmo contenti sumus, qui a vero non differat 100000ma parte unitatis. Simili modo logarithmum ternarii facile inveniemus. Nam cum habeamus logarithmum ab $\frac{11}{10}$. et a 10. habebimus et logarithmum ab 11. si scilicet logarithmo ab $\frac{11}{10}$ addamus logarithmum a 10. Superest ergo ad logarithmum a 3 habendum, ut habeamus logarithmum a 33. quod facile est, quia 33 est 32+1. id est surdesolidum a 2, unitate

1 septuplum areae spatii $\alpha(9)$ *L ändert Hrsg.* 2–5 $\frac{0693147201}{1000000000}$ ... contra *erg. L* 9 f. numeros *(1)* qui sunt in rerum natura *(2)*, aut *L* 10 f. ubi ... possint *erg. L* 16 $+\frac{1}{7,16376} - \frac{1}{8,65564}$ *L ändert Hrsg.* 19 f. si ... a 10 *erg. L*

1 $\frac{667171[1]62}{100000000[0]}$: Leibniz berechnet den Wert in N. 48 S. 481 Z. 19.

auctum; hinc logarithmo binarii quintuplicato addatur $\frac{d}{e} - \frac{d^2}{2e^2} + \frac{d^3}{3e^3}$ etc. ponendo e esse 32. et d esse 1. et habebitur logarithmus a 33. a quo si auferatur logarithmus ab 11. habebitur logarithmus a 3. Hinc facile erit et logarithmum habere septenarii. Nempe addito logarithmo binarii ad logarithmum denarii habebitur logarithmus vicenarii; quaeritur logarithmus a 21. hoc enim habito facile habebitur logarithmus a 7. Itaque logarithmo a 20 addatur $\frac{d}{e} - \frac{d^2}{2e^2} + \frac{d^3}{3e^3}$ etc. posito d esse 1. et e esse 20 habebitur logarithmus ab 21.

Quaeritur logarithmus numeri 1676. Inveniatur logarithmus a 1600, qui est duplicatus logarithmus a 10 auctus quadruplicato logarithmo a 2. Huic addatur $\frac{d}{e} - \frac{d^2}{2e^2} + \frac{d^3}{3e^3}$ etc. ponendo d aequ. 76. et e aequ. 1600. et habebitur logarithmus numeri 1676. Unde patet quomodo facillime paucis logarithmis inventis datus aliquis sine tabularum ope haberi possit. Generalis enim regula est, ex dato Logarithmo numeri minoris e. datur logarithmus numeri majoris $e + d$, si logarithmo prioris addatur vel si numeri sunt unitate minores, auferatur series $\frac{d}{e} - \frac{d^2}{2e^2} + \frac{d^3}{3e^3}$ etc. Porro Logarithmi hoc modo inventi erunt Logarithmis tabularum impressarum proportionales nam ut ostendimus supra in explicatione definitionis post prop. 43. omnes logarithmi ex diversis principiis inventi semper sunt proportionales modo in utraque suppositione eadem quantitas pro logarithmo habeat, c. Jam Tabularum impressarum Logarithmus Denarii est 10000000, quare omnes Logarithmi tabularum, erunt ad nostros Hyperbolicos, ut 10000000 est ad nostrum denarii logarithmum: hinc ergo tabulae corrigi perficique possunt.

Si jam eadem hypothesi servata vicissim ex logarithmo numerum invenire velimus, tunc posita b. sive CA. numero primario 1. et numero $1 - m$. erit m aequ. $\frac{l}{1} - \frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} - \frac{l^4}{1,2,3,4}$ etc. posito l. logarithmo ab $1-m$. (vel ab $\frac{1}{1-m}$) seu rationis $1-m$ ad 1 aut reciprocae. Hoc ita sum expertus exemplo satis exacte supputato; supra inveneramus

11–13 Generalis ... etc. *erg. L* 14–17 nam ... prop. | 42. *ändert Hrsg.* | omnes ... c. *erg. L*
22–671,10 seu ... $\frac{1}{500000}$ *erg. L*

23 supra: s. o. S. 667 Z. 17

Logarithmum Hyperbolicum numeri $\frac{11}{10}$ esse $\frac{22874}{240000}$ sive $\frac{11437}{120000}$[,] nunc videamus an ex eo regula nostra nobis restituat $\frac{11}{10}$ vel $\frac{10}{11}$. Sit ergo logarithmus hic qui ponitur notus l, et numerus $\frac{10}{11}$ quaesitus sit $1-m$. Quaeritur m id est $\frac{1}{11}$ eritque m aequ. $\frac{l}{1}-\frac{l^2}{1,2}+\frac{l^3}{1,2,3}$.

$$\begin{array}{lll} \text{Fiet } +l & +988156800000000 & \text{divisa per communem} \\ -\frac{l^2}{1,2} & -47089788840000 & \text{denominatorem} \\ +\frac{l^3}{1,2,3} & +1496016430453 & 10368000000000000 \\ \text{seu} & +942563027590453 & \end{array}$$

adeoque m quaesita erit circiter $\frac{942563}{10368000}$. Deberet autem esse $\frac{1}{11}$ et excessus illius, seu differentia $\frac{942563}{10368000}-\frac{1}{11}$ erit $\frac{10368193-10368000}{114048000}$ quae differentia est minor quam $\frac{1}{500000}$.

Quoniam vero fieri potest ut l sit major quam 1, seu CA[,] ideo poterimus ab ipso alium quendam logarithmum cognitum cogniti numeri subtrahere, ut residuum fiat multo minus unitate, et residui velut logarithmi quaeremus numerum; hac ipsa regula; numerum inventum multiplicabimus per numerum cognitum logarithmi a priore subtracti, et habebitur numerus quaesitus. Tametsi alia adhuc via haberi possit. Haec praxis saepe utilis, aliquando et necessaria erit ad potentias ingentium numerorum inveniendas aut radices gradus cujuscunque, quas alioquin nemo calculare audeat, ob prolixitatem; ut si numerus ingens vicies in se multiplicari debeat, et a producto extrahi radix decima nona, numerus

4–6 $\left\{\begin{array}{l} +1496016430453 \\ -47089788840000 \\ +988156800000000 \end{array}\right\}$ *L ändert Hrsg.*

9 $\frac{10368203-10368000}{114048000}$ *L ändert Hrsg.* 15 Tametsi ... possit. *erg. L* 17 prolixitatem; *(1)* alterum, ad operandum logarithmice per binomia seu numeros compositos, ut si velimus multiplicare a + b per c + d fiet +ac + bc + ad + cd, qvi habebuntur datis logarithmis numerorum a. b. c. d. *(2)* ut *L* 18 debeat, *(1)* vel etiam productum semper quadrari, qvadratum productum rursus quadrari, et ita porro viginti vicibus ⟨—⟩ numeri prodibunt ingentes *(2)* productumque dividi per *(3)* et *L*

quaesitus tametsi non maximus, non poterit haberi nisi per medios numeros immanes eamus nec tabulae succurrent, quia eo usque non extenduntur; itaque nostra methodo ubi logarithmum numeri invenerimus, eum multiplicabimus per 20, dividemus per 19. Inventi logarithmi quaeramus numerum methodo praescripta, et habebitur quaesitum. Posset horum usus etiam in aequationum resolutione ostendi aliisque multis quaestionibus, sed qui ista intellexerit, facile percipiet, quam latus pateat inveniendi campus; et malo aliis relinquere in quibus se cum fructu exerceant, quam obscura diligentia id agere frustra, ut omnia dixisse videar.

Hactenus problematis partes singulas in numeris absolvimus, nunc paucis subjiciemus quomodo linearum quoque ductu effici possint idque ita ni fallor commode admodum atque eleganter solis adhibitis rectis fiet. Inspicietur in eam rem Schema generale fig. 11 in quo $1B1A$ aequ. $1A2A$, vel $2B2A$ aequ. $2A3A$, et ita porro, rectaeque parallelae $1B1A$, $2B2A$, $3B3A$, etc. progressionis Geometricae decrescentis. Ponatur $1B1A$ esse 1, et $2B2A$, sit n. erit $3B3A$, n^2, et $4B4A$, n^3, et $5B5A$, n^4, et $6B6A$, n^5 etc. et ponatur dato numero $1+n$. vel $\frac{1}{1+n}$ quaeri logarithmum qui est $\frac{n}{1}-\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n^4}{4}+\frac{n^5}{5}$ etc. Tunc ita agemus: Rectae $1AC$, indefinitae, angulo quolibet applicetur $1A1B$, aequalis unitati, et sit numerus datus $1A3A$, seu $1+n$, sit 1 aequ. $1A1B$, erit $2A3A$ aequ. n. cui aequalis $2A2B$ parallela $1A1B$, ducatur recta $1B2B$ producta quantum satis est, versus C ubi occurrit rectae $1AC$. et ex $3A$ erigatur $3A3B$, parallela $2A2B$, occurrens rectae $1BC$ in $3B$. Sumatur ipsi $3A3B$ aequal. $3A4A$, rursusque ex $4A$ erigatur $4A4B$ parallela prioribus idemque quantum satis est continuetur. Jam sit FG aequalis ipsi n vel $2A2B$, et in ea sumatur FH quae sit $\frac{1}{2}n^2$, seu dimidia $3A3B$; et HM quae sit $\frac{1}{4}n^4$ seu quarta pars ipsius $5A5B$.

8–674,3 videar. | porro regressum qvoqve a logarithmo ad numerum sum expertus, et a Logarithmo ab $\frac{11}{10}$ dato rursus inveni numerum, $\frac{11}{10}$ tam prope ut error non fuerit $\frac{1}{500,000}$, de qvo in praxi. *erg. u. gestr.* | | Hactenus ... intellexerit *auf Bl. 37r° erg. u. durch Verweis* subiicienda ad finem prop. 50. *hier eingefügt* | Propositio *L* 12 fig. 11 *erg. L*

12 fig. 11: s. Fig. 10 S. 590 Z. 6.

Contra ab altero latere G ipsi FG apponatur GL aequ. $\frac{1}{3}n^3$ erit ML aequ. $n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4}$ adeoque tam prope aequabitur logarithmo numeri $1A3A$, ut error non sit futurus $\frac{n^5}{5}$ seu quinta pars rectae $6A6B$. idemque longius continuari posset.

Si ex dato logarithmo l, quaeratur numerus $1-m$. incognitum m inveniemus eodem modo, nam m aequ. $\frac{l}{1} - \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{6} - \frac{l^4}{24} + \frac{l^5}{120}$ etc. Tantum ergo opus $2A2B$ esse 1. et loco partis tertiae, quartae, quintae, etc. adhiberi $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{24}$. $\frac{1}{120}$ etc. Si ex data tangente t, quaeratur arcus circuli seu $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ etc. tunc posito $1A1B$ seu 1 esse radium, et $2A2B$ esse t. arcus quaesiti tangentem datam tunc ponendo FG aequ. $2A2B$ seu t, et HM posita aequ. $\frac{t^3}{3}$ seu $\frac{1}{3}$ ipsius $4A4B$, et GL posita aequ. $\frac{t^5}{5}$ seu $\frac{1}{5}$ ipsius $6A6B$, erit ML aequ. $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$. Et ita porro si opus sit.

Contra ex dato arcus in rectum extensi a, quadrato a^2, quadrato per radium $1A1B$ seu 1, diviso positaque $2A2B$ aequ. a^2 inveniemus, sinum complementi. Nam sin. compl. aequ. $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \frac{a^6}{720}$. at posito ipsam $2A2B$ esse a^2, erit $3A3B$, a^4, et $4A4B$, erit a^6 et ita porro. Ergo si sit FG aequ. dimidiae rectae $2A2B$ sive $\frac{a^2}{2}$, et FH aequ. $\frac{1}{24}$ ipsius $3A3B$ seu de a^4, et GL, esse $\frac{1}{720}$ ipsius $4A4B$ seu de a^6[,] erit HL aequ. $\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24} + \frac{a^6}{720}$. quae ablata a $1A1B$, sive ab 1. relinquet $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \frac{a^6}{720}$ sinum complementi. Similis constructio ad plurima problemata Geometriae transcendentis sive aequationibus finitis ordinariis non subjectae, sufficiet.

Notari potest angulum $1B1AC$ posse esse quemcumque, adeoque sumi posse talem ut $1A1BC$ sit rectus quod faciliorem reddet constructionem. Imo levi tunc opera effici poterit, ut omnia sine ullo parallelarum aut perpendicularium ductu peragantur singulari ad eam rem circino adhibito. Quae omnia ad praxin in lineis usque adeo expedita sunt,

ut nesciam an aliquid ultra desiderari possit praesertim cum pro variis casibus variae regulae generalibus aptiores excogitari possint ab eo, qui earum origines intellexerit.

Propositio LI.

„Impossibile est meliorem invenire Quadraturam Circuli Ellipseos aut Hyperbolae „generalem, sive relationem inter arcum et latera, numerumve et Logarithmum; quae „magis geometrica sit, quam haec nostra est.

Haec propositio velut coronis erit contemplationis hujus nostrae. Eam vero ita demonstrabimus: Ponatur si fieri potest relatio quaedam inter arcum et tangentem inventa esse magis geometrica quam nostra sit, id est quae finita quadam formula constet; utique illa relatio includi poterit in aequationem. Sit t tangens, a arcus, radius 1 et aequatio relationem inter arcum et tangentem exprimens sit I. $ct + ma$ aequ. b. vel II. $ct+dt^2+eta+n^2a+ma$ aequ. b. vel III. $ct+dt^2+eta+ft^3+gt^2a+hta^2+pa^3+na^2+ma$ aequ. b. et ita porro.

Scilicet in quolibet gradu formula generalis exhibeatur, ad quam speciales semper poterunt reduci, literas b. c. d. e. f. etc. pro numeris aequationis specialis propositae sumendo, cum suis signis, aut aliquas harum literarum, quarum termini scilicet absunt, nihilo aequales ponendo. Ut si sit aequatio specialis $3t + 4t^2 - 6t^3 - t^2a + 5a$ aequal. 10. hanc cum III^{tia} comparando fiet c. aequ. 3. et d. aequ. 4. et e. aequ. 0. et f. aequ. -6. et g. aequ. -1. et h. aequ. 0. et p. aequ. 0. et n. aequ. 0. et m. aequ. 5. et b. aequ. 10. Idem in qualibet speciali fieri potest, modo generali ejusdem gradus comparetur.

His positis jam in exemplum aliqua harum aequationum generalium certi gradus assumatur, verbi gratia aequatio III. exprimens aequationem inter arcum a, et ejus tangentem t. Ponamus fig. 9. radium AB, et tangentem t. sive BC esse cognitas, et jam postulari ut arcus BO, sive angulus BAO in data ratione secetur, verbi gratia in partes undecim aequales; ajo id hujus aequationis tertiae ope fieri posse, quaeritur enim tantum tangens arcus illius, qui sit hujus arcus BO pars undecima, ea enim reperta utique et angulus in undecim partes erit sectus, arcum qui arcus a. pars undecima sit, vocemus $\frac{a}{11}$, et tangentem arcus $\frac{a}{11}$ vocemus θ, itaque cum ex hypothesi aequatio III. generalem exprimat relationem

1 possit *(1)* inprimis si regulae datae, ut $\frac{\mathrm{t}}{1} - \frac{\mathrm{t}^3}{3} + \frac{\mathrm{t}^5}{5}$ etc. non nihil immutentur, cum t non satis differt ab 1. radio modo supra dicto. *(2)* praesertim *L* 23 fig. | 9. *erg. Hrsg.* | *erg. L*

arcus cujuslibet ad suam tangentem; exprimet etiam relationem inter $\frac{a}{11}$ et θ. ergo in aequatione III. pro a substituemus $\frac{a}{11}$ et pro t substituamus, θ et pro aequatione III. habebimus sequentem $c\theta + d\theta^2 + \frac{e\theta a}{11} + f\theta^3 + \frac{g\theta^2 a}{11} + \frac{h\theta a^2}{11 \text{ in } 11} + \frac{pa^3}{11, \text{ in } 11, \text{ in } 11} + \frac{na^2}{11, \text{ in } 11} + \frac{ma}{11}$ aequ. b. cujus aequationis ope inveniri poterit incognita θ, tangens scilicet arcus qui dati sit pars undecima, quoniam autem θ incognita in ista aequatione non assurgit ultra cubum, problema erit cubicum tantum, adeoque angulum aliquem in undecim partes secare problema erit cubicum et eodem modo pro 11. substituendo numerum quemcunque, sectio anguli secundum numerum quemcunque problema erit cubicum tantum.

Quod est absurdum, constat enim ex Vietae sectionibus angularibus pro anguli in partes sectione secundum numeros primos semper altiore atque altiore opus esse aequatione Anguli bisectionem esse problema planum, anguli trisectionem esse problema solidum sive cubicum, anguli quinquesectionem esse problema sursolidum, et ita porro in infinitum: absurdum est ergo generalem anguli sectionem esse problema cubicum. Eodem modo impossibile est generalem anguli sectionem esse problema ullius gradus determinati finiti; cum ut dixi aliud semper aliudque sit, pro alio atque alio partium in quas secandus est angulus, numero.

Itaque etsi aequatio III. fuisset alia quaecunque altior illa, quam expressimus modo certa determinata ac finita, in qua t (vel ejus loco θ) assurrexisset ad gradum aliquem altiorem finitum ac determinatum quemcunque semper ostendi posset, eam non sufficere sectioni anguli in partes, tot quot numerus aliquis primus major exponente maximae in aequatione potentiae ipsius t, habet unitates. Adeoque non potest generalem exprimere relationem inter arcum et tangentem. Adeoque nec inter arcum et sinum; idem est si pro arcu sectorem aut segmentum substituas, par enim ratio est.

Ac proinde quadratura analytica universalis Circuli ejusque partium, quae nostra sit γεωμετρικώτερος, impossibilis erit. Eadem ad quadraturam Hyperbolae applicari possunt; nam, quemadmodum generali relatione inter arcum et latera inventa posset haberi sectio anguli universalis, per unam aequationem certi gradus; ita generali inventa qua-

22 f. idem ... substituas, *erg. L* 27 per ... gradus; *erg. L*

9 Vietae: Fr. Viète, *Ad angularium sectionum analyticen theoremata*, 1615 (*VO* S. 287–304); vgl. Erl. zu N. 28 S. 350 Z. 12.

dratura hyperbolae sive relatione inter numerum et logarithmum, possent inveniri quotcunque mediae proportionales ope unius aequationis certi gradus, quod etiam absurdum esse, analyticis constat. Adde quae supra diximus prop. [31.]

Impossibilis est ergo quadratura generalis sive constructio serviens pro data qualibet parte Hyperbolae aut Circuli adeoque et Ellipseos, quae magis geometrica sit, quam nostra est. Q. E. D.

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS

Verfasser bzw. Mitverfasser von hier abgedruckten Stücken werden mit der betreffenden Stücknummer genannt, ebenso Personen, auf die sich ein ganzes Stück bezieht. Diese Nummerneintragungen sind zur Unterscheidung von den Seitenangaben mit einem Stern versehen. Im Übrigen wird nach Seiten zitiert. Bei Autoren ist zusätzlich das Schriftenverzeichnis heranzuziehen. Variierende Namensformen werden nur genannt, wenn sie stärker voneinander abweichen. Kursivdruck weist auf Herausgebertext hin.

Aleaume (Aleaumius), Jacques † 1627: S. 502.

Alfons X. (Alphonsus) (der Weise), 1252–1282 König von Kastilien u. Léon, 1257–1273 dt. König † 1284: S. 433. 499.

Alhazen s. Ibn al-Haytham.

amicus 17. Jh.: S. 637.

Anthonisz, Adriaen † 1620: S. *172*.

Apollonius v. Perga 3./2. Jh. v. Chr.: S. 88. *212*. 233. 487. 499. 504. *548*.

Archimedes † 212 v. Chr.: S. 41 f. 88. 103. 146. 170–173. 197 f. 216. 330. 332. 399. 429. 436. 437. 439. 487. 489–491. 495 f. 498 f. *498*. 503–506. 536. 599. 601.

Archytas (Architas) v. Tarent 5./4. Jh. v. Chr.: S. 495.

Aristophanes † um 385 v. Chr.: S. 485.

Aristoteles † 322 v. Chr.: S. 487. 489. 495. 498. 503.

Asklepios (Aesculapius), Gott der Heilkunde: S. 516.

Bacon (Baconus), Francis, Baron von Verulam † 1626: S. 434. 495.

Bartholin, Rasmus † 1698: S. *485*.

Beaune s. Debeaune.

Bertet (Berthet), Jean S. J. † 1692: S. 226. 247. 321. *321*. 563.

Bils, Lodewijk de † 1671: S. *516*.

Bodenhausen, Rudolf Christian, Freiherr v. † 1698: S. *453*.

Boulliau (Bullialdus), Ismael † 1694 : S. 507.

Boyle (Boylius), Robert † 1691: S. 485 (egregii quidam Viri). 491.

Braunschweig-Lüneburg, Herzog Johann Friedrich von Hannover 1665–1679: S. *432*.

Brouncker (Brounckerus, Brounker, Brounkerus), William, Viscount † 1684: S. 225. *225*. 332. 438. 509 f. *509*. 562 (Anglus). *562*. 566. 615 f.

Cardano, Girolamo † 1576: S. 296. 490. 501 f.

Carolus II. s. England.

Cavalieri (Cavalerius), Bonaventura C.A.S.H. † 1647: S. 88. 139. 181. 197. 200. 320 f. 437. 498. 505. 511. 523. 538. 586. 588.

Clavius, Christoph S. J. † 1612: S. 486. *486*.

Colbert, Jean Baptiste, Marquis de Seignelay † 1683: S. *432*.

Collins, John † 1683: S. *418*. *458*. 465.

Colombo (Columbus), Cristoforo † 1506: S. 491.

Copernicus, Nicolaus † 1543: S. 489.

Cusanus s. Nikolaus v. Kues.

Debeaune (Beaune), Florimond † 1652: S. *520*. 637. *637*.

Dechales (De Chales), Claude François Milliet S. J. † 1678: S. *108*.

Demokrit (Democritus) v. Abdera 5./4. Jh. v. Chr.: S. 489. 495.

Desargues (Desarguesius), Girard † 1661: S. 144. 200. 490. 510. 538.

Descartes (Cartesius, des Cartes), René † 1650: S. 11. 42. *42*. 88. 146 f. 153. *153*. 175. 197. 219. 221–223. 229 f. 435. 437. 485. 487. 489–491. 494 f. 498. 501–506. *506*. 509. 567. 586. 637 f. *637*.

Dettonville (Dettonvillaeus), A. [Pseud.] s. Pascal, Blaise.

Diokles 3./2. Jh. v. Chr.: S. *499*.

Diophantus 3. Jh.: S. 487. 499.
Dominis, Marcus Antonius de S. J. † 1624: S. 490.
Drebbel (Drebelius), Cornelius Jacobszoon † 1633: S. 492.

Elsevier (Elzevier, Elzevir) Daniel † 1680: S. *41*.
Elsevier (Elzevier, Elzevir), Johan † 1661: S. 41. *41*.
Elsevier (Elzevir), Lodewijk † 1670: S. 41.
England
König Karl II. (Carolus II.) 1660–1685: S. 434.
Epikur (Epicurus) † 271 v. Chr.: S. 503.
Euklid (Euclides) v. Alexandria 3. Jh. v. Chr.: S. 169. 172. 196 f. *499*.
Eutokios (Eutocius) v. Ascalon um 480: S. *212*. 499. *548*.

Fabri, Honoré S. J. † 1688: S. 204. 215 f. 321. 552 f.
Ferdinandus s. Kaiser.
Fermat, Pierre de † 1665: S. *26*. 230. *230*. 320. *320*. 434. 437. *483*. 487. 504. *504*. 507. *507*. 588 f. *588*.
Ferrari (Ferrarius), Lodovico † 1565: S. 502.
Ferro (Ferreus), Scipione dal † 1526: S. 500 f.
discipulus s. Fiore, Antonio Maria.
Fiore, Antonio Maria 16. Jh: S. 501 (discipulus).
Fortin (Fortinus) de la Hoguette, Philippe, † 1668: S. 485.
Foucher, Simon † 1696: S. *453*.
Fridericus II^{dus} s. Kaiser.

Galenus † um 215: S. 488.
Galilei, Galileo † 1642: S. 197. 487. 489 f. 492 f. 495. 503–506.
Gallois, Jean † 1707: S. *110*.
Geminus v. Rhodos 1. Jh. v. Chr.: S. *212*. *548*.
Gent, Pieter van 17. Jh.: S. *220*. *557*.
Girard (Girardus), Albert † 1632: S. 502.
Gregorius a S. Vincentio s. Saint-Vincent.
Gregory (Gregorius), James † 1675: N. 3*. S. *41*. 68. 73. *164*. 166. 172 f. 175. 351. 353 f. *418*. 439. *458*. 509. *509*. *520*.

Guericke (Gerickius), Otto v. † 1686: S. 491.
Guldin (Guldinus), Paul S. J. † 1643: S. 88. 197. 437. 498. 505.

Heron (Hero) v. Alexandria um 62: S. 487. 491.
Heuraet (Heuratius), Hendrik van † 1660: S. 225. 438. 508 f. 548. *548*. 552 f. 562 (Batavus). *562*.
Hieron II., König von Syrakus † 214 v. Chr.: S. 429. 495.
Hippokrates v. Chios 5. Jh. v. Chr.: S. 89. *497*. 498.
Hippokrates v. Kos † 375 v. Chr.: S. 489.
Hobbes, Thomas † 1679: S. 486 (Docti).
Hudde, Jan † 1704: S. 230.
Huygens (Hugenius, Huguens), Christiaan † 1695: N. 2*. 46*. S. *51*. 55. 68. *75*. 90 f. *92*. *110*. 166. 172. 197. 212. *212*. 216. 225. *333*. 341. *432*. 438 f. 493. *499*. 506 (doctissimi viri). 507–509. *509*. 562 (Batavus). *562*. *597*. *601*. 610 f.
Vater: s. Huygens, Constantijn.
Huygens, Constantijn † 1687: S. *42* (Vater).

Ibn al-Haytham (Alhazen, Abū ʻAlī al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan) † 1040/41: S. 499. *499*.

Johann Friedrich von Hannover s. Braunschweig-Lüneburg.
Johann Moritz von Nassau-Siegen s. Nassau-Siegen.

Kaiser und Könige, deutsche:
Friedrich II. (Fridericus II^{dus}) 1220–1250: S. 499.
Rudolf II. (Rudolphus) 1575–1612: S. 433. 492.
Ferdinand III. (Ferdinandus) 1637–1657: S. 433.
s. a. Alfons X.
Kepler, Johannes † 1630: S. *458*. *485*. 489. 492.
Khwārizmī al-, Muḥammad ibn Mūsā (Mahometes Arabs) um 850: S. 500.
Kopernikus s. Copernicus.

Lalouvère (Lalovera), Antoine de S. J. † 1664: S. 216. 507.
La Roque, Jean Paul de † 1691: S. *110*. *488*.
Lee, William † 1614: S. 488 (Scotus). *488*.

Léotaud, Vincent S. J. † 1672: S. 506 (doctissimi viri).
Ludolph van Ceulen (Ludolphus a Colonia, Ludolphus Coloniensis) † 1610: S. 32. 43. *43*. 131. 172–174. 311. 314. 348. 439.
Lukrez (T. Lucretius Carus) † 55 v. Chr.: S. 503 (poeta).

Mahometes Arabs s. Khwārizmī.
Maier, Michael (Mayerus) † 1622: S. 484.
Mariotte, Edmé † 1684: S. *485*.
Martini (Martinius), Martino S. J. † 1661: S. 491.
Mauritius Nassovius s. Moritz bzw. Nassau-Siegen.
Meibom, Marcus † 1710/11: S. 556.
Mengoli (Mengolus), Pietro † 1686: N. 13*.
Mercator, Nicolaus † 1687: S. 30 f. 58. 87. 91. 438. 510. 566. 596. 616. 641 f.
Mersenne, Marin O. M. † 1648: S. *320*. *506*. *507*. *588*.
Metius, Adriaan † 1635 : S. 172 f. *172*.
Vater s. Anthonisz, Adriaen.
Metius, Jacob † 1628: S. 485 (concinnator). *485*. 491. *491*.
Mohr, Georg † 1697: N. 17*. 26*. S. *295*. *296*. *425*. *464*. 465.
Moritz (Mauritius Nassovius), Graf von Nassau-Dillenburg, 1618–1625 Prinz von Oranien: S. 434.

Nassau-Siegen, Fürst Johann Moritz (Mauritius Nassovius) 1664–1679: S. 434.
Neile (Neilius), William † 1670: S. 225. 438. *438*. 509. *509*. *562*.
Newton (Neutonus), Isaac † 1727: S. 44. *44*. *462*. *520*. 597. *597*.
Nikolaus v. Kues (Nicolaus Cusanus) † 1464: S. 434.
Nikomedes 3./2. Jh. v. Chr.: S. *499*.

Oldenburg, Heinrich † 1677: S. *44*. *161*. *162*. *202*. *333*. *418*. *423*. *427*. *434*. *440*. *458*. *462*. *464*. *465*. *467*. *520*. *597*. *601*.
Ozanam, Jacques † 1717: N. 44*.

Pappus von Alexandria † nach 320: S. *212*. 485. 499. *548*.
Papst Gregor XIII. 1572–1585: S. *486*.
Pardies, Ignace Gaston S. J. † 1673: S. 213. 548.
Pascal (Dettonvillaeus, Pascalius), Blaise † 1662: S. 144. 153. 200. 202. *202*. 216. 340 f. 437. 489. 491. 506–508. 510. 538. 540. 552 f. 606. 609 f.
Peiresc (Peirescius), Nicolas Claude Fabri de † 1637: S. 434.
Pell, John † 1685: S. 70. 94.
Perier, Étienne † 1680: S. *202*.
Perrault (Perraltus), Claude † 1688: S. *259*.
Pfalz-Simmern, Ruprecht (Robertus Palatinus) von, Vizeadmiral von England † 1682: S. 434.
Platon † 347 v. Chr.: S. 146. *146*. 495. 503.
Porta, Giovanni Batista della † 1615: S. 492.
Prestet, Jean † 1690: S. 502 (autor).
Proklos † 485: S. *212*. *548*.
Pythagoras v. Samos † 497/496 v. Chr.: S. 169. 489. 495. 497.

Ramazzini, Bernardino † 1714: S. *492*.
Regiomontanus (Müller von Königsberg), Johannes † 1476: S. 500.
Rheita, Antonius Maria Schyrlaeus de O. F. M. Cap. † 1660: S. 492.
Rheticus (Rhaeticus), Georg Joachim † 1574: S. 500.
Ricci, Michelangelo † 1682: S. 153. *178*. 230 bis 232. 239. 567. 570.
Roberval, Gilles Personne de † 1675: S. 91. *483*. *498*. 506 f. *506*. 588.
Robertus Palatinus s. Pfalz-Simmern.
Rossi, Galeazzo † 1522: S. 490 (Mediolanensis cives). *490*.
Rudolphus s. Kaiser.

Saint-Vincent (Gregorius a S. Vincentio), Grégoire de S. J. † 1667: S. 12. 31. *31*. 88. 212. 220. 381. 384. 437. 498. 506. 548. 556. 632. 641.
Santorio (Sanctorius), Santorio † 1636: S. 490.
Sarasa (Sarrasa), Alphonse Antoine de S. J. † 1667: S. 12. *31*.

Scaliger, Joseph Justus † 1609: S. 486. *486.* 496.
Scheiner (Scheinerus), Christoph S. J. † 1650: S. 490.
Schooten (Schotenius), Frans van d. J. † 1660: S. 509.
Sluse (Slusius), René-François de † 1685: S. 153. *178.* 197. 230. *230.* *499.* 508. 570.
Snell (Snel van Royen, Snellius), Willebrord † 1626: S. 32. 42. 172. 439.
Sokrates (Socrates) † 399 v. Chr.: S. 485. 495.
Stevin (Stevinus), Simon † 1620: S. 490.

Tartaglia (Tartalea), Niccolò † 1557: S. 501.
Theaitetos † 369 v. Chr.: S. *497.*
Thévenot, Melchisédech † 1692: S. *485.*
Thomas von Aquin (Aquinas) O. P. † 1274: S. 503.
Timur-Leng (Tamerlanes) † 1405: S. 433.
Torricelli, Evangelista † 1647: S. *26.* 212. 385. *385.* 491. 505. 548.
Tschirnhaus, Ehrenfried Walther von † 1708: N. 22*. 36_1*. 38*. S. *44.* *108.* 220. *220.* *333.* *458.* *462.* *464.* *467.* 506 (amicus). *506.* *508.* 509 (juvenis). *509.* 557. *557.* *597.* *601.*

Ulugh Beigh (Ulug-bei), Mohammed, Fürst von Samarkand † 1449: S. 433.

Viète (Vieta), François † 1603: S. 88. 146. 219. 223. 275. 304. 350. 434 f. 439. 486. 498. 502–505. 675.

Wallis (Wallisius), John † 1703: S. 25. 30. 55. 58. 89. 91. 152. 197. 212. *212.* 216. 224 f. *225.* 281. 286. 320 f. 332. 385. 437–439. 507–509. *509.* 548. *548.* 552 f. 556. *556.* 562 (Anglus). *562.* 568. 589. 634.
Witt (Wit, Wittius), Johan de † 1672: S. 145. 434.
Wren (Wrennius), Christopher † 1723: S. *225.* 438. *438.* 507. *507.* *509.* 562 (Anglus). *562.*
Würz (Wurtius) Paul, Baron von, Generalfeldmarschall † 1676: S. 434.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

Das Schriftenverzeichnis (SV.) enthält die im Text und in den Apparaten angeführte Literatur. Darin sind Autoren, die Leibniz grundsätzlich zugänglich waren, einschließlich ihrer modernen Ausgaben verzeichnet. Abkürzungen von in den Erläuterungen oder Überlieferungen erwähnter Literatur werden im Abkürzungsverzeichnis aufgeführt. Noch nicht edierte Leibniz-Stücke sind im Handschriftenverzeichnis Teil 3 zu finden. — Jeder Autor und Sachtitel erhält eine Leitnummer, die Reihenfolge der Einzelwerke ist chronologisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern ausgezeichnet sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einem bestimmten Titel zuzuordnen ist. Werke mit eigenhändigen Eintragungen von Leibniz sind mit dem Zusatz [Marg.] versehen. Für die Erwähnung von Autorennamen ist auch das Personenverzeichnis mitheranzuziehen. Kursiv gedruckte Seitenangaben weisen auf Herausgebertext hin.

1. *A c t a Eruditorum.* Leipzig 1682 ff.:
   — Februar 1682: S. *110*. *453*.
   — September 1693: S. *259*.
– Alfons X. s. SV. N. 56.
– Alhazen s. SV. N. 48.
– Anderson, A. [Hrsg.], s. SV. N. 97,7. 97,8.
2. Apollonius, *Conica*: S. *226*. *499*. *540*.
3. Archimedes
   1. *De lineis spiralibus*: S. *146*. *170* f. *198*. *498*.
   2. *Dimensio circuli*: S. *41*. *103*. *170*. *172*. *330*. *332*. *399*. 439. *599*. *601*.
   3. *De sphaera et cylindro*: S. *103*. *171*. *216*. *498*. *536*.
   4. *Quadratura parabolae*: S. *498*.
   5. *De conoidibus et sphaeroidibus*: S. *498*.
   6. *De aequiponderantibus*: S. *498*.
   7. *De corporibus fluitantibus* : S. *491*. *499*.
4. Aristophanes, *Nubes*: S. *485*.
5. Aristoteles
   1. *Analytica priora*: S. 487.
   2. *Analytica posteriora*: S. 487.
6. Aulus Gellius, *Noctium Atticarum libri XX*: S. *430*.
7. Barozzi, F., *Admirandum illud geometricum problema tredecim modis demonstratum*. Venedig 1586: S. *212*. *548*.
8. Barrow, I., *Lectiones geometricae: In quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur*. London 1670. Titelauflage in: *Lectiones XVIII ... in quibus opticorum phaenomenωn genuinae rationes investigantur, ac explicuntur. Annexae sunt Lectiones aliquot geometricae*. London 1672 [Marg.]. Ergänzte Titelauflage in: *Lectiones opticae et geometricae*. London 1674; Nachdr. der *Lectiones geometricae* Hildesheim [u. a.] 1976: S. *172*.
9. Bartholin, R., *De figura nivis dissertatio*. Kopenhagen 1661: S. *485*. — s. a. SV. N. 36,2.
10. Benzoni, G., *La historia del mondo nuovo*. Venedig 1572; lat. Fassung u. d. T. *Novae novi orbis historiae ... libri tres*. Genf 1578 [u. ö.]: S. *491*.
– Bertet, J. s. SV. N. 54,96.
11. Blaeu, W. [u.] J., *Theatrum orbis terrarum, sive Atlas Novus, in quo tabulae et descriptiones omnium regionum*. P. 1–6. Amsterdam 1634–1655. [In P. 6 u. a.: SV. N. 61.]
– Bodenhausen, R. Chr. von, s. SV. N. 54,105.
12. Bombelli, R., *L'Algebra*. Bologna 1572, Titelaufl. 1579 [Marg.]; Neudruck: *L'Algebra*. Prima edizione integrale. Introduzione di

U. Forti. Prefazione di E. Bortolotti. Mailand 1966: S. 500. 502.

– Borel, P. s. SV. N. 49.

13. Boulliau, I., *Opus novum ad arithmeticam infinitorum libris sex comprehensum*. Paris 1682: S. 507.

14. Boyle, R.

1. *New Experiments Physico-Mechanicall, touching the Spring of the Air, and its effects, made, for the most part, in a new pneumatical engine*. Oxford 1660 [u. ö.]; lat. Übers. *Nova experimenta physico-mechanica de vi aeris elastica, et ejusdem effectibus, facta maximam partem in nova machina pneumatica*. Oxford 1661; lat. Fassung: *Nova experimenta physico-mechanica de vi aeris elastica*. Rotterdam 1669. [Auch in: *BW* I S. 141–301]: S. 491.

2. *The excellency of theology, compar'd with natural philosophy, as both are objects of men's study. Discours'd of in a letter to a friend . . . to which are annexed some occasional thoughts about the excellency and grounds of the mechanical hypothesis*. London 1674. [Auch in: *BW* VIII S. 3–98]: S. 485.

3. *Some considerations about the reconcileableness of reason and religion by T. E. A. Lay-man. To which is annex'd by the publisher a discourse of Mr Boyle about the resurrection*. London 1675. [Auch in: *BW* VIII S. 233–313]: S. 485.

– Braunschweig-Lüneburg, Herzog Johann Friedrich, s. SV. N. 54,90.

15. Brouncker, W.

S c h r i f t e n :

1. *The squaring of the hyperbola, by an infinite series of rational numbers, together with its demonstration*. In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668, S. 645–649: S. 332. 438. 510. 566. 615.

B r i e f e :

2. Brouncker an Oldenburg, 18. Oktober 1673. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S. 6149 f. [Auch in: *OC* X S. 291 f.]: S. 225. 509. 562.

– Carcavy, J., s. SV. N. 72,7.

16. Cardano, G.

1. *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*. Nürnberg 1545; [auch in: SV. N. 16,3 Bd IV S. 221–302]: S. 500. 501.

2. *De subtilitate libri XXI*. Basel 1554 [u. ö.]; [auch in: SV. N. 16,3 Bd III S. 357–672]: S. 490.

3. *Opera omnia*. 10 Bde. Lyon 1663; Nachdr. Stuttgart–Bad Cannstatt 1966. [Darin u. a. SV. N. 16,1 u. 16,2.]

17. Cavalieri, B.

1. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bologna 1635; 2. Aufl. ebd. 1653: S. 181. 321. 505. 523. 538. 586.

2. *Exercitationes geometricae sex*. Bologna 1647; Nachdr. Urbino 1980: S. 320. 588.

18. Cicero, M. Tullius

1. *De re publica*: S. 489.

2. *Tusculanae disputationes*: S. 489.

19. Clavius, Chr.

1. *Elenchus et castigatio calendarii Gregoriani castigata*. Rom 1595; [auch in SV. N. 19,3]: S. 486.

2. *Responsio ad convicia et calumnias Jos. Scaligeri in calendarium Gregorianum: item Refutatio cyclometriae eiusdem*. Mainz 1609; [auch in SV. N. 19,3]: S. 486.

3. *Opera mathematica*. Bd 5. Mainz 1612. [Darin u. a. mit separater Paginierung SV. N. 19,1 u. 19,2.]

– Clerselier, Cl. de [Hrsg.] s. SV. N. 24,7.

20. Collins, J., Collins an Oldenburg für Tschirnhaus, Ende Mai 1676 [Gedr. u. a.: III, 1 N. 82_2 S. 382–407]: S. 458. — s. a. SV. N. 54,101.

21. Dati, C. R., (Timauro Antiate, Pseud.), *Lettera a Filaleti . . . della vera storia della cicloide, e della famosissima esperienza dell' argento vivo*. Florenz 1663; [auch in: *TO* I, 2 S. 441–482]: S. 506.

– Debeaune, Fl., s. SV. N. 24,15.

22. Dechales, C. F. M., *Cursus seu mundus mathematicus*. 3 Bde. Lyon 1674; 2. Aufl. 4 Bde. Ebd. 1690: S. *434*.

– Deprez, G., s. SV. N. 72,14.

23. Desargues, G., *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*. Paris 1639; Nachdr. Paris 1864: S. *144*. *200*. *510*. *538*.

24. Descartes, R.

Schriften:

1. *Discours de la Methode ... Plus La Dioptrique. Les Météores. Et La Géométrie. Qui sont des essais de cete Methode*. Leiden 1637 [auch in *DO* VI S. 1–515]; Nachdr. Osnabrück 1973; Lecce 1987. [Darin SV. N. 24,2–4]; lat. Fassung (ohne *Géométrie*) SV. N. 24,6.

2. *La Dioptrique*. In SV. N. 24,1 S. 1–153 (2. Zählung) [auch in *DO* VI S. 79–228]; lat. Fassung u. d. T. *Dioptrice* in SV. N. 24,6 S. 71–206 [auch in *DO* VI S. 584–650]: S. *485*. *491*.

3. *Les Météores*, 1637, in SV. N. 24,1 S. 155 bis 294 (2. Zählung); lat. Fassung u. d. T. *Meteora,* in SV. N. 24,6 S. 207–331 [auch in *DO* VI S. 230–366 bzw. S. 651–720]: S. *485*.

4. *La Géométrie*. In SV. N. 24,1 S. 297–413 (2. Zählung) [u. ö.] [auch in *DO* VI S. 367 bis 485]; lat. Fassung u. d. T. *Geometria* hrsg. v. Fr. v. Schooten in SV. N. 36,1 S. 1–118; 2. Ausg. in SV. N. 36,2 Tl I S. 1–106 [Marg.]: S. 88. *146* f. *153*. *219*. *221–223*. *229* f. *437*. *498*. *501* f. 504 f. *508*. 509.

5. *Principia philosophiae*. Amsterdam 1644. 2. Aufl. 1650 [Marg.]; frz. Übers.: *Les principes de la philosophie, escrits en latin par R. Descartes et traduits en françois par un de ses amis*. [Cl. Picot]. Paris 1647: S. *503*.

6. *Specimina philosophiae*. Amsterdam 1644 [u. ö.] [Darin: *Dissertatio de methodo recte regendae rationis, et veritatis in scientiis regendae*, S. 1–70; SV. N. 24,2 S. 71–206; SV. N. 24,3 S. 207–331]

7. *Lettres*. Hrsg. Cl. de Clerselier. 3 Bde. Paris 1657–67 [Marg.]; Nachdr. Lecce 2005; lat. Fassung u. d. T. *Epistolae*. Amsterdam 1668–82: S. *230*. *485* f. *504*. *506*. *567*.

8. *Opuscula posthuma physica et mathematica*. Amsterdam 1701; Nachdr.: Amsterdam 1704. [Darin mit separater Paginierung: Descartes, R.: *Mundus sive dissertatio de lumine*; ders.: *De mechanica tractatus una cum elucidationibus N. Poissonii*; Poisson, N.: *Elucidationes physicae in Cartesii musicam*; Descartes, R.: *Regulae ad directionem ingenii. Inquisitio veritatis per lumen naturale*; ders.: SV. N. 24,9.; ders.: *Primae cogitationes circa generationem animalium. De saporibus*.]

9. *Excerpta ex Mss. R. Des-Cartes*. Ms. [Gedr. in SV. N. 24,8; darin u. a. SV. N. 24,10 und N. 24,11]: S. *42*.

10. *Ex quantitate linearum, quae in dato circulo inscriptae sunt, quantitatem circumferentiae, cui datae lineae subtenduntur, cognoscere*. Ms. [Gedr. in SV. N. 24,9, S. 1–4; auch in: *DO* X S. 285–289]: S. *42*.

11. *Circuli quadratio*. Ms. [Gedr. in SV. N. 24,9, S. 6 f.; auch in: *DO* X S. 304 f.]: S. *42*.

Briefe:

12. Descartes an Mersenne, 5. April 1632. [Gedr. SV. N. 24,7 Bd 2 S. 339 f.; auch in: *DO* I S. 242–244; Mersenne, *Correspondance* III, S. 290–295]: S. *485*.

13. Descartes an Mersenne, 31. März 1638. [Gedr. SV. N. 24,7 Bd 3 S. 394–404; auch in: *DO* II S. 81–103; Mersenne, *Correspondance* VII, S. 119–142]: S. *486*.

14. Descartes an Mersenne, 17. u. 27. Mai 1638. [Gedr. SV. N. 24,7 Bd 3 S. 384–394; auch in: *DO* II S. 114–153; Mersenne, *Correspondance* VII, S. 224–246]: S. *506*.

15. Descartes an Debeaune, 20. Februar 1639. [Gedr. SV. N. 24,7 S. 409–416; auch in: *DO* II S. 510–523]: S. *637*.

— s. a. SV. N. 49.

25. Diodorus Siculus, *Bibliotheca historica*: S. *490*.

26. Diogenes Laërtius, *De vitis, dogmatis et apophthegmatis clarorum philosophorum libri decem*: S. *497*.

27. DIOPHANT, *Arithmetica*: S. *499*.

28. *Divers ouvrages de mathematique et de physique. Par messieurs de l'Academie Royale des Sciences*. Paris 1693. [Darin u. a.: SV. N. 60,2. 82.]

29. EUKLID, *Elemente*: S. 88. *169*. *172*. 173. *497*. *500*.

30. EUTOKIOS, *Commentarii in libros Archimedis, De sphaera et cylindro, Dimensio circuli, De planorum aequilibriis*: S. *146*. *497*. *499*.

31. FABRI, H.
1. *Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide*. Rom 1659; 2. Aufl. in SV. N. 31,3 [Marg.]: S. 215. *216*. 552 f. *645*.
2. *Dialogi physici*. [Tl 2]: *Quorum primus est de lumine. Secundus et tertius, de vi percussionis et motu. Quartus, de humoris elevatione per canaliculum. Quintus et sextus, de variis selectis*. Lyon 1669:
3. *Synopsis geometrica cui accessere tria opuscula, nimirum; De linea sinuum et cycloide; De maximis et minimis, centuria; et Synopsis trigonometriae planae*. Lyon 1669 [Marg.]: S. *22*. *58*. *204*. *215* f. 321. 552.

32. FERMAT, P. de, Fermat an Mersenne, Februar/März 1642, tlw. gedr. in SV. N. 65,2, praefatio, § IV, Bl. a1 v°–a2 r° [auch in: *FO* I S. 195–198; MERSENNE, *Correspondance* XI S. 55–58]: S. *320*. *507*. *588*.

33. FORTIN de la Hoguette, P., *Testament, ou conseils fideles d'un bon pere à ses enfans*. Paris 1648 [u. ö.]: S. 485.

– FOUCHER, S., s. SV. N. 54,104.

34. GALEN, *De simplicium medicamentorum temperamentis et facultatibus libri undecim*: S. *488*.

35. GALILEI, G.
1. *Sidereus nuncius magna, longeque admirabilia spectacula pandens*. Venedig 1610 [u. ö.]; Nachdr. Brüssel 1967; [auch mit separater Paginierung in SV. N. 35,4 Bd 2 u. in *GO* III, 1 S. 53–96] : S. 492.
2. *Dialogo ... dove nei congressi di quattro giornale si discorre sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico e Copernicano*. Florenz 1632; lat. Übers. Straßburg 1635; [auch in *GO* VII S. 20–520]: S. *492*.
3. *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Leiden 1638; Nachdr. Brüssel 1966; [auch mit separater Paginierung in SV. N. 35,4 Bd 2 u. in *GO* VIII S. 39–318 sowie *GO* I S. 187–208]: S. *505*.
4. *Opere*. 2 Bde. Bologna 1655–56.

– GALLOIS, J., s. SV. N. 46,11. 54,95.

36. *Geometria*
1. *Geometria, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita; nunc autem cum notis Florimondi de Beaune ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten*. Leiden 1649. [Darin: DESCARTES, R., SV. N. 24,4; DEBEAUNE, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*, S. 119–161; SCHOOTEN, Fr. v., SV. N. 86,1; ders., *Additamentum*, S. 295–336].
2. *Geometria, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten ... Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletorioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus ... exornata*. 2 Tle Amsterdam 1659–61 [Marg.]. [In Tl I: DESCARTES, R., SV. N. 24,4; DEBEAUNE, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*; SCHOOTEN, Fr. v., SV. N. 86,1; ders., *Appendix de cubicarum aequationum resolutione*. 2. Aufl.; ders., *Additamentum*; HUDDE, J., SV. N. 45; HEURAET, H. v., SV. N. 43. In Tl II: Schooten, Fr. v., *Principia matheseos universalis, seu introductio ad geometriae methodum Renati des Cartes*. Hrsg. R. Bartholin. 2. Aufl.; ders., SV. N. 86,2; DEBEAUNE, Fl., *De aequationum natura, constitutione et limitibus, opuscula duo*. Hrsg. R. Bartholin; WITT, J. de, SV. N. 99.]: S. 509.

37. Girard, A., *Invention nouvelle en l'algebre tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions quelles reçoivent*. Amsterdam 1629; Nachdr. Leiden 1884: S. *502*.

38. Gregory, J.
1. *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Padua 1667; Nachdr. ebd. 1668 [Marg.]: N. 3*. S. *27*. *41*. *53*. *68*. *166*. *172*. 175. *351*. 353 f. *399*. *439*. *458*. *482*. 509. — Rez.: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 640–644: S. *509*. — *Journal des Sçavans*, 2. Juli 1668, S. 353–368 [Auszug (Stellungnahme von Huygens) in *HO* VI Nr. 1647 S. 228–230]: S. *509*.
2. *Answer to the animadversions of Mr. Hugenius*. In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 732–735; [auch in *HO* VI Nr. 1653 S. 240–243]: S. *509*.
3. *Geometriae pars universalis*. Padua 1668 [Marg.]: S. *623*.
4. *Exercitationes geometricae*. London 1668 [Marg.]: S. *27*. *73*. *95*. *105*. *418*. *509*.
5. *An extract of a letter ... to the Publisher, containing some considerations ... upon M. Hugens his letter*. In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 882–886; [auch in *HO* VI Nr. 1682 S. 306–311]: S. *462*. *509*.

39. Guericke, O. v., *Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica de vacuo spatio*. Amsterdam 1672; Nachdr. Aalen 1962; Halle a. d. Saale 2002: S. *491*.

40. Guldin, P., *Centrobaryca*. Bd 1, Buch I, Wien 1635; Bd 2, Buch II–IV, Köln 1640 bis 1641: S. *498*. *505*.

41. Herigone, P., *Supplementum cursus mathematici*. Paris 1642. Titelaufl. u. d. T. *Cursus mathematici tomus sextus ac ultimus, sive supplementum*. Paris 1644: S. *230*. *504*.

42. Heron v. Alexandria
1. *Belopoeica*: S. 491.
2. *Pneumatica*: S. 491.

43. Heuraet, H. v., *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*. In SV. N. 36,2 Tl I S. 517–520 [Marg.]: S. *225*. *438*. 508 f. *562*.

44. Hobbes, Th.
1. *Elementorum philosophiae sectio tertia de cive*. Paris 1642. 2. Aufl. u. d. T. *Elementa philosophica de cive*. Amsterdam 1647 [u. ö.]; [mit separater Paginierung auch in SV. N. 44,5 u. in *HOL* II S. 133–432]: S. *486*.
2. *Elementorum philosophiae sectio prima de corpore*. London 1655. 2. Aufl. in SV. N. 44,5 [Auch in *HOL* I]: S. *556*.
3. *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*. London 1660. 2. Aufl. in SV. N. 44,5; [auch in *HOL* IV S. 1–232]: S. *556*.
4. *De principiis et ratiocinatione geometrarum*. London 1666. 2. Aufl. in SV. N. 44,5; [auch in *HOL* IV S. 385–484]: S. *556*.
5. *Opera philosophica*. Amsterdam 1668. [Darin u. a.: 2. Aufl. von SV. N. 44,1–4]

45. Hudde, J., *Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit*. In SV. N. 36,2 Tl I S. 401–516 [Marg.]: S. *230*.

46. Huygens, Chr.
Schriften:
1. *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus subiuncta est* εξετασις *cyclometriae cl. viri Gregorii a S. Vincentio*. Leiden 1651; [auch in *HO* XI S. 281–337]: S. *506*.
2. *De circuli magnitudine inventa*. Leiden 1654. [Auch in *HO* XII S. 113–181]: N. 2*, S. *51*. *53*. *68*. *172*. *439*.
3. Aufzeichnungen zur Rektifikation der Parabel und zur Quadratur der Oberfläche des parabolischen Konoids. 1657. Ms. [Gedr.: *HO* XIV S. 234–270]: S. *508*.
4. Aufzeichnung zur Quadratur der Zissoide. April 1658. Ms. [Gedr.: *HO* II S. 170–173]: S. *55*. *212*. *548*
5. Erste Aufzeichnung in *L'horloge à pendule à arcs cycloïdaux*. 20. Dezember 1659. Ms. [Gedr.: *HO* XVII S. 98–100]: S. *509*.
6. Vierter Zusatz zu *De ratiociniis in ludo aleae*. 1665. Ms. [Gedr.: *HO* XIV S. 144–150]: S. *90*. *341*. *610*.

7. *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris 1673 [Marg.]; Nachdr. London 1966. [Auch in *HO* XVIII S. 69–365 u. XVI S. 315–318]: S. *167*. *214*. *216*. *225*. *438*. *493*. 508 f. *550*. *552*. *562*.
8. *Leibnitzii quadratura*. 1674. Ms. [Gedr.: *HO* XX S. 388]: S. *41*.
Briefe:
9. Huygens an Wallis, 6. September 1658. [Gedr.: *HO* II S. 210–214]: S. *55*. *212*. *548*.
10. Huygens an Wallis, 31. Januar 1659. [Gedr.: *HO* II S. 329–331]: S. *55*. *212*. 508. *548*.
11. Huygens an Gallois. In: *Journal des Sçavans*, 12. Nov. 1668 S. 109–112 (Amsterdamer Ausgabe S. 437–444) [auch in: *HO* VI S. 272–276]: S. *462*. *509*.
s. a. SV. N. 47. 54,87. 72,12.

47. Huygens, Chr. u. Sluse, R.-F. de
1. *Excerpta ex epistolis ab illustrissimis viris, Slusio et Hugenio ... scriptis de famigerato Alhazeni problemate*. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S. 6119–6126: S. *499*.
2. *Continuatio excerptorum ex epistolis Slusianis et Hugenianis super Alhazeni problemate optico*. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S. 6140–6146: S. *499*.

48. Ibn-al-Haytham (Abū ʻAlī al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan, Alhazen), *Optica*: S. *499*.

49. *Inventaire succinct des ecrits qui se sont trouvez dans les coffres de Monsr. Descartes apres son decedz a Stocholm en Feb. 1650*. 1650 [1653/4]. Ms. [Gedr. u. a. in: *DO* X S. 5–14; lat. Kurzfassung, gedr. P. Borel, *Vitae Renati Cartesii compendium*. Paris 1656, S. 16–19]: S. *42*.

50. *Journal des Sçavans*
— 2. Juli 1668: S. *509*.
— 12. November 1668: S. *462*. *509*.
— 25. März 1675: S. *488*.

51. Juvenal, *Saturae*: S. *432*.

52. Kepler, J.
1. *Dissertatio cum Nuncio sidereo*. Prag 1610 [u. ö.]; Nachdr. München 1964; [auch in *KW* IV S. 281–311]: S. 492.
2. *Strena seu de nive sexangula*. Frankfurt/Main 1611 [u. ö.]; [auch in *KW* IV S. 259–280]: S. *485*.
3. *Tabulae Rudolphinae*. Ulm 1627 [1629]: S. 433. 500.

– La Hire, Ph. de, s. SV. N. 60,1.

53. Lalouvère (Lalovera), A. de, *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris, et in duabus adjectis appendicibus*. Toulouse 1660: S. *216*. *507*.

– La Roque, J. P. de, s. SV. N. 54,94.

54. Leibniz, G. W.
Schriften:
1. *Instrumentum panarithmicon – Lebendige Rechenbank*. 1670. Ms. [Gedr.: Mackensen, *Vorgeschichte*, S. 129–138]: S. *488*.
2. *De summa numerorum triangularium reciprocorum*. September 1672. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 1 S. 3–9]: S. *90*. *341*. *611*.
3. *Differentiae numerorum harmonicorum et reciprocorum triangularium*. September bis Oktober 1672. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 2 S. 10–16]: S. *90*. *341*. *611*.
4. *De progressionibus et de arithmetica infinitorum*. Herbst 1672 – Dezember 1672. [Gedr.: VII, 3 N. 6 S. 61–110]: S. *212*. *548*.
5. *Accessio ad arithmeticam infinitorum*. Ende 1672. Ms. [Gedr. u. a. in: III, 1 N. 2 S. 1–20]: S. *611*.
6. *De differentiis progressionis harmonicae*. Herbst 1672 – Anfang 1673. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 8 S. 112–128]: S. *58*.
7. *Observata philosophica in itinere Anglicano sub initium anni 1673*. März 1673. Ms. [Gedr. u. a. in: VIII, 1 N. 1 S. 3–19]: S. *516*.
8. *Zu Mercator, Logarithmotechnia, und zu Ricci, Exercitatio geometrica*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 3 S. 48–54]: S. *30*. *58*. *566*. *567*.
9. *De summa quadratorum in fractionibus*.

März – Mai 1673. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 15 S. 175–192]: S. 90.
10. *Mathematicae collectionis plagulae seiunctae*. Spätes Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 17 S. 332–360]: S. 167. 215. 551.
11. *Varia ad cyclometriam I*. Frühsommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 21 S. 377–390]: S. 297.
12. *Varia ad cyclometriam II*. Frühsommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 22 S. 391–408]: S. 70. 94. 105.
13. *De ductibus*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 26 S. 425–464]: S. 97 f. 297.
14. *Trigonometria inassignabilium*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 27 S. 465–500]: S. 510.
15. *Triangulum characteristicum ellipsis*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 28 S. 501 bis 517]: S. 508.
16. *Annotationes ad Honoratum Fabri et Wallisium. De hyperbola*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 34 S. 568–583]: S. 26. 55.
17. *De paraboloeidum et hyperboloeidum quadratura III*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 39 S. 617–655]: S. 25. 55. 510.
18. *Prima circuli quadratura*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 42 S. 725–753]: S. 53 f. 55.
19. *De quadratura circuli et hyperbolae et aliis curvis inde pendentibus*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 45 S. 762–769]: S. 105.
20. *De serie differentiae inter segmentum quadrantis et eius fulcrum*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 24 S. 271–281]: S. 110.
21. *De serie ad segmentum circuli*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 25 S. 282–299]: S. 110.
22. *De appropinquatione circuli per seriem I*. Ende 1673 – Mitte 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 26 S. 300–314]: S. 53. 61. 62. 110.
23. *Summa progressionis harmonicae I*. Ende 1673 – Mitte 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 27 S. 315–319]: S. 110.
24. *De triangulo harmonico*. Ende 1673 bis Mitte 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 30 S. 336–341]: S. 110. 340. 609.
25. *De usu geometriae pro seriebus infinitis*. Ende 1673 – Mitte 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 31 S. 342–345]: S. 53. 90. 110.
26. *Problema Alhazeni*. Anfang 1674 (?). Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 10 S. 120–123]: S. 499.
27. *Radicum extractio per seriem infinitam*. Sommer 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 32 S. 346 f.]. S. 597.
28. *De radicibus ex binomiis quantitatibus specimen universale*. Sommer 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 33 S. 348–352]: S. 597.
29. *De appropinquatione circuli per seriem II*. Sommer 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 34 S. 353–360]: S. 53. 64.
30. *Methodus generalissima solvendi problemata numerorum in integris*. 10. September 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 72 S. 513–519]: S. 77.
31. *Duo problemata numerica*. 10. (?) September 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 74 S. 525 bis 527]: S. 77.
32. *Summa fractionum a figuratis, per aequationes*. September 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 36 S. 365–369]: S. 90.
33. *Schediasma de superficiebus Conoeidum*. 3. Oktober 1674. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 6 S. 31 bis 42]: S. 92. 98.
34. *Methodo Tangentium flexus curvarum contrarii facile deprehenduntur*. September bis Oktober 1674. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 10 S. 109–111]: S. 75.
35. *De serierum summis et de quadraturis plagulae quindecim*. Oktober 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 38 S. 382–554]: S. 88. 90. 110. 279. 597.
36. *Reductio Circuli ad Figuram Rationalem aequivalentem*. [Gedr.: III, 1 N. 39_1 S. 142 bis 153]: N. 8*.
37. *Quadrature arithmétique*. Oktober 1674. Ms. [Gedr.: III, 1 N. 39_2 S. 154–169]: S. 75. 76. 77. 88. 91. 92–95. 98–100. 102 f. 105. 110. 432.
38. *Curva analytica sensibiliter non differens*

a quadratrice quadam. Anfang (?) Dezember 1674. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 13 S. 115f.]: S. *44*.

39. *Serierum summa per differentiarum momenta*. Oktober 1674 – Januar 1675. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 40 S. 575–597]: S. *279*.

40. *De bisectione laterum*. Juli 1675. Ms. [Gedr.: III, 1 N. 962 S. 640–650]: S. *501*.

41. *Zu Bombellis Algebra*. August 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 49 S. 659–670]: S. *502*.

42. *Metiri frustum coni recti*. 10. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 32 S. 239–242]: S. *108*.

43. *Triangulum Characteristicum*. 11. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 33 S. 243–247]: S. *108*.

44. *De resolutionibus aequationum cubicarum triradicalium. De radicibus realibus, quae interventu imaginariarum exprimuntur. Deque sexta quadam operatione arithmetica*. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 51 S. 678–700]: S. *501*.

45. *Analysis Tetragonistica ex Centrobarycis*. 25. und 26. (?) Oktober 1675. Ms. [Gedr. u. a.: VII, 5 N. 38 S. 263–269]: S. *279*. *281*.

46. *Marginalien in Gregorys Exercitationes geometricae*. Ende Januar 1673 – 1716 (?). Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 47 S. 332–340]: S. *105*. *418*.

47. *Pro summa progressionis harmonicae*. November 1675 – Feburar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 52 S. 700–703]: S. *220*. *557*.

48. *Curvarum dimensio evolutio expansio. Speciatim curvae Hyperbolae*. 8. Dezember 1675. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 52 S. 372–389]: S. *509*.

49. *Zu Prestets Elemens des mathematiques*. Dezember 1675–Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 67 S. 787–806]: S. *503*.

50. *Zu Descartes' Principia philosophiae*. Winter 1675/76 – Frühjahr 1676 (?). Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 15 S. 213–217]: S. *503*.

51. *Auszüge aus Schriften Boyles*. Dezember 1675 – 1. Hälfte (?) Februar 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 16 S. 218–241]: S. *485*.

52. *De triangulo harmonico*. Dezember 1675 bis Februar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 53 S. 704–714]: S. *340*. *609*.

53. *L'antiparabole de Bertet*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 64 S. 441 f.]: S. *226*. *563*.

54. *Über Spinozas Ethik*. Oktober 1675 bis Februar 1676 (?). Ms. [Gedr. u. a. in: VI, 3 N. 334 S. 384 f.]: S. *516*.

55. *Formula aequationis sexti gradus. Exemplum calculi lubrici*. 2. Februar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 76 S. 848–851]: S. *161*.

56. *De Tangentibus et speciatim figurarum simplicium*. Februar – Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 68 S. 449–480]: S. *153*. *178*. *378*.

57. *De tangentibus paraboloeidum*. Februar bis Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 69 S. 481 bis 495]: S. *178*.

58. *Modus quo a Pascalio explicantur hyperbolae oppositae*. 2. April 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 26 S. 186 f.]: S. *202*. *540*.

59. *Tentamen undetricesimum pertinens ad problema quod dicitur sex quadratorum*. April 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 99 S. 634]: S. *112*.

60. *Arithmetica infinitorum et interpolationum*. Ende April 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 57_2 S. 736–748]: S. *113*.

61. *Linea interminata*. April 1676. Ms. [Gedr. u. a. in: VI, 3 N. 65 S. 485–489]: S. *178*.

62. *Extensio interminata*. April 1676 (?). Ms. [Gedr. u. a. in: VI, 3 N. 66 S. 489 f.]: S. *164*. *167*. *178*.

63. *Quadratura Cycloidis. Figurae sinuum*. Ende April – Anfang Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 74 S. 510–514]: S. *178*.

64. *Theorema analyticum de maximis et minimis*. April – Juli 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 65 S. 802–804]: S. *153*. *164*. *167*. *178*.

65. *Problema: ellipsin in data ratione secare*. Ende Mai – Ende August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 33 S. 206 f.]: S. *458*.

66. *Quadratura circuli ex centro gravitatis descripti*. 4. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 82 S. 553–556]: S. *266*.

67. *De secandis parallelis*. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 34 S. 208–210]: N. 16*.

S. *151*. *182*.
68. *De Quadratrice*. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 86 S. 563–574]: S. *358*.
69. *Series convergentes seu substitutrices*. 26. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 60 S. 757 bis 767]: S. *295*. *298*. *317*. *352*.
70. *Nova methodus tangentium*. 26. Juni 1676. Ms. [Gedr. u. a.: VII, 5 N. 84 S. 559 bis 561]: S. *317*.
71. *De exponentibus et indicibus ad quadraturas applicatis. De Maximis et Minimis. Curva Hastaria. Methodus tangentium inversa*. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 88 S. 577–592]: S. *370*.
72. *Methodus tangentium inversa*. Juli 1676. Ms. [Gedr. u. a.: VII, 5 N. 90 S. 598–602]: S. *520*. *637*.
73. *Solutio problematis Cartesii inversarum*. Juli 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 91 S. 603–605]: S. *520*. *637*.
74. *Differentiae convergentium*. Ende Juni bis August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 94 S. 609 f.]: S. *295*.
75. *Series differentiarum generalis*. März bis August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 67 S. 809–813]: S. *410*. *462*.
76. *De circuli differentiis et descriptionibus*. März – August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 95 S. 611]: S. *462*.
77. *De summis serierum generalissima*. August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 68 S. 814 bis 823]: S. *410*. *462*.
78. *Tria axiomata primaria*. Sommer 1674 bis Herbst 1676 (?). Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 48 S. 427 f.]: S. *446*.
79. *Problemata hydrographica*. 2. Hälfte 1676. Ms. [Gedr. u. a. in: VIII, 1 N. 13 S. 106–127]: S. *491*.
80. *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus*. In: *Acta eruditorum*, Februar 1682, S. 41–46 [auch in: *LMG* V S. 118–122]: S. *110*. *453*.
81. *Compendium quadraturae arithmeticae*. Sommer 1690 – Frühjahr 1691. Ms. [Gedr. tlw. in: *LMG* V S. 99–113]: S. *638*. 640. *640*.
82. *Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium Tetragonismorum effectio per motum: Similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione*. In: *Acta eruditorum*, September 1693, S. 385–392 [auch in: *LMG* V S. 294–301]: S. *259*.
B r i e f e :
83. Leibniz an Oldenburg, 8. März 1673. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 9 S. 38–45; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 488–498]: S. *432*.
84. Leibniz an Oldenburg, 24. Mai 1673. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 20 S. 92–95; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 648–652]: S. *434*.
85. Leibniz an Oldenburg, 15. Juli 1674. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 30 S. 118–121; mit engl. Übers. in *OC* XI S. 392–397]: S. *432*.
86. Leibniz für [Mariotte?], Oktober 1674. [Gedr.: III, 1 N. 38 S. 136–141]: S. *88*.
87. Huygens an Leibniz, 6. November 1674. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 40 S. 169–171; *HO* VII S. 393–395]: S. *92*. *95*. *110*. *333*. *432*. *597*. *601*.
88. Leibniz für die Académie Royale des Sciences, Herbst 1674 – Anfang 1675. Ms. [Gedr.: Mackensen, *Vorgeschichte*, S. 169 bis 173]: S. *432*.
89. Leibniz für die Académie Royale des Sciences, Anfang 1675. Ms. [Gedr.: Mackensen, *Vorgeschichte*, S. 174–178]: S. *432*.
90. Leibniz an Herzog Johann Friedrich, 21. Januar 1675. [Gedr. u. a.: I, 1 N. 328 S. 491–493]: S. *432*.
91. Leibniz für La Roque, März 1675. In: *Journal des Sçavans*, Nr. 8 vom 25. März 1675, S. 93–96; engl. Übers. in: *Philosophical Transactions* vol. 10, 1675, S. 285–288. [Auch in: III, 1 N. 45 S. 181–201]: S. *488*.
92. Oldenburg an Leibniz, 22. April 1675. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 49_2 S. 230–245; mit engl. Übers. in *OC* XI S. 265–274]: S. *162*. *202*. *418*.
93. Oldenburg an Leibniz, 10. Oktober 1675. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 65 S. 286–302; mit engl.

Übers. in *OC* XI S. 517–521]: S. *161*.
94. Leibniz an [La Roque], Ende 1675. [Gedr.: III, 1 N. 72 S. 336–355]: S. *110*.
95. Leibniz an [Gallois?], Ende 1675. [Gedr.: III, 1 N. 73 S. 355–363]: S. *110*.
96. Bertet für Leibniz, ca 9. Februar 1676. [Gedr.: III, 1 N. 76 S. 366–370]: S. *226*. *320*. *563*.
97. Leibniz an Oldenburg, 12. Mai 1676. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 80_1 S. 374–378; engl. Übers. in *OC* XII S. 268–272]: S. *161* f. *464* f.
98. Oldenburg an Leibniz und Tschirnhaus, 5. August 1676. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 88_4 S. 517–533; engl. Übers. in *OC* XIII S. 1–17]: S. *73*. *458*. *464*. *467*. *520*.
99. Leibniz an Oldenburg, 27. August 1676. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 89 S. 558–586; *NC* II S. 57–64; engl. Übers. in *OC* XIII S. 40–51]: S. *423*. *427*. *440*. *446*. *464* f.
100. Leibniz an É. Périer, 30. August 1676. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 90 S. 587–591]: S. *144*. *202*. *540*.
101. Leibniz für Oldenburg und Collins, 18. bis 29. Oktober 1676. [Gedr.: III, 1 N. 96 S. 622–656]: [N. 49, 18]
102. Leibniz an Tschirnhaus, Ende Dezember 1679. [Gedr. u. a.: III, 2 N. 372 S. 921–941]: S. *508*.
103. Leibniz an Ramazzini, 24. Januar 1690. [Gedr.: III, 4 N. 230 S. 452 f.]: S. *492*.
104. Foucher an Leibniz, 31. Dezember 1691. [Gedr. u. a.: II, 2 N. 132 S. 473–476]: S. *453*.
105. Leibniz an Bodenhausen, 5. Oktober 1692. [Gedr.: III, 5 N. 108 S. 398–406]: S. *453*.

55. Leotaud, V., *Examen circuli quadraturae*. Lyon 1654: S. *506*.
56. *L i b r o de las tablas alfonsíes* : S. 433. 500.
57. Ludolph van Ceulen, *Vanden circkel. Daer in gheleert werdt te vinden de naeste proportie des circkels-diameter tegen synen omloop ... Item aller figueren-syden in den circkel beschreven ... Noch de tafelen sinuum, tangentium ende secantium ... Een laetsten van interest ...* Delft 1596; 2. Aufl. Leiden 1615. Hrsg. S. van der Eycke; lat. Fassung u. d. T. *De circulo et adscriptis liber. In quo plurimorum latera ... secundum algebricarum aequationum leges explicantur*. Hrsg. W. Snell. Leiden 1619: S. *32*. *43*. *131*. *172*. *348*. *439*.
58. Lukrez (T. Lucretius Carus), *De rerum natura*: S. *503*.
59. Maier, M., *De circulo physico quadrato*. Oppenheim 1616: S. 484.
60. Mariotte, E.
    1. *Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides*. Hrsg. Ph. de La Hire. Paris 1686 [u. ö.]: S. *485*.
    2. *Regles pour les jets d'eau*. Ms. [Gedr.: SV. N. 28, S. 508–516]: S. *485*.
61. Martini, M. *Novus atlas sinensis*. In: SV. N. 11, P. 6, 1655: S. *491*.
62. Meibom, M., *De proportionibus dialogus*. Kopenhagen 1655: S. *556*.
63. Mengoli, P.
    1. *Geometriae speciosae elementa*. Bologna 1659: S. 125.
    2. *Circolo*. Bologna 1672: N. 13*.
64. Mercator, N.
    1. *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos nova, accurata, et facilis ... cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae, et inventio summae logarithmorum ... Huic etiam jungitur Michaelis Angeli Riccii Exercitatio geometrica de maximis et minimis ...* London 1668 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1975: S. *30*. 31. 58. *438*. *510*. *566*. *596*. *616*. *641*.
    2. *Some Illustration of the Logarithmotechnia*. In: *Philosophical Transactions*, vol. 3, 1668, S. 759–764: S. *482*.
65. Mersenne, M.
    1. *Cogitata physico-mathematica, in quibus tam naturae quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur*. Paris 1644. [Darin mit separater Paginierung: *Tractatus de mensuris, ponderibus, atque nummis. De hydraulicis, et pneumaticis phaenomenis. Ars navigandi super et sub*

aquis, cum tractatu de magnete, et harmoniae theoreticae, practicae et instrumentalis; SV. N. 65,2; *Ballistica, et acontismologia*]: S. *498*.
2. *Tractatus mechanicus theoricus et practicus*. In: SV. N. 65,1: S. *320*. *507*. *588*.
— s. a. SV. N. 24,13. 24,14. 32.

66. Metius, A.
1. *Geometriae practicae pars I–IV*. Franeker 1625 [auch in N. 66,2]: S. *172*.
2. *Arithmeticae libri duo et geometriae lib. VI*. Leiden 1626. [Darin mit separater Paginierung: *Arithmeticae libri duo*. Leiden 1626. SV. N. 66,1; *Geometriae practicae pars V–VI*. Franeker 1625.] 2. Aufl. Leiden 1640.
3. *Manuale arithmeticae et geometriae practicae*. Amsterdam 1633: S. *172*.

67. Mydorge, Cl., *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis ... libri primus et secundus*. Paris 1631. *Libri quatuor priores*. Ebd. 1639 [u. ö.]: S. *559*.

68. Newton, I., Newton an Oldenburg (für Leibniz und Tschirnhaus), 23. Juni 1676 [Gedr. u. a. in: III, 1 N. 88_5 S. 533–554; mit engl. Übers. in *NC* II S. 20–41]: S. 44. *458*. *462*. *597*.

– Oldenburg, H., s. SV. N. 15. 20. 54,83. 54,84. 54,85. 54,92. 54,93. 54,97. 54,98. 54,99. 54,101. 68. 94,2. 100,13. 102.

69. Ozanam, J.
1. *La Geometrie pratique*. Paris 1684: S. *453*.
2. *Recreations Mathematiques Et Physiques: Qvi Contiennent Plusieurs Problêmes d'Arithmetique, de Geometrie, d'Optique, de Gnomonique, de Cosmographie, de Mecanique, de Pyrotechnie, et de Physique. Avec un Traité nouveau des Horloges Elementaires*. 2 Bde. Paris 1694 [u. ö.]: S. *455*.
3. *Cours de mathématique*. 5 Bde. Paris 1693 [u. ö.]: S. *453*.

70. Pappus von Alexandria, *Mathematica collectio*: S. *499*.

71. Pardies, I. G., *Elemens de geometrie*, Paris 1671 [u. ö.]: S. *213*. *548*. *623*.

72. Pascal, Bl.
1. *Essay pour les coniques*. Einblattdruck Paris 1640; [auch in: *PO* I S. 252–260]: S. 144. *200*. 202. *510*. *538*. 540.
2. *Generatio conisectionum*. 1648. Ms. [Gedr. u. a.: *PO* II S. 234–243]: S. *202*. *540*.
3. Erstes Rundschreiben zur Zykloide. o. O. 1658; [auch in: *PO* VII S. 343–347]: S. *506*.
4. Zweites Rundschreiben zur Zykloide. o. O. 1658; [auch in: *PO* VIII S. 17–19]: S. *506*.
5. *Histoire de la roulette, appellée autrement la trochoide, ou la cycloide*. o. O. 1658; [lat.:] *Historia trochoidis, sive cycloidis, gallice: la roulette*. o. O. 1658; [auch in: *PO* VIII S. 195–223]: S. 216. *506*. 552 f.
6. *Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie*. Paris 1658–59. Nachdr. London 1966. [Darin mit separater Paginierung: SV. N. 72,7; SV. N. 72,12; SV. N. 72,11; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur A. D. D. S*. Paris 1658; auch in: *PO* VIII S. 325–384 u. IX S. 1–149]: S. 507.
7. *Lettre de A. Dettonville a Monsieur de Carcavy*. Paris 1658. In: SV. N. 72,6. [Darin mit separater Paginierung: *Lettre de Monsieur de Carcavy à Monsieur Dettonville*; *Lettre de Monsieur Dettonville, à Monsieur de Carcavy*; SV. N. 72,8; *Propriétéz des sommes simples, triangulaires, et pyramidales*; SV. N. 72,9; *Petit traité des solides circulaires*; SV. N. 72,10.]
8. *Traité des trilignes rectangles, et de leurs onglets*. In: SV. N. 72,7. [Auch in: *PO* IX S. 3–45]: S. *204*. *541*.
9. *Traité des sinus du quart de cercle. Traité des arcs de cercle*. In: SV. N. 72,7. [Auch in: *PO* IX S. 60–104]: S. *102*. *645*.
10. *Traitté general de la roulette*. In: SV. N. 72,7. [Auch in: *PO* IX S. 116–133]: S. *216*. 507. *552*.
11. *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Sluze Chanoine de la cathedrale du Liège*. Paris 1658. In: SV. N. 72,6. [Auch in: *PO* IX

S. 135–149]: S. 508.
12. *Lettre de A. Dettonville à Monsieur Hugguens de Zulichem*. Paris 1659. In: SV. N. 72,6. [Auch in: *PO* IX S. 187–201]: S. 507 f.
13. *Traitez de l'Équilibre des Liqueurs, et de la Pesanteur de la Masse de l'air*. Hrsg. Fl. Périer. Paris 1663 [u. ö.] [Auch in: *PO* III S. 141–292]: S. *491*.
14. *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. Hrsg. G. Deprez. Paris 1665 [Marg.]. [Auch in: *PO* III S. 433–593, 341–67, 311–39]: S. *340*. *606*. *609*.

73. Pell, J., *Controversiae de vera circuli mensura anno 1644 exortae inter Christianum Severini, Longomontanum ... et Ioannem Pellium ... pars prima* [mehr nicht ersch.]. Amsterdam 1647: S. *70*. *94*.
– Périer, E., s. SV. N. 54,100.
– Périer, Fl., s. SV. N. 72,13.
74. *Philosophical Transactions*. London 1665ff.:
— 16./26. März 1667/1668: S. *509*.
— 23. April/3. Mai 1668: S. *332*. *438*. *510*.
— 13./23. Juli 1668: S. *509*.
— 17./27. August 1668: S. *281*. *482*.
— 15./25. Februar 1668/69: S. *462*. *509*.
— 25. März/4. April 1672: S. *552*.
— 20./30. Januar 1672/1673: S. *230*.
— 23. Juni/3. Juli 1673: S. *230*.
— 6./16. Oktober 1673: S. *499*.
— 17./27. November 1673: S. *225*. *499*. *509*.
— 26. April/6. Mai 1675: S. *488*.
75. Plutarch
1. *Quaestionum convivalium libri novem*: S. *495*.
2. *Vitae parallelae*: S. *495*.
3. *Moralia*: S. *497*.
76. Porta, G. B., *Magiae naturalis libri viginti*. Neapel 1589 [u. ö.]: S. *492*.
77. Prestet, J., *Elemens des mathematiques ou principes generaux de toutes les sciences qui ont les grandeurs pour objet: Contenant une methode courte et facile pour comparer ces grandeurs et pour decouvrir leurs rapports par le moyen des caracteres des nombres et des lettres de l'alphabeth. Dans laquelle les choses sont demontrées selon l'ordre geometrique et l'analyse rendue beaucoup plus facile et traittée plus à fond que l'on n'a fait jusqu'ici*. Paris 1675. [2. verb. u. verm. Ausg. u. d. T.:] *Nouveaux elemens des mathematiques*. Paris 1689 [u. ö]: S. *502*.
78. Proklos, *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*: S. *490*.
79. Regiomontanus, J., *Tabule directionum profectionumque*. Augsburg 1490 [u. ö.]: S. 500.
80. Rheticus, G. J., *Tabulae astronomicae*. Wittenberg 1542 [u. ö.]: S. 500.
81. Ricci, M., *Exercitatio geometrica de maximis et minimis*. Rom 1666. Nachdr. London 1668 zus. mit SV. N. 64,1 [Marg.]: S. *153*. *230*. 231 f. 239. 567. 570.
82. Roberval, G. P. de, *De Trochoide eiusque spatio*. Ms. [Gedr.: SV. N. 28 S. 246–278]: S. *506*.
83. Saint-Vincent, Gr. de, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Antwerpen 1647 [Marg.]: S. *12*. *212*. *220*. *323* f. *381*. *384*. *498*. 506. *548*. *556*. *591*. *632*. *641*.
84. Sarasa, A. A. de, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi*. Antwerpen 1649 [Marg.]: S. *12*.
85. Scaliger, J. J.
1. *Cyclometrica elementa duo*. Leiden 1594: S. *486*. *495*.
2. *Appendix ad Cyclometrica*. Leiden 1594: S. *486*.
3. *Elenchus et castigatio Anni Gregoriani*. Leiden 1595: S. *486*.
86. Schooten, Fr. v.
1. *In geometriam Renati Des Cartes commentarii*. In SV. N. 36,1 S. 162–294. 2. Aufl. in SV. N. 36,2 Tl I S. 143–344 [Marg.]: S. *143*. *147*. *201*. *226*. *230*. *504*. *506*. 509. *559*.
2. *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. Hrsg.

P. v. Schooten. In SV. N. 36,2 Tl II S. 341–420: S. *70*. *94*.
3. [Hrsg.] SV. N. 36,1.
– Schooten, P. v. [Hrsg.], s. SV. N. 86,2.
87. Sluse, R.-Fr. de
1. *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas ... exhibitae*. Lüttich 1659. 2. Aufl. ebd. 1668 [Marg.]: S. *153*. 230. 508. 570.
2. *An extract of a letter from the excellent Renatus-Franciscus Slusius ... to the Publisher ... concerning his short and easie method of drawing tangents to all geometrical curves*. In: *Philosophical Transactions* vol. 7, 1672/1673, S. 5143–5147; Nachtrag *a. a. O.* vol. 8, 1673, S. 6059: S. *230*.
88. Snell van Royen, W., *Cyclometricus, de circuli dimensione secundum logistarum abacos, et ad mechanicem accuratissima; atque omnium parabilissima*. Leiden 1621: S. *32*. 42. *172*. *439*.
89. Swammerdam, J., *Miraculum naturae sive uteri muliebris fabrica, notis in D. J. van Horne prodromum illustrata, et tabulis ... adumbrata*. Leiden 1672: S. *516*.
90. Tacitus, *Agricola*: S. *433*.
91. Tartaglia, N., *Quesiti et inventioni diverse*. Venedig 1546 [u. ö.]; Nachdr.: Brescia 1959: S. *501*.
92. Thévenot, M.
1. *Receuil des voyages*. Paris 1681. [Darin mit separater Paginierung: *Avis*. *Découverte de quelque pays et nations de l'Amerique septentrionale*. *Voyage d'un ambassadeur que le tzaar de Moscovie envoya par terre à la Chine l'année 1653*. SV. N. 92,2. *L'histoire naturelle de l'ephemere*. *Tables*. *L'histoire naturelle du cancellus ou Bernard l'Hermite*. *Le cabinet de Mr. Swammerdam*.]
2. *Discours sur l'art de navigation*. In SV. N. 92,1: S. *485*.
93. Torricelli, E., *Opera geometrica*. Florenz 1644; [auch in: *TO* I,1 S. 1–230 u. *TO* 2 S. 101 bis 232]: S. *212*. *491*. *505*. *548*.
94. Tschirnhaus, E. W. v.
1. Tschirnhaus an van Gent, 6. November 1675. Ms. [Faksimiledruck in: Tschirnhaus, *Briefe*, S. 10–13]: S. *220*. *557*.
2. Tschirnhaus an Oldenburg, 1. September 1676. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 92 S. 592–603]: S. *333*. *601*.
95. Ulugh Beigh, *Zīj-i Sultānī*: S. 433.
96. Vergil (P. Vergilius Maro)
1. *Eclogae sive Bucolica*: S. *509*.
2. *Aeneis*: S. *434*.
97. Viète, Fr.
1. *In artem analyticem isagoge seu algebra nova, seorsim excussa ab opere restitutae mathematicae analyseos, seu, Algebra nova*. Tours 1591. Nachdr. u. a. in: SV. N. 97,9 S. 1–12: S. *222*. *502*f. *508*.
2. *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*. Tours 1593. Nachdr. in: SV. N. 97,9 S. 347–435: S. *146*. *439*. *498*.
3. *Supplementum geometriae*. Tours 1593. Nachdr. in: SV. N. 97,9 S. 240–257: S. *146*.
4. *Munimen adversus nova cyclometrica seu* Αντιπελεκυς. Paris 1594. Nachdr. in: SV. N. 97,9 S. 436–446: S. *486*.
5. *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione*. Paris 1600. Nachdr. in: SV. N. 97,9 S. 163–228: S. *275*.
6. *Apollonius Gallus*. Paris 1600. Nachdr. in: SV. N. 97,9 S. 325–346: S. *146*.
7. *Ad angularium sectionum analyticen theoremata* κατολικωτερα. Hrsg. A. Anderson. Paris 1615. Nachdr. in: SV. N. 97,9 S. 287 bis 304: S. *219*. *304*. *350*. *675*.
8. *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo*. Hrsg. A. Anderson. Paris 1615. Nachdr. in: SV. N. 97,9 S. 82–161: S. *502*.
9. *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten*. Leiden 1646 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1970. [Darin u. a. SV. N. 97,1–8]
98. Vives, L., *De disciplinis libri XX*. Antwerpen 1531 [u. ö.] Teildruck u. d. T. *De disciplinis libri XII*. London 1612 [u. ö.] [Auch in: Vives,

Opera VI, S. 1–437 u. III, S. 68–297]: S. *428*. *485*.

99. Vossius, G. J., *De quatuor artibus popularibus de philologia, et scientiis mathematicis, cui operi subiungitur chronologia mathematicorum, libri tres*. Hrsg. v. Fr. Junius d. J. Amsterdam 1650. 2. Aufl. ebd. 1660: S. *434*.

100. Wallis, J.

Schriften:

1. *Elenchus geometriae Hobbianae*. Oxford 1655: S. *556*.

2. *Operum mathematicorum pars altera*. Oxford 1656. [Darin u. a. SV. N. 100,3]

3. *Arithmetica infinitorum*. Oxford 1656. In: SV. N. 100,2; [auch in: *WO* I S. 355–478; Marg.]: S. *25*. 58. *89*. *152*. *172*. *212*. *286*. *320*. *438*f. 507. *548*. *589*. *634*.

4. *Due correction for Mr Hobbes*. Oxford 1656: S. *556*.

5. *Hobbiani puncti dispunctio*. Oxford 1657: S. *556*.

6. *Operum mathematicorum pars prima*. Oxford 1657. [Darin u. a. SV. N. 100,7]

7. *Adversus Marci Meibomii de proportionibus dialogum tractatus elencticus*. Oxford 1657. In: SV. N. 100,6; [auch in *WO* I S. 229 bis 290; Marg.]: S. *556*.

8. *Tractatus duo, prior de cycloide ... Posterior ... de cissoide*. Oxford 1659; [auch in *WO* I S. 489–569; Marg.]: S. *214*. *216*. *224*f. *438*. *506–509*. *550*. *552*. *562*. *568*.

9. *Hobbius heauton-timorumenos*. Oxford 1662: S. *556*.

10. *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris: discoursed of in a letter ... to the Lord Viscount Brouncker ...* In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668, S. 753–759: S. *30*. *58*. *281*.

11. *Mechanica sive de motu tractatus geometricus*. 3 Tle. London 1670–71; [auch in *WO* I S. 570–1063; Marg.]: S. *25*. *55*. *212*. *216*. *385*. 508. *509*. *548*. *552*.

12. *Epitome binae methodi tangentium*. In: *Philosophical Transactions* vol. 7, 1672, S. 4010–4016: S. *551*.

Briefe:

13. Wallis an Oldenburg, 14. Oktober 1673. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S. 6146–6149. [Mit engl. Übers. auch in: *OC* X S. 276–283]: S. *225*. *509*. *562*.

s. a. SV. N. 46,9. 46,10.

101. Witt, J. de, *Elementa curvarum linearum*. Hrsg. Fr. v. Schooten. In SV. N. 36,2 Tl II S. 153–340: S. *145*. *147*.

102. Wren, Chr., Wren an Oldenburg, ca 18. Oktober 1673. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S. 6150. [Auch in: *OC* X S. 292]: S. *225*. *509*. *562*.

SACHVERZEICHNIS

Die Grundsprache des vorliegenden Sachverzeichnisses ist deutsch. Leibniz' termini technici erscheinen in Kursivschrift. Zu Leibniz' Terminologie s. a. die Einleitung, insbesondere S. XXX f. Die Sachworte sind alphabetisch geordnet, die Untergliederung in Einzelfällen auch systematisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur besseren Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern versehen sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einem bestimmten Sachwort zuzuordnen ist. Kursiv gedruckte Seitenangaben beziehen sich auf Herausgebertext.

actio mentis: S. 213. 549.
aequatio
  analytica: S. 222.
  certae dimensionis: S. 175 f.
  certi gradus: S. 146. 175. 222. 349. 437. 639. 675 f.
  collatitia: S. 501.
  communis formae: S. 349.
  composita ex terminis effabilibus infinitis: S. 165.
  cubica: S. 175. 461. 500–502.
  determinati gradus: S. 176.
  exacta: S. 601.
  factitia: S. 501.
  finita: S. 332.
    ineffabilis: S. 166.
    ordinaria: S. 348. 673.
  generalis: S. 148. 166. 228. 232 f. 349. 500. 569. 674.
  gradus infinitesimi: S. 436.
  gradus quarti: S. 436.
  gradus quinti: S. 175. 435.
  gradus sexti: S. 175. 435.
  gradus tertii: S. 436.
  identica: S. 372.
  infinita: S. 166. 331 f. 373. 617.
  mira: S. 371.
  novi generis: S. 504.
  ordinaria certae dimensionis: S. 166.
  ordinaria seu finito dimensionum effabilium numero constans: S. 152.
  perfecta: S. 159.
  plana: S. 663.
  pura: S. 11. 373.
  quadratica: S. 500.
  quadrato-quadratica: S. 175. 501 f.
  rationalis: S. 372.
  similis: S. 373.
  simplex: S. 238.
  specialis: S. 349. 674.
  superior: S. 435.
  surdesolida: S. 175.
  transcendens: S. 331. 354.
  vera: S. 663.
aestimatio incerti: S. 341.
Afrika: S. 490.
Aix-en-Provence (Aquae Sextiae): S. 434.
Akademien
  Académie Royale des Sciences (Paris): S. *432*. 509. *509*.
  Royal Society (London): S. 332. *432*. 438. 509 f. *509*. 566. 596. 616.
Akustik: S. 493.
alchymista: S. 489.
Algebra: S. 149. 166. 219 f. 260. 275. 296. 349. 432. 435 f. 437. 455. 461. 485. 487. 491. 499–505.
  Methode zur Gleichungslösung: S. 275.
  s. a. *aequatio*. *algebra*. Gleichung. *radix*. Wurzelziehen.
algebra: S. 220. 222. 432. 435 f. 437. 485. 491. 499 bis 502. 505.
Alkmaar: S. 492.
amor dei: S. 495.
Amsterdam: S. *220*.
analogia (Proportionalität): S. 144 f. 244. 562 f.
  s. a. Proportionale.

analysis: S. 296 f. 430. 432. 435 f. 437. 486. 502. 515 bis 517. 637.
constructionis: S. 297.
ordinaria generalis: S. 166.
pura: S. 567.
speciosa: S. 502.
symbolica: S. 149. 502 f.
transcendens: S. 166. 566.
universalis: S. 516.
analysta, analyticus: S. 31. 176. 235. 350. 570. 676.
anima: S. 213. 494. 496. 515.
animus: S. 64. 137. 188. 351. 428. 430. 436. 486 bis 488. 495 f. 498. 501 f. 504. 517. 521. 527. 658. 663.
antiparabola s. Hyperbel, höhere, quadratische.
antlia: S. 490 f.
appropinquatio: S. 21. 44. 48 f. 68. 73. 120. 331 f. 376. 439. 600 f.
arithmetica: S. 60. 64.
geometrica: S. 59 f.
Gregorii: S. 73.
rationalis: S. 600.
approximation: S. 89.
Araber: S. 490. 499 f.
Geometrie: S. 490. 499.
Herrschaft: S. 499.
über Afrika und Asien: S. 490.
Aragon: S. 499.
arbelus: S. 22.
architectus: S. 664.
Architektur: S. 429. 490.
arithmetica infinitorum: S. 35. 58. 85. 438. 507.
arithmeticus: S. 340.
Arithmetik: S. 89. 486.
Arkustangens: S. 33–37. 282–285. *283*.
Differentiation: S. 284 f.
Quadratur: S. 34. 37–40. 282. *282*.
ars: S. 175. 369. 428 f. 435. 437 f. 485. 489 f. 502. 517.
analyseos universalis: S. 516.
Archimedea: S. 499. 505.
difficilia eruendi: S. 436.
excogitandi methodos pure particulares, et discernendi a generalibus: S. 167.
geometrica: S. 149.
graphica: S. 490.
humana: S. 497.
inveniendi: S. 435. 495. 505.
liberalis: S. 433.
manuaria: S. 433.
mathematica: S. 432. 496.
medica: S. 489.
naturae: S. 503.
projiciendi: S. 493.
scenographica: S. 490.
sciendi: S. 487.
Scipionis: S. 501.
subsidiaria: S. 438.
tentandi: S. 487.
velificatoria: S. 491.
vitandi paralogismos: S. 436.
artificium: S. 31. 197. 278. 304. 433. 491. 566. 666.
de locis: S. 491.
divinum: S. 495.
inveniendi: S. 435.
mechanicum: S. 488.
motus aequabilis: S. 488.
non vulgare: S. 489.
tractandarum fractionum: S. 31.
Asien: S. 490.
astronomicus: S. 664.
Astronomie: S. 428. 435. 490. 517.
Ephemeriden: S. 491.
Mondfinsternis: S. 491.
Planetenhypothesen: S. 490.
s. a. *tabulae*. Tafelwerke.
autor rerum: S. 495 f.
axioma: S. 430 f.
axis: S. 145 (Def.). 202 (Def.). 535 (Def.). 539 (Def.).
aequilibrii: S. 39. 68. 399.
conjugatus: S. 203 (Def.). 205. 208. 220. 225. 227. 229. 234. 239. 241. 246. 250. 535 (Def.). 540 (Def.). 545. 555. 557. 566. 571. 573. 580 f.
ordinatarum: S. 140. 228. 236. 565.

Ballistik: S. 491.
barbari, barbaries: S. 431. 490.
Belgien: S. 506.
Bewegung: S. 175. 211. 222. 432. 492–495. 508. 517.

Beweise: S. 495.
Gesetze: S. 429.
gleichförmig beschleunigte: S. 492.
gleichförmige: S. 170. 488. 492. 561.
kontinuierliche: S. 145. 149 f. 152. 213. 221 f. 229.
ungleichförmige: S. 637.
zusammengesetzte: S. 490. 498.
s. a. Wurfbewegung.
Bienenwaben: S. 485. *485.*
Binom: S. 274. 671.
bisectio: S. 172. 309. 313. 315 f. 623–625.
anguli: S. 173. 176. 313. 315. 348. 350. 512. 662. 675.
arcus: S. 60.
rationis: S. 556.
Bogenteilung s. Winkel, Teilung.
Bologna: S. 500. 502.
brocardica: S. 431.
Bruchfestigkeit: S. 505.

calculus
aleae: S. 515.
analyticus: S. 153. 331. 499. 600 f.
exactus: S. 557 f (Def.).
astronomicorum: S. 664.
ejus quod interest in se replicati: S. 341.
exactus: S. 221 f.
finitus: S. 172.
infinitus: S. 172.
novus: S. 504.
polygonorum: S. 130.
sinuum: S. 42.
transcendens: S. 222.
trigonometricus: S. 312.
canon
mathematicus: S. 429. 658.
sinuum: S. 22. 373. 493.
subtensarum: S. 42.
Cartesianer: S. 147. 503.
Castilien: S. *499.*
catalogus curvarum: S. 153. 227. 563.
celeritas: S. 61.
centrobaryca: S. 100. 103. 487. 498. 505.
centrum
assignabile: S. 368. 618.
gravitatis s. Schwerpunkt.
percussionis s. Stoßmittelpunkt.
character: S. 41 f. 104. 174. 487. 502. 517.
verus: S. 41.
characteristica: S. 228. 515 f.
Chemie: S. 433.
China, Chinesen
Christen: S. 491.
Jesuiten: S. 491.
Malerei: S. 490.
chymicus, chymista: S. 436. 484.
circulus generator: S. 214–216. 390. 508. 549. 551 bis 553. 637.
cochlea cylindrica: S. 490.
conoeides, conoides: S. 438. 498. 507 f.
constructio
exacta: S. 147. 221.
geometrica: S. 48. 64. 147. 219. 435. 566. 600.
linearis: S. 667.
logarithmi, logarithmorum: S. 31. 388. 634. 636.
mechanica: S. 147.
physica: S. 147.
problematum: S. 41. 48. 495.
supposita: S. 150.
tabulae: S. 113. 117 f.
contemplatio
divina: S. 496.
metaphysica: S. 496. 503.
moralis: S. 503.
corpus cylindricum: S. 383–386.
crementum s. Differenzen, Zuwächse.
curva
aequabilis: S. 146.
aequipollens: S. 567.
analytica: S. 144 (Def.). 152 f (Def.). 154. 217. 221 f (Def.). 224. 229. 254. 373. 438. 508. 557 (Def.). 558. 562. 566 f. 637.
aequabilis: S. 145 f (Def.). 147.
ordinaria: S. 152 (Def.). 153.
rationalis: S. 228 (Def.). 320. 373. 438. 565 (Def.). 566 f.
simplex: S. 147 f (Def.). 153 (Def.). 221 (Def.). 224 (Def.). 225–232. 234. 238 f. 247 f. 253. 317. 561 (Def.). 563 f. 566–570. 572–574. 576 f. 585.

transcendens: S. 222 (Def.).
antiparabolica: S. 248. 252. 580.
Cartesiana: S. 504.
concava: S. 191. 529.
convexa: S. 191. 529.
geometrica: S. 146 f. 152 (Def.). 153. 217. 221 f (Def.). 229.
hyperbolica: S. 557. 641.
imaginaria: S. 224. 560.
logarithmica: S. 152. 219. 380. 386. 388 f. 394 bis 396. 621. 623–626. 628 (Def.). 629. 631 bis 636. 639 f.
materialis: S. 222.
rationalis: S. 228 f. 438. 566 f. 641.
realis: S. 152 (Def.). 153. 229.
regularis: S. 144 (Def.). 152 (Def.).
resectarum: S. 13.
segmentorum: S. 156.
semi-analytica: S. 222 (Def.).
semicycloeides: S. 397.
semi-geometrica: S. 222 (Def.).
sinuum: S. 398.
transcendens: S. 152 (Def.). 566.
cyclometria: S. 31.
cylinder: S. 34 f. 37. 39. 68. 106. 170. 319. 386. 399. 401. 486. 548.
cylindricum hyperbolicum: S. 386.

decrementum s. Differenzen, Abnahmen.
defectus: S. 130. 145. 188. 289. 296 f. 331. 429. 496. 514. 521. 527. 667.
Definition: S. 228 f. 431.
abscissa: S. 65 f. 145. 153. 203. 540.
altitudo: S. 65. 204. 541.
applicata: S. 65. 145. 202. 539.
axis: S. 145. 202. 535. 539.
conjugatus: S. 203. 535. 540.
basis: S. 65. 204. 541.
calculus analyticus exactus: S. 557 f.
constructio
geometrica: S. 147.
mechanica: S. 147.
physica: S. 147.
curva
analytica: S. 144. 152 f. 221 f. 557.
aequabilis: S. 145 f.
ordinaria: S. 152.
rationalis: S. 228. 565.
simplex: S. 147 f. 153. 221. 224. 561.
transcendens: S. 222.
geometrica: S. 152. 221 f.
logarithmica: S. 628.
realis: S. 152.
regularis: S. 144. 152.
semi-analytica: S. 222.
semi-geometrica: S. 222.
transcendens: S. 152.
dignitas: S. 238. 567.
directrix: S. 145. 153. 202. 539.
conjugata: S. 153. 203. 540.
figura
aequivalens: S. 92.
angulorum: S. 202. 539.
plana: S. 144.
analytica: S. 144.
rationalis: S. 92.
resectarum: S. 197. 535.
sectorum: S. 201 f. 539.
segmentorum: S. 53. 94 f. 152. 202. 539.
syntomos: S. 92.
fulcrum: S. 21 f.
hyperboloeis: S. 153. 221. 563.
infinitum: S. 213. 549.
interminatum: S. 213. 549.
latus rectum: S. 221.
linea segmentorum: S. 152.
numerus homogeneus: S. 10 f.
ordinata: S. 144–146. 153. 202. 539.
paraboloeis: S. 153. 221. 563.
parameter: S. 221. 559.
punctum
flexus contrarii: S. 191. 529.
reversionis: S. 191 f. 529.
quadratura
empirica: S. 172.
particularis: S. 165.
plena: S. 171.
rationalis: S. 172.
universalis: S. 165.
quadrilineum partiale: S. 192. 530.

rectangulum
circumscriptum: S. 204. 541.
complementale: S. 192. 530.
differentiale: S. 192.
elementare: S. 192. 530.
relatio
analytica: S. 144.
geometrica: S. 145.
resecta: S. 5. 197 f. 535.
sector: S. 201. 538.
segmentum: S. 152. 201. 538.
series convergens: S. 351.
summa rectarum ad quendam axem applicatarum: S. 204 f. 542.
trilineum
complementale: S. 204. 541.
orthogonium: S. 204. 541.
vertex
curvae: S. 145. 204. 542.
trilinei: S. 204. 542.
zona: S. 202. 539.
Delphi: S. 484. 497.
demonstratio
apagogica: S. 137. 143. 188. 521. 527.
certa: S. 333. 601.
conversa: S. 646.
directa: S. 200. 537. 585.
irrefragabilis: S. 491.
liquidissima: S. 634.
optica: S. 492.
per regressum: S. 640.
severa: S. 249. 527.
universalis: S. 25.
descensus gravium: S. 492.
Deutschland: S. 433.
Dialektik: S. 497.
differentia
assignabilis: S. 37.
infinite parva: S. 15. 256. 388 f. 399 f. 643. 646. 648–651. 653. 655.
Differentialrechnung
Reihe: S. 360.
Differenz, Differenzen: S. 136 f. *134*. 145. 151. 187 f. 242. 521. 526 f. 578.
Abnahmen: S. 61.
gleicher Größen: S. 200. 537.
kommensurabler Größen: S. 13.
unendlich kleine: S. 15. 256. 388 f. 399 f. 527. 542. 643. 645 f. 649–651. 653. 655.
von Abszissen bzw. Ordinaten: S. 9 f. 14 f. 17. 23 f. 38. 139 f. 145. 285. 375. 388 f. 399 f. 542. 628 f. 634–636. 643–646. 648–653. 655.
von Folgengliedern: S. 116. 122. 125. 129. 134 bis 136. 151. 184–186. 323. 333. 416. 524 f. 590 bis 592. 602. 609. 622. 657 f.
Zuwächse: S. 61.
Differenzenfolge: S. 134–137. 151. 184–186. 524 f.
Summe: S. 134 f. 151. 184–186. 524 f.
Digesten: S. 430.
dignitas: S. 153 f. 221. 230 f. 233. 238 (Def.). 239 bis 242. 246 f. 250–254. 319. 567 (Def.). 568–570. 573–576. 578–585. 599. 637. 660. 668.
dimensio (Dimension): S. 10. 15. 25. 29. 85. 102. 152. 166. 175 f. 501. 560 f. 597.
altior solida: S. 560.
imaginaria: S. 223 f.
quarta: S. 484.
sursolida: S. 484.
dimensio (Messung): S. 31. 55. 60 f. 68. 96–98. 146. 152. 200. 205. 224. 320. 385. 389. 486. 494. 498 f. 507 f. 510. 537. 542. 552 f. 589. 636.
dimension (Messung): S. 88.
dioristice: S. 48.
directrix: S. 145 (Def.). 153 (Def.). 202 (Def.). 203 f. 236. 539 (Def.). 540–542. 558.
conjugata: S. 153 (Def.). 203 (Def.). 204. 540 (Def.). 541.
disciplina
mathematica: S. 434.
militaris: S. 434.
discursus mentis: S. 586.
Division
fortgesetzte: S. 58. *58*. 596–598.
von Polynomen: S. 273–276.
doctrina: S. 332. 487. 563.
ductuum: S. 506.
sphaerica: S. 490.
ungularum: S. 506.

Dreieck, Dreiecke
ähnliche: S. 4. 6. 27. 37. 92. 106. 132. 179–181. 218. 234 f. 240. 400. 522. 555. 571. 591 f. 644. 646. 650. 653 f.
arithmetisches: S. 340 f. 590. 606 f. 609 f.
Fläche: S. 3 f. 132 f. 157 f. 178–184. 506. 521–523.
harmonisches: S. 339–341. 590. 606–611.
rechtwinklige: S. 4. 92. 132. 170. 179–181. 218. 234 f. 264 f. 294. 295–297. 303. 400. 446. 522. 555. 571. 590–592. 644. 646. 650. 653 f. 658 f. 662 f.
Schwerpunkt: S. 456.
Dreieckslehre: N. 25*. 27*. S. 68. 171 f. 175. 347 f. 351. 373. 429. 437. 446 f. 486. 490. 493. 642. 657 bis 664.
Dreiecksungleichung: S. *134*. 135 f. 151. 187. 526.
ductus: S. 64. 68. 97 f. 298. 497. 501. 506. 516.
linearum: S. 59. 172 f. 223. 618.
potestatum: S. 11. 30.
duplicatio cubi: S. 484. 497.

Ebene, schiefe: S. 492.
elater, elaterium: S. 488. 493.
Elemente (vier): S. 484. 493.
Ellipse: S. 147. 170. 228. 294. 565. 618 f.
Fadenkonstruktion: S. 147.
Gleichung: S. 365–368.
Parameter: S. 365.
Ordinate: S. 228. 565.
Quadratur: S. 57. 498. 362–368. 498. 618–621. 674. 676.
arithmetische: N. 51*.
Sektor: S. 366–368. 618–621.
Rektifikation: S. 507.
Teilung: S. *458*.
Ellipsoid s. Sphäroid.
Engel: S. 637.
Engländer, England: S. 224. 332. 434. 507. 509. 562. *562*.
Ephemeriden s. Astronomie.
error
assignabilis: S. 196. 331. 533. 542. 585. 592. 658.
nullo modo notabilis: S. 461.
quantumlibet parvus: S. 347. 600.
Europa: S. 500.
excessus: S. 44. 126. 137. 145. 188. 207 f. 348. 472. 521. 527. 545. 598. 671.
experimentum: S. 428. 435 f. 488 f. 493–496. 516. 518. 586.
fundamentale: S. 493.
exponens imaginaria: S. 86.
expressio
analytica: S. 174. 200. 353. 537. 561. 566 f. 600. 628.
arithmetica: S. 600.
finita: S. 348 f.
Ludolphi: S. 174.
rationalis: S. 222. 567.
transcendens: S. 348.

facultas
cogitandi: S. 494. 517.
intellectus: S. 494.
inveniendi: S. 494. 517.
judicandi: S. 494. 517.
Fassmessung: S. 108. 486.
Feder: 488. 493.
Feldmessung: S. 429. 484. 486. 490 f.
Festungsbau: S. 484.
Figur, geometrische: S. 411–415. 432. 454–457. 486 f. 495.
Beweise: S. 495. s. a. Dreieck. *figura*. Körper, geometrischer.
figura
aequipollens: S. 228. 510 f. 641.
aequivalens: S. 92 (Def.). 94. 511.
analytica: S. 64. 253.
completa: S. 253. 256. 584 f.
simplex: S. 147. 234. 236. 239–242. 245 f. 253. 320. 570. 572–575. 577. 584. 586. 588 f.
rationalis: S. 256. 589.
arcuum: S. 401. 551.
bicurvilinea: S. 208. 544.
completa: S. 585.
continua: S. 37.
curvilinea: S. 181. 195. 209. 521–523. 532. 545 f. 575. 586.
geometrica: S. 52. 401.
homogenea: S. 104.
infinita: S. 209. 255. 388. 546.

logarithmica: S. 35 f. 281. 386. 388–390. 401. 634. 636 f. 645. 654.
longitudine infinita, longitudinis infinitae: S. 209. 213. 545 f. 548. 585. 589.
plana: S. 68. 144 (Def.). 169.
analytica: S. 144 (Def.).
rationalis: S. 92 (Def.). 94 f. 200. 228. 510 f. 537. 565 f. 641.
rationum: S. 220. 556 f.
rectilinea: S. 68. 169. 198. 535. 545. 574 f. 577.
resectarum: S. 13–17. 21 f. 31. 33. 197 (Def.). 201. 239 f. 242 f. 245. 535 (Def.). 538 f. 555. 570–572. 620.
Gleichung: S. 31.
sectorum: S. 201 f (Def.). 202. 539 (Def.).
segmentorum: S. 24. 53 (Def.). 57 f. 94 f (Def.). 100. 152 (Def.). 155. 201. 202 (Def.). 205. 207 bis 209. 215. 234. *285*. 324. 328. 539 (Def.). 542–546. 592 f. 595. 620.
sinuum: S. 389 f. 399. 401. 636 f. 645. 654.
versorum: S. 215. 645. 650.
σύγ(γ)νωτος: S. 31.
symmetra: S. 31. 99.
syntomos: S. 92 (Def.).
tangentium: S. 37.
transcendens: S. 36 f. 285.
s. a. Kreis, *figura angulorum*.
figure irrationelle: S. 89.
flexus: S. 96 f. 99. 139. 153. 191 f. 529.
Folge
abnehmende: S. 25. 28. 328 f. 344. 346. 391. 397. 439. 596. 598. 607. 622. 639 f. 657. 666.
alternierende Nullfolge: S. 344–346.
Differenzen: S. 344 f.
Bildungsgesetz: S. 174. 595. 600.
Differenzen: S. 524 f. 591.
Differenzenschema: S. *410*. 416.
endliche: S. 8.
konvergente: S. 51 f. 128. 172 f. 298. 351–353 (Def.). 439. 509.
rekursive: S. *317*. 352.
Summierungsmethode: S. 416. 435.
unendliche: S. 8. 21. 67. 73 f. 111. 328–331. 333. 336 f. 340 f. 347. 354 f. 373. 438 f. 566. 595 f. 600. 604. 606. 609. 611. 618. 621. 641. 663.
ungeordnete: S. 134.
von Ordinaten: S. 89.
von Polygonen: S. 89. 354.
zunehmende: S. 439. 622.
Folgen, spezielle
arithmetische: S. 8–12. 15. 22 f. 25. 59. 90. 114. 116 f. 243. 269. 333. 340. 371. 602. 607. 609. 614. 622. 625.
figurierte Zahlen: S. 90. 277 f. 607.
Dreieckszahlen: S. 75. 90. 114. 116 f. 277. 337. 607.
Pyramidalzahlen: S. 75. 90. 114. 116 f. 277. 607.
Triangulo-Triangularzahlen: S. 90. 277.
Triangulo-Pyramidalzahlen: S. 90. 277.
ganze Zahlen: S. 438.
geometrische: N. 11*. S. 27. 30. 39. 48–50. 61. 67. 75. 243. 268. 283. 322–324. 326. 330 f. 341. 344. 372. 511. 590 f. 593 f. 596. 600. 602. 609. 610. 622. 625. 669. 672.
Summe: S. 322–324. 511.
harmonische: S. 27. 79. 90. 125. 268 f. 278 f. 331. 333 f. 337. 339 f. *410*. 416. 602. 606 f. 616. 633. 666.
Differenzenschema: S. *410*.
irrationale Zahlen: S. 89.
natürliche Zahlen: S. 8. 25. 75. 90. 277.
rationale Zahlen: S. 14. 21. 73. 89. 128 f. 438. 510. 566. 596 f. 641.
$a_n = \frac{1}{n^2-1}$: S. 76. 90. 341 f. 416.
$a_n = \frac{1}{4n^2-1}$: S. 336 f.
$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1}$: S. 341 f.
$a_n = \frac{1}{16n^2-16n+3}$: S. 334–336. 342.
Polynome:
$a_n = n^2 - 1$: S. 75.
Potenzen. S. 61.
Kubikzahlen: S. 25.
Quadratzahlen: S. 25. 75. 409. 614.
Primzahlen: S. 287.
Produkte aus harmonischen und figurierten Zahlen: S.278 f.
Summe: S. 278 f.
reziproke figurierte Zahlen: S. 339. 607.

Dreieckszahlen: S. 75. 90. 337–342. 607–611.
Pyramidalzahlen: S. 75. 339. 341. 607 f. 610.
Triangulo-Triangularzahlen: S. 339. 607.
Triangulo-Pyramidalzahlen: S. 339. 607.
Pyramido-Pyramidalzahlen: S. 339. 607.
Triangulo-Triangulo-Triangularzahlen: S. 339. 607.
reziproke Quadratzahlen: S. 416.
Differenzen: S. 416.
ungerade Zahlen: S. 75.
forma
aeterna: S. 495.
sejuncta: S. 495.
separata: S. 494.
formula
analytica: S. 336. 338. 353–355.
finita: S. 674.
non analytica: S. 354.
non transcendens: S. 355.
transcendens: S. 354 f.
fractio, *fractiones*
a quadratis duplorum imparium unitate minutis: S. 334. 603.
a quadrato impariter parium primi scilicet binarii: S. 334.
composita: S. 597.
decimalis: S. 32. 60 f. 311. 480.
decrescens: S. 597.
numeratorem habentes unitatem, nominatores vero arithmeticae progressionis: S. 333.
progressionis geometricae triplae: S. 610.
pura: S. 60.
pyramidales: S. 610.
quadrati duplorum imparium primi: S. 603.
sub unitate imparium: S. 174.
triangularis: S. 172.
fraction
triangulaire: S. 90.
pyramido-pyramidale: S. 90.
triangulo-triangulaire: S. 90.
Frankreich, Franzosen: S. 506 f.
frictio: S. 435.
fulcrum, *semifulcrum*: S. 21 f. (Def.). 27 f. 62. 70 f. 459.
fundamentum
aequationis: S. 52.
seriei: S. 595.

Ganges: S. 433.
geodaetus: S. 664.
Geographie: S. 428. 517.
geometra: S. 12. 30 f. 55. 95. 143. 146. 149. 166. 170. 196 f. 200. 207. 212 f. 229 f. 323. 330. 351. 355. 385. 399 f. 428 f. 432. 434–436. 437–439. 484 bis 487. 489–494. 496. 499. 502. 506 f. 510 f 517. 538. 544. 548 f. 562. 567 f. 570. 589. 591. 600. 609. 616. 621. 634. 637. 655. 657.
geometria: N. 39*. 40*. S. 68. 143. 147. 149. 169 f. 196. 200. 203. 213. 219. 222. 226. 321. 437 f. *483*. 484–487. 489–491. 493–500. 502. 504–506. 514. 515. 517. 533. 537. 541. 555. 561. 589. 600.
altior: S. 22. 497.
apum: S. *485*.
Archimedea: S. 436.
Cavaleriana: S. 498. 586.
communis: S. 26. 157. 512.
indivisibilium: S. 143. 498. 505. 510. 549.
interior: S. 497 f.
mechanica: S. 57.
non-perfunctoria: S. 493.
operatrix: S. 490.
plana: S. 22.
practica: S. 59. 496.
profundior: S. 436. 493.
pura: S. 149. 494. 515.
rectilinea, *rectilinearis*: S. 169. 497.
sublimior: S. 498.
transcendens: S. 157. 673.
Geometrie: N. 7*. 39*. 40*. 49*.
Anwendung auf Naturforschung: S. 485. 495. 499.
apollonische: S. 88.
archimedische: S. 88. 436. 498.
Beweise: S. 484. 498.
cartesische: S. 11. 88. 146 f. 153. *153*. 175. 197. 219–223. 435. 437. 494. 498. 502–505. 508 f.
cavalierische: S. 498. 586.
s. a. Indivisiblengeometrie. Indivisiblenmethode.

Defizite: S. 429.
ebene: S. 22.
elementare: S. 169.
Geschichte: S. 497–510.
höhere: S. 22. 88. 497.
Neuerungen: S. 508–514.
Nutzen: S. 428–430. 483–497. 514–518.
sphärische: S. 490.
s. a. Indivisiblengeometrie.
Gerade: S. *246*. 566. *573*. 577.
Gleichung: S. 227. 564 f.
Gleichung: S. 88. *108*. 221 f. 372 f. 487.
algebraische: S. 146. 152. 166. 175 f. 222. 348 f. 437. 639. 673. 675 f.
höheren Grades: S. 175. 349. 435 f. 501 f.
kubische: S. 175. 260. 349. 461. 500–502.
Cardanische Formel: S. 296. 501.
Lösungsmethode: S. 500 f.
Lösungsmethode: S. 275.
quadratische: S. 349. 455.
Lösungsmethode: S. 500.
Substitution: S. 269–271.
transzendente: S. 165 f. 331 f. 354. 373. 436. 617.
vierten Grades: S. 501 f.
Lösungsmethode: S. 501 f.
s. a. *aequatio*. Algebra. *radix*. Wurzelziehen.
Graphik (*ars (sceno)graphica, graphice*): S. 429. 490.
Griechen
Geometrie: S. 90. 497 f.
Kunst: S. 490.
Größe
beliebig kleine: S. 138. 140. 331.
endliche: S. *8*. 212. 242 f. 249–251. 253. 255 f. 330. 548. 579 f. 582 f. 589. 600.
irrationale: S. 499. 597.
negative: S. 233. 236. 501. 580. 628 f.
transzendente: S. 348.
unendlich kleine: S. 8. 251–253. 255. 521. 579 f. 586.
unendliche: S. 213. 243. 251 f. 376. 549. 578. 580. 582. 586. 589. 610.
s. a. *magnitudo*. *numerus*. *quantitas*. Zahl.
Großbritannien: S. 434.
habitus mentis: S. 496.
harmonia pulcherrima: S. 401.
helix: S. 146. 170 f.
Holland: S. 434.
Homogenität: S. 221. 562. 627.
horologium
oscillatorium: S. 508.
solare: S. 484.
Hydraulik: S. 435. 485. *485*. 493.
Hydrostatik: S. 487. 491. 499.
Hyperbel (*hyperbola*, *hyperbola Appoloniana*, *hyperbola communis*, *hyperbola conica*, *hyperbola simplex*): S. 12. 37. 149. 159. 211 f. 220. 241–243. *246*. 260. 298. 343. 362–368. 413. 455. 484 f. 548 f. 556 f. 563. 566. *573*. 574. 576. 580. 582. 584. 590. 618 f. 624. 626. 631 f. 639–641. 669.
Asymptote: S. 12. 31 f. 510.
Bogen: S. 298.
einbeschriebenes Rechteck: S. 579.
Fadenkonstruktion: S. 147.
figura segmentorum
Ordinate: S. 241. 571.
Gleichung: S. 12. 31 f. 38. 226–228. 233. 239. 365 bis 368. 564 f. 570.
Parameter: S. 365.
Moment: S. 281.
Ordinate: S. 228. 510. 565.
Quadratur: N. 22*. S. 12 f. 25. 30 f. 38. 85–87. 96 bis 99. 249. 251. 253. 298. 362–368. 566. 577 f. 674–676.
Abhängigkeit von Kreisquadratur: S. 273. 281.
arithmetische: N. 10*. 32*. 48*. 51*. S. 273. 342–344. 365–368. 447–451. 642. 674. 676.
(Brouncker): S. 332. 438. 510.
(Mercator): S. 438. 510.
(Saint-Vincent): S. 506.
Unmöglichkeit: S. 273.
Zusammenhang mit Parabelrektifikation: S. 438.
Reihenentwicklung: S. 109. 641.
Rektifikation: S. 298.
resecta: S. 618–621.
Rotationskörper: S. 505.
Oberfläche: S. 507 f.

Volumen: S. 505.
Segment (*zona*): S. 247. 249. 574.
Fläche: S. 371 f. 381–383. 390–392. 613–617. 634–636. 641.
Sektor: S. 298. 618–621.
Tangente: S. 233. 239. 569. 624.
Hyperbel, höhere: S. 12. 31. 98 f. 149. 153 f. 221. 226 f. 241–243. 376. 563 f. 581. 583.
Asymptote: S. 250.
allgemeine Gleichung: S. 228. 231–235. 256. 569 bis 571.
biquadratische (*antiparabola quadratoquadratica*)
Fläche: S. 589.
einbeschriebenes Rechteck: S. 578–580. 582 f.
figura segmentorum: S. 153 f.
Fläche: S. 240. 572.
Ordinate: S. 234–236. 239 f. 570 f.
Fläche: S. 212 f. 249–253. 580–583. 633 f.
kubische (*antiparabola cubica*): S. 99. 321.
Fläche: S. 589.
Gleichung: S. 227. 564. 566. 570.
linea segmentorum: S. 153.
Ordinate: S. 565.
quadratische (*antiparabola*, *antiparabola Berthetiana*, *hyperbola cubica*): S. 226. 563.
einbeschriebene Rechtecke: S. 579 f.
Fläche: S. 252–255. 589.
Gleichung: S. 226–228. 234. 239. 249. 563–566. 570.
Ordinate der figura resectarum: S. 241. 571 f.
Quadratur: S. 226.
Segment (*zona*): S. 247. 249. 574.
Tangente: S. 234. 239. 569.
Quadratur: S. 25 f. *26*. 52. 98. 200. 236. 247 f. 253–257. 320 f. 537. 584 f.
(Fermat): S. *483*.
(Wallis): S. 320.
rationale: S. 228 f. 565.
Fläche: S. 589 f.
Ordinate: S. 565. 589.
Segment (*zona*)
Fläche: S. 210 f. 241–250. 383. 572–577. 632 f. 664–666.
Sektor
Fläche: S. 240. 245 f. 366–368. 572 f.
Tafel: S. 227. 564.
Tangente
Gleichung: S. 153. 234. 239 f. 245. 570 f
Konstruktion: S. 167 f. 230–232. 237–239. 567 bis 570.
s. a. *hyperboloeis*.
hyperboloeis, *hyperbolois*
anarithmetos: S. 52.
composita: S. 25. 31.
rationalis: S. 590.
simplex: S. 12. 31.
Hyperboloid: S. 212 f.
hypercicli, *hypercycli*: S. 128 f. 131.
hypocicli, *hypocycli*: S. 128 f. 131.

idea
figurae: S. 495.
insita: S. 494 f. 518.
motus: S. 495.
immaterialitas animae: S. 213. 548.
immortalitas animi: S. 495.
index mathematicorum: S. 434.
Indianer: S. 491.
Indien: S. 433.
indivisibile: S. 139. 143. 189. 195. 197. 205. 213. 230. 240. 245. 249. 328. 496. 498. 505 f. 510. 512. 521. 527. 532. 542. 549. 572. 583. 586.
Indivisiblengeometrie: S. 143. 498. 505. 510. 549.
Indivisiblenmethode: S. 139. 189. 195. 205. 240. 245. 321. 328. 498. 505 f. 512. 521. 527. 532. 542. 572. 583. 586.
Induktion: S. 39. 321. 438. 507. 548. 589.
infinitesima: S. 16. 22. 24. 59. 102. 436. 437. 643 f. 648 f. 651. 654.
Infinitesimalen: S. *8*.
s. a. *infinitesima*. unendlich (klein).
ingeniarius: S. 433. 664.
ingenium: S. 184. 196. 353. 428 f. 431. 434. 436. 485 bis 491. 499. 503. 505 f. 516 f. 533. 548.
combinatorium: S. 436. 487–489. 493.
geometricum: S. 436. 487 f. 493.
humanum: S. 219. 516.
mathematicum: S. 487.
philosophicum: S. 434.

inquisitio mechanica: S. 436.
Instrumente
geodätische: S. 658.
geometrische: S. 60. 146. 175. 351. 497 f.
Konstruktion von Gleichungen: S. 152.
Konstruktion von Kurven: S. 152. 221 f. 229.
nautische: S. 658.
s. a. *instrumentum.* Maschine. Rechenmaschine.
instrumentum: S. 60. 130. 146. 152. 170. 175. 197. 221 f. 229. 351. 429. 496 f. 658.
arithmeticum: S. 64. 488.
Integralrechnung: S. 504.
Integraltransformation: S. 361 f.
s. a. Transmutationsmethode.
iterierte Integration: S. 34–37. 374. 646.
Zusammenhang mit Differentialrechnung: S. 414.
s. a. Quadratur.
interminatum: S. 213 (Def.). 549 (Def.).
intersectio, *intersection*: S. 68. 88. 137. 140. 153. 182. 184. 190. 197 f. 204 f. 491. 495. 504. 524. 527. 533. 535. 541.
isochronismus: S. 492 f.
Italiener: S. 506.

Jesuiten: S. 213. 226. 321. 491. 505–507. 548. 563. 641.
Jura: S. 430 f.
Regeln: S. 430 f.
jurisconsulti: S. 430. 484.
jurisprudentia: S. 431.

Kalenderreform, Gregorianische: S. *486.*
Kegel: S. 68. 486.
gerader: S. 499.
Volumen eines Abschnitts: N. 10*.
Oberfläche: S. 498.
schiefer: S. 499.
Kegelschnitt: S. 146 f. 200. 202. *202.* 220. 499. *499.* 510. 537 f. 540.
figura segmentorum: S. 620.
Gleichung: S. 365.
Parameter: S. 364 f.
Quadratur: S. *169.* 362–368.
arithmetische: S. 365–368. 618–621. 642.
resecta: S. 618–621.
Rotationskörper s. Konoid. Sphäroid.
Sektor: S. 618–620.
Tangente: S. 618–620.
Berechnung: S. 365.
Konstruktion: S. 364.
s. a. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.
Körper, geometrischer: S. 486.
Anzahl der regulären Körper: S. 497. *497.*
s. a. Kegel. Konoid. Kugel. Parallelepiped. Prisma. Sphäroid. Zylinder.
Körper, physikalischer: S. 549.
Kombinatorik: S. 341. 435. 486.
Konchoide: S. 95. 499. *499.*
Quadratur: S. 105. *105.* 499. 508.
Konoid: S. 438. 498. 507 f.
Konstruktion: S. 486.
mit Zirkel und Lineal: S. 146.
punktweise: S. 147 f.
s. a. *constructio.*
Kosekans s. Sekans.
Kosinus
s. Sinus. *sinus complementi.*
Kreis
Abszisse: S. 6. 9 f. 45 f.
Differenzen: S. 9 f.
Bogen: N. 33*. 47*. S. 6–9. 13. 21 f. 24. 26–28. 33. 37. 42. 44. 45 f. 53–58. 60–64. 68. 70 f. 73 f. 92–94. 100–104. 156 f. 161–163. 165 f. 171. 173 bis 176. 201 f. 214 f. 218. 224. 284 f. *285.* 296 bis 298. 303 f. 329. 331. 346–350. 372–377. 397 bis 403. 425 f. 446 f. 459–461. 463 f. 493. 512. 538 f. 549–551. 554 f. 592. 598–600. 621. 636. 642–663. 672–675.
Element: S. 40. 417. 644.
Methode zur Bestimmung aus trigonometrischen Größen: S. 68. 446 f.
Moment: S. 100. 102–104.
Schwerpunkt: S. 100.
s. a. Kreis, Rektifikation. Kreis, Umfang. Kreisapproximation.
Durchmesser: S. 8 f. 11. 41 f. 44. 53–55. 57. 73 f. 76. 89. 94 f. 100–103. 105 f. *110.* 119. 122. 124. 172 f. 215. 218. 224. 296. 331 f. 334. 403. 405.

418. 426. 497. 512. 549. 551. 554. 592. 597. 600–602. 605.
figura angulorum: S. 156. 202 (Def.). 217. 219 f. 397. 539 (Def.). 548. 553. 555–557.
Moment: N. 16_1*.
figura segmentorum: S. 13–19. 53–55. 57–59. 78. 94–103 (Def.). 109. 155–157. 189. 266 f. 285. *285*. 328. 438. 528. 545. 555. 592 (Def.). 593. 595–598.
Abszisse: S. 57. 95.
Asymptote: S. 57. 94.
Gleichung: S. 13 f. 16 f. 57 f. 95. 228. 283. 398. 463.
Moment: S. 97. 104.
Ordinate: S. 53–55. 57 f. 95. *285*. 324–328. 593 bis 595.
Quadratur: S. 97. 328. 595 f.
Reihenentwicklung: S. 58. 266 f.
Rotationskörper: S. 97.
Schwerpunkt: S. 97.
Subnormale: S. 99.
Subtangente: S. 96–99.
Tangente: S. 99. 398.
Wendepunkt: S. 96 f. 99. *99*.
Fläche: S. 41. 48. 55. 62 f. 73. *170*. 173 f. 458. 600–605. 612–614.
Flächen proportional zum Quadrat der Durchmesser: S. 497. 597.
s. a. Kreis, Quadratur.
Gleichung: S. 417.
s. a. Sinus, Gleichung.
Halbkreis
Bogen: S. 44. 54 f. 332. 334. 418 f. 423. 463.
Konstruktion: S. 147. 497 f. 566.
Möndchen: S. 22.
des Hippokrates: S. 89. 498.
Quadratur: S. 89. 498.
s. a. *lunula*.
Oktant
Bogen: S. 303 f. 331 f. 346 f. 406. 601.
Tangens: S. 309.
Ordinate: S. 6. 9. 45 f. 57. 228. 510. 565.
s. a. Sinus.
Polygone: N. 2*. 46*. S. 7. 67. 102. 130. 137. 172 f. 229. 351. 353 f. 399. 439. 644 f. 650. 653 f.
Dreieck: S. 42. 45 f. 172 f. 353 f.
Quadrat: N. 11*. S. 44. 174. 261. 331 f. 334. 337.
Sechseck: S. 172 f.
Zwölfeck: S. 41. 173.
24-Eck: S. 173.
48-Eck: S. 173.
60-Eck: S. 42.
96-Eck: S. 41. 173.
180-Eck: S. 63.
5400-Eck: S. 43.
10800-Eck: S. 42 f.
Quadrant: S. 9. 11. 119. 218. 261. 303. 397. 413. 417. 552–555. 605. 647. 659. 662.
Bogen: S. 26. 28. 33. 44. 56. 60. 174. 309. 329. 331 f. 335. 358 f. 397. 552 f. 598. 600 f. 603. 642. 647–649.
Schwerpunkt: S. 456.
Segment: S. 11.
Quadratrix: S. 9.
Quadratur: N. 39*. S. *75*. S. 85 f. *164*. *169*. 215. 298. 437. 484. *486*. 498. 506. 515. 551. 647. 655. 674–676.
Abhängigkeit von Hyperbelquadratur: S. 273. 281.
algebraische: S. *164*.
(durch archimedeische Spirale): S. 146 f.
(Gregory): N. 3*.
(Leibniz, d.h. arithmetische): N. 1*. 4*. 7*. 8*. 10*. 11*. 12*. 15*. 20*. 22*. 28*. 32*. 51*. S. *258*. 273. 362–368.
geometrische: S. 78. 91. 601.
materielle: S. 170.
(Mengoli): N. 13*.
Methoden: S. 166 f.
Unmöglichkeit: N. 18_1*. S. 174–176. 332. 348 bis 355. 509 f. *509*. 601. 621. 674–676.
Zusammenhang mit Rektifikation: S. 170. 330. 601.
Radius: S. 6. 9. 11. 13. 44. 45. 56 f. 60–62. 64. 70. 73. *77*. 92 f. 102 f. 147. 157. 163. 165. 170 f. 174. 215–218. 220. *285*. 289 f. 295–297. *297*. 303. 306. 329. 331 f. 346–349. 375. 378 f. 390.

397. 399. 403–406. 418. 423. 426. 440–442. *441.* 444. 446. 458–461. 468. *483.* 512. 514. 551–555. 557. 561. 592. 598 f. 601. 603. 605. 637. 642. 644. 647–651. 653–663. 674.
Rektifikation: S. 33. 41–44. 63. 73 f. 76. *164.* 200. 298. 329 f. 417 f. 537. 599–601. 603. 647. 655.
algebraische: S. *164.*
(durch archimedeische Spirale): S. 146 f. 170.
materielle: S. 170.
Unmöglichkeit: N. 18_1*. S. 175–177. 273. 348 bis 355. 621. 674–676.
s. a. Kreisapproximation.
Segment: N. 9*. 45*. S. 8 f. 11. 13–16. *14.* 19. 21 f. 24. 26–28. 31. 46. *46.* 53–55. 58–62. 64. 66. 68 f. *69.* 71 f. 94. 97. *97.* 102–104. *110.* 155–157. 166. 171. 201. 329. 351. 401. 538. 598. 655–657. 675.
Schwerpunkt: S. 456.
Tafel: S. 461.
Sehne: S. 9. 42–44. 45 f. 173. 261. 304. 461. 492 f. 656 f.
Gleichung: S. 45. 409. 463.
Sektor: S. 7. 9. 21 f. 27 f. *61.* 62. 71 f. 103 f. 141. 143. 157. 171. 198. 201 f. 206 f. 211–213. 218. 260. 286. 298. 330. 351–355. 397. 459. 539. 599. 621. 657. 675.
Tangente: S. 7–9. 13. 53–57. 100–102. 104. 106. 218. 282. 322. 329 f. 399. 464 f. 550. 555. 592.
rescissa: S. 24. 28. 31. 54.
resecta: S. 6–9. 13–15. 21–23. 26 f. 30. 32.
s. a. Tangens.
Teilung: N. 45*. S. 68–72. 329. 598. 656 f.
Methode (Gregory): S. 68. 73.
Umfang: S. 9. 11. 21. 26. 41 f. 60 f. 63. 68. 73. 76. 89 f. *110.* 159. 165. 170–175. 289 f. 304. 306 bis 308. 311. 314. 348. 378. 418 f. 426. 440–442. *441.* 444. 446 f. 458. 493. 514. 561. 592.
s. a. *arbelus.* Kreisapproximation. Kreisreihe. Sekans. Sinus.
Kreisapproximation: N. 2*. 38*. S. 8. 21. 32 f. 57. 59–74. 79–84. *169.* 172 f. 373–377. *453.* 600 f. 647 f. 661. 666 f.
arithmetische: S. 59 f. 439.
Bogen: N. 24*. 25*. 26*. 27*. 33*. 42*. S. 11. 63. 79. *169.* 172 f. 331 f. 346–348. 417 f. 512–514. 600.
1″: N. 33*. S. 440 f. 444.
(Archimedes): S. 41 f. 172 f. 438 f.
(Descartes): S. 42. *42.*
(Gregory): S. 172.
(Huygens): S. 42–44.
(Ludolph): S. 43. 172–174. 311. 314. 439.
(Metius): S. 172 f *172.*
Fehlerabschätzung: N. 27*. S. 30. 32 f. 42–44. 62 bis 64. 66–68. 122. *169.* 172 f. 229. 289 f. 293. 296 f. 347 f. 403–408. 466. *483.* 514. 658–661.
s. a. *defectus. error. excessus.*
Fläche: S. 59–63. *169.* 172 f. 329. 600.
(Descartes): S. 42. *42.*
geometrische: S. 59 f. 64–66.
(Gregory): S. 73. 172. 439. 509. *520.*
(Huygens): N. 46*. S. 41–46. 172. 439.
(Mengoli): N. 13*.
(Snell): S. 42. 172. 439.
(Viète): S. 439.
(Wallis): S. 89. 172. 439.
Kreise, konzentrische: S. 182–184.
Kreisreihe: N. 9*. 11*. 24*. 25*. 27*. 28*. 47*. 51*. S. 14–21. 24. 29 f. 32 f. *53.* 58–74. 76. *77.* 79. 89 f. 107. 109. 112. 124. 165. 174–176. 261. 267. 269. 276 f. 299–301. *299.* 372. 375–377. *423.* *427.* 453. *453.* *458.* 512–514.
Krieg, dritter englisch-niederländischer (1672 bis 1674): S. *562.*
Künste, schöne: S. 429 f.
Kugel: S. 68. 486.
Geometrie: S. 490.
Oberfläche: S. 68. 103. 216. 498.
Volumen: S. 498.
Kurven
Abszisse: S. 65 f (Def.). 145 (Def.). 153 (Def.). 203 (Def.). 204. 221 f. 224. 249. 540 (Def.) 541. 561. 563.
Achse: S. 145 (Def.). 153 (Def.) 202 (Def.). 535 (Def.) 539 (Def.). 540 f.
konjugierte: S. 153 (Def.). 203 (Def.). 204 f. 208. 210. 535 (Def.). 540 (Def.). 541.

Asymptote: S. 209–213. 546–549.
ein- und umbeschriebene Polygone: S. 137. 141 bis 143. 145. 148. 188. 198–200. 521. 527. 535 bis 537. 586.
Extremwert: S. 153. 191 f. 357. 529 f.
(Fermat): S. 230. *230.*
(Hudde): S. 230.
(Ricci): S. 231 f. 239.
Fläche
Zerlegung in Dreiecke: S. 181 f. 189. 201. 521 bis 523. 538.
Zerlegung in Parallelogramme: S. 182. 189. 195. 200. 521–523. 538.
Gleichung: S. 147–149. 203. 268. 540. 640.
Methode von Descartes: S. 11. 223 f. 559.
Reduktion des Grades: S. 149.
Vertauschung von Abszissen und Ordinaten: S. 149.
höhere: S. 147.
Klassifikation
(Descartes): S. *153.*
Konstruktion: S. 88. 146–150. 211 f. 219 f. 229. 497 f. 566.
Krümmungsverhalten: S. 191 f. 529.
Konkavität: S. 191. 204. 529. 541. 593.
Konvexität: S. 191. 204. 529. 541.
Ordinaten: S. 144–146 (Def.). 153 (Def.). S. 190 f. 197 f. 200. 202 (Def.). 203. 207 f. 221 f. 529. 539 (Def.) 540 f. 561. 563. 586.
konjugierte: S. 541 (Def.).
konvergierende: S. 144. 510 f.
parallele: S. 144. 510 f.
Scheitelpunkt: S. 145 (Def.). 152. 204 (Def.). 205. 207. 542 (Def.).
Schnittpunkt: S. 153.
Schwerpunkt: S. 88.
Sehne: S. 159 f. 190. 457. 535. 544.
Subnormale: S. 457.
Tangente: S. 153. 159 f. 190 f. 197 f. 201. 208–210. 357. 511. 519. 527. 529. 533–535. 545–547.
Transmutation: S. 197–201. 262–264. 373. 510. 521. 533–536.
Wendepunkt: S. 153. 191 f. 357. 529.
s. a. Quadratur. Rektifikation.
Kurven, spezielle
algebraische: S. 52. 144–148. 175. 558. 562–569. 574. 576 f. 584 f.
curva bzw. *figura analytica simplex*: S. 147. 317 bis 321. 584. 586. 588 f.
Abszisse: S. 317.
Ordinate: S. 317.
Parameter: S. 317.
Gleichung der figura segmentorum: S. 57.
Konstruktion der Tangente [20:13]: S. 167 f. *167.*
Quadratur: S. 318–321.
rationaler Funktionen: S. 92. 95. 438. 510. 566 f. 589. 641.
Quadratur: S. 85–87. 89. 276–281.
transzendente: S. 36 f. 152. 285.
Tangente: S. 285.
$y = x^{2n}\sqrt{a^2 - x^2}$: S. 285 f. *286.*
$y = x^{2n}\sqrt{(a^2 - x^2)^n}$: S. 285 f.
Quadratur: S. 286.
s. a. Arkustangens. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Konchoide. Kreis. Logarithmus. Parabel. Sekans. Sinus. Slusesche Perle. Tangens. Traktrix. Zissoide. Zykloide.

labyrinthus
de compositione continui: S. 496.
de maximo et minimo ac indesignabili atque infinito: S. 496.
lapis philosophicus: S. 484.
latus, semilatus
rectum: S. 52. 220. 221 (Def.). 227 f. 256 f. 317 bis 319. 321. 326. 364 f. 565. 593. 618 f.
transversum: S. 220. 618 f.
Leber: S. 516. *516.*
Leiden (Lugdunum Batavorum): S. 41.
Leon: S. *499.*
lex
geometrica: S. 493.
homogeneorum: S. 221. 228. 319. 562. 627.
mechanica: S. 493.
motuum: S. 429.
naturae: S. 493.
quadraturae: S. 577.
limenereutica: S. 491.
limes: S. 42. 48. 219. 351. 505. 661.

linea
aequabilis: S. 175.
geometrica: S. 175.
imaginaria: S. 149.
infinita: S. 549.
interminata: S. 549.
maxima: S. 549.
non imaginaria: S. 560.
ordinaria: S. 160.
segmentorum: S. 152 (Def.). 154. 551. 570.
sinuum: S. 152. 397. 552 f. 642. 644–646. 655.
complementi: S. 648.
versorum: S. 551. 649–651. 653. 655.
Linsen, hyperbolische s. Optik.
literae: S. 430 f. 485. 492.
amoeniores: S. 430.
locus: N. 16_2*. 6. 68. 224. 491. 558.
ad circulum: S. 157 f.
ad superficiem: S. 504.
conicus: S. 219. 555.
linearis: S. 504.
planus: S. 159.
solidus: S. 437.
logarithmotechnia: S. 438.
Logarithmus, *logarithmus*: N. 32*. 34*. 48*. S. 12 f. 30 f. 35 f. 48 f. 60. 64. 125–130. 148. 152. 219 f. 281. 355. 369–373. *369*. 393–396. 401. 418. 437 f. 447–451. 461. 506. 555–557. 566. 577 f. 615. 617. 621–623. 625 f. 628–642. *638*. 658. 664–676.
Differenzen: S. 386–389.
hyperbolicus: S. 472–475. 477. 669–671.
Konstruktion: S. 31. 388. 634–636.
s. a. *constructio logarithmorum.*
Kurve: S. 35 f. 152. 219. 281. 388. 623–630. 636 bis 640.
s. a. *curva logarithmica. figura logarithmica.*
näherungsweise Berechnung: N. 48*. S. 125 f. 370. 438 f. 447–451. 666–673.
Fehlerabschätzung: S. 470–479. 667 f. 672 f.
Quadratur: N. 34*. S. 281. 388 f. 634–637. 640 f. 645. 654.
Rechenoperationen: S. 369–373. 556. 626–630.
Reihe: N. 34*. S. 87. 342–344. 369–372. 393–396. 438. 448–451. 621. 631–633. 641 f. 664. 666. 672. 674.
secantis: S. 418.
Subtraktion: S. 148.
tabularis: S. 472–475.
Tangente: S. 390. 624. 637 f. 640.
tangentis: S. 418.
Umkehrung: N. 34*. S. 369 f. 373. 578. 637. 641. 658. 674. 676.
Approximation: S. 670–672.
Differenzen: S. 386–389.
Fläche: S. 386 f. 394 f.
näherungsweise Berechnung: S. 670–672.
Reihe: N. 35*. S. 369. 386 f. 390. 638–640. *638*. 664 f. 670. 673 f.
von Kreisgrößen: S. 373.
Vorzeichen: S. 625 f. 628–630.
s. a. *tabula logarithmorum.*
Logik: S. 353. 435.
logistica: S. 432.
London: S. *161 f. 432. 509.*
lunula, *lunule*: S. 22. 89. 498.
Lyon (Lugdunum): S. 552 f.

machina
arithmetica: S. 432.
Magdeburgica: S. 491.
textrix: S. 488.
Magdeburg: S. 491.
Magnetismus: S. 488 f.
magnitudo
finita: S. 212. 249–251. 253. 255. 330. 548. 583. 589. 600.
infinita: S. 251. 376.
infinite parva: S. 8. 586.
minor qualibet data: S. 331.
transcendens: S. 348.
Mailand: S. 490.
Malerei: S. 490.
Maschine: S. 428 f. 432. 489. 492 f. 495. 515. 517. 637.
Kraft: S. 429. 435. 493. 517.
Strickmaschine: S. 488. *488*.
s. a. Instrument. *machina.* Rechenmaschine.
massa: S. 548 f.
Materie: S. 503. 548 f.
Ausdehnung: S. 503. 548 f.

mathematicus: S. 434. 485. 501. 509.
Mathematik: S. 64. 172. 428–430. 432. 433 f. 491 f. 496. 503.
mechanica: S. 432. 435 f. 487. 494. 498. 504. 506.
mechanicus: S. 436. 485. 490. 664.
Mechanik: S. 432. 435 f. 487. 494. 498. 504. 506.
(Archimedes): S. 506.
(Galilei): S. 504. 506.
Satz von Guldin: S. 498.
medicus: S. 436. 490. 516.
Medizin: S. 489 f. 496. 515–517. *516.*
memoria: S. 234. 247. 429. 494. 514. 516. 574.
mens: S. 31. 33. 177. 210. 213. 224. 228. 332 f. 428. 432. 436. 487 f. 494–497. 503. 516–518. 527. 546. 548 f. 586. 600 f. 635.
metaphysica: S. 213.
metaphysicus: S. 212 f. 548 f.
Metaphysik: S. 497. 503.
Methode
s. a. Algebra. Folge. Gleichung. Indivisiblenmethode. Kreis, Bogen. Kreis, Quadratur. Kreis, Teilung. Kurven. *methode. modus.* Quadratur. *ratio.* Reihe. Reihenentwicklung. Tangentenmethode. Transmutationsmethode.
methodes des quadratures: S. 89.
methodus
(Archimedes): S. 173.
(Cavalieri): S. 320 f. 586. 588.
certa et analytica: S. 638.
construendi problemata rectilinearia: S. 504.
de maximis et minimis: S. 230. 232. 504.
demonstrandi: S. 35.
(Descartes): S. 11. 223. 230.
(Fermat): S. 230.
geometriae: S. 437.
(Gregory): S. 68. 73.
(Hudde): S. 230.
(Huygens): S. 41 f.
indivisibilium: S. 139. 189 f. 195 f. 205. 240. 245. 321. 328. 505 f. 512. 521. 527. 529. 532 f. 542. 572. 583. 586.
infinitorum: S. 512.
inveniendi
logarithmos: S. 641.
summas: S. 279.
inventorum: S. 196.
(Ludolph): S. 173.
(Mengoli): S. 120.
(Mercator): S. 87. 616.
(Metius): S. 173.
ratiocinandi: S. 579 f.
reddendi aequationem propositam puram: S. 373.
reducendi curvam analyticam: S. 373.
regressus, regressuum: S. 125. 638.
resolvendi aequationem: S. 373.
(Sluse): S. 230.
tangentium: S. 230.
inversa: S. 52. 435. 567. 637 f.
(Viète): S. 275.
Mikroskop s. Optik.
Militärwesen: S. 434.
Mittel
arithmetisches: S. 625.
geometrisches: S. 625.
modus
analyticus: S. 355.
appropinquandi: S. 439.
calculandi: S. 319.
componendi: S. 354.
continuandi: S. 174.
(Descartes): S. 502.
determinandi: S. 158.
exhibendi: S. 209. 546. 667.
(Ferrari): S. 502.
(Gregory): S. 439.
inveniendi: S. 157. 364. 641. 647.
(Mercator): S. 641.
naturalis: S. 416.
non-analyticus: S. 354 f.
non transcendens: S. 355.
notandi: S. 238.
operandi: S. 354.
ordinarius: S. 355.
ratiocinandi: S. 610.
solvendi: S. 160.
tractandi: S. 354.
transcendens: S. 354 f.
Mongolen: S. 433.

Moralphilosophie: S. 503.
motus: S. 210–213. 221 f.
aequabilis: S. 488.
animi: S. 430.
astrorum: S. 490.
continuus: S. 145. 149 f. 152. 213. 221 f. 229. 561.
irregularis: S. 637.
liquidorum: S. 435.
possibilis: S. 211.
proportionalis: S. 170.
uniformis: S. 170. 492.
uniformiter acceleratus: S. 492.
Musik: S. 433. 435. 493.

natura
mentis: S. 548.
rei, rerum: S. 64. 147. 152. 172. 199. 212. 488 f. 495 f. 537. 549. 560. 566. 585. 669.
nauta: S. 664.
Niederländer, Niederlande: S. 224. 508. 562. *562.*
Notation: S. *41. 51. 53. 107. 258.*
Nottinghamshire: S. *488.*
numerus, *numeri*
algebraicus: S. 174.
arithmeticus: S. 609.
combinatorii: S. 278.
commensurabilis: S. 10 f.
decimalis: S. 32. 440.
figuratus: S. 609.
finitus: S. 10. 527.
fractus: S. 11. 381. 438. 609.
harmonici: S. 278. 340. 609.
homogeneus: S. 10 f. (Def.).
impar: S. 330. 611.
infinitus: S. 10 f.
integer: S. 11. 340 f. 381. 438. 609.
irrationalis: S. 31. 60. 172. 174.
Ludolphi: S. 314.
naturalis: S. 11. 16. 25. 31. 339. 607. 609.
par: S. 330. 611.
primarius: S. 389. 634–638. 641. 665 f. 670.
primus: S. 675.
pyramidalis: S. 339 f. 607. 609.
pyramido-pyramidalis: S. 339. 607.
rationalis: S. 7 f. 10 f. 13. 16. 21. 50. 73. 94. 172. 174. 176. 346 f. 438 f. 510. 566. 597.
surdus: S. 10. 13. 129.
triangularis: S. 340. 609.
trigonalis: S. 339. 607.
trigono-pyramidalis: S. 339. 607.
trigono-trigonalis: S. 339. 607.
trigono-trigono-trigonalis: S. 339. 607.

oceanus: S. 487.
Aethiopicus: S. 487.
Atlanticus: S. 487.
Indicus: S. 487.
operatio
logarithmorum, per logarithmos: S. 556. 641 f.
mechanica: S. 220. 600.
trigonometrica: S. 600.
Optik: S. 429. 435. 455. 490–492.
Linsen: S. 491.
hyperbolische: S. 485. *485.*
Mikroskop: S. 429. 492.
Spiegel: S. 429. *455.* 491.
Brennspiegel: S. 490.
Teleskop: S. 429. 485. 491 f.
Apparat von Porta: S. 492.
Binokel: S. 492.
Orakel von Delphi: S. 484.
organum mesolabi: S. 229.
oscillatio penduli: S. 492 f.

Parabel (*parabola*, *parabola conica*, *parabola quadratica*): S. 119. 159 f. 175. 221. 226. 266 f. 282. 484. 563. 593. 626.
Brennpunkt: S. 200. 538.
Erzeugung durch
Kegelschnitt: S. 495.
Wurfbewegung: S. 495.
figura segmentorum: S. 264.
Ordinate: S. 241. 571.
Fläche: S. 254. 318–320. 587–589.
Gleichung: S. 11. 31. 148 f. 203. 222–224. 239. 540. 558–561. 564 f. 569.
Moment: S. 498.
Ordinate: S. 228. 563. 565. 587–589.

Quadratur: S. 256 f. 267. 496. 498. 618.
Rektifikation
Zusammenhang mit Hyperbelquadratur: S. 438. 508.
Zusammenhang mit Spiralenrektifikation: S. 498. *498*. 506.
Rotationskörper
Oberfläche: S. 438. 507 f.
Segment (*zona*): S. 12. 247. 574.
Schwerpunkt: S. 456.
Tangente: S. 160. 239. 254. 565. 568.
Transmutation: S. *258*. 264.
Parabel, höhere: S. 31. 36. 148 f. 153 f. 221. 226 f. 229. 318–321. 326. 563 f. 586.
allgemeine Gleichung: S. 228. 231–235. 256. 569 bis 571.
biquadratische: S. 593.
Fläche: S. 587–589.
Gleichung: S. 223. 227. 560 f. 564 f. 569.
Konstruktion: S. 229.
Ordinate: S. 257. 587. 589.
Tangente: S. 239.
figura segmentorum: S. 153 f.
Fläche: S. 240. 572.
Ordinate: S. 234–236. 239 f. 570 f.
Fläche: S. 253–256.
kubische: S. 12. 221. 241. 593.
Fläche: S. 318 f. 587–589.
Gleichung: S. 12. 203. 223–225. 227. 233. 318. 540. 559–561. 564 f. 569.
Konstruktion: S. 229.
Ordinate: S. 257. 587–589.
Ordinate der figura resectarum: S. 241. 571.
Quadratur: S. 256 f.
Segment (*zona*): S. 247. 574.
Tangente: S. 233. 239. 568.
Quadratur: S. 25 f. *26*. 52. 59. 200. 229. 236. 256 f. 318–321. 438. 537. 548. 584 f.
(Cavalieri): S. 320.
(Fermat): S. 320. *483*. 507.
(Wallis): S. 320 f. 507.
rationale: S. 228 f. 266 f. 565. 593.
Fläche: S. 267. 587–590. 595 f.
Ordinate: S. 257. 565. 586–589.
Rektifikation:
(Heuraet, Neile): S. 438.
Segment (*zona*)
Fläche: S. 240–249. 572–577.
Sektor
Fläche: S. 240. 245 f. 572 f.
semikubische (*cubica quadratiformis*, *semicubica*, *semicubicalis*): S. 12. 25. 224–226. 320 f.
Gleichung: S. 12. 224 f. 227. 233. 239. 561 f. 564. 569.
Quadratur: S. 320 f.
Rektifikation (Heuraet, Neile): S. 224 f. 438. 562. *562*.
Segment (*zona*): S. 247. 574.
Tangente: S. 233. 239. 568.
Tangente
Gleichung: S. 153. 234–236. 239 f. 570 f.
Konstruktion: S. 167 f. 230–232. 237–239. 567 bis 570.
trilineum: S. 586–588.
Fläche: S. 574.
s. a: *paraboloeis*.
paraboloeis, *parabolois*
anarithmetos: S. 52.
composita: S. 25. 31.
rationalis: S. 229. 256 f. 318. 320 f. 565 f. 586 bis 588.
simplex: S. 12. 25. 31. 59.
Paraboloid
Oberfläche: S. 438.
s. a. *conoeides*.
Parallelepiped: S. 385 f. 500. 627.
paralogismus: S. 210. 213. 242. 436.
parameter: S. 11. 145–148. 221 (Def.). 222. 224 bis 226. 228. 232. 256. 317. 395. 398 f. 559 (Def.). *559*. 562 f. 565. 570. 586. 588–590. 597. 639. 642. 648. 651.
parhypercicli, *parhypercycli*: S. 129–131.
parhypocicli, *parhypocycli*: S. 129–131.
Paris: *161*. *432*. *509*.
partitio: S. 341. 610. 630.
Pendel s. Uhren.
Philosophie: S. 436.
Beweise: S. 503.

cartesische: S. 503.
Scholastik: S. 431.
philosophus: S. 430. 434.
physica: S. 485–487. 495. 503.
planum
assignabile: S. 633.
homogeneum solido: S. 35.
inclinatum: S. 492.
ordinatum: S. 34 f.
provolutionis, volutionis: S. 215. 551. 647.
Plastik: S. 490.
Pneumatik: S. 487. 491.
Luftpumpe (Guericke): S. 491.
Poesie: S. 433.
polygonum infinitangulum: S. 102.
Potenzen: S. 144 f. 153. 221. 225. 228. 238. 580. 671.
höhere: S. 30. 68. 507.
mit negative Exponenten: S. 38. 228. 233 f. 236. 580.
mit nicht-ganzzahligen Exponenten: S. 52.
praxis mathematica: S. 433.
principium
centrobarycae: S. 100. 103.
inventionis, *inventorum*: S. 35. 196. 533.
mechanicum: S. 498.
Prisma: S. 170. 388.
probabilitas: S. 431. 515.
Problem, Probleme
algebraische: S. 436.
Dreieckslehre: S. 172. 175.
geometrische: S. 184. 437. 524.
(Deschales): N. 10*.
(Huygens): S. 41. 45.
(Pappus): S. 485.
(Perrault): S. *259*.
Kreis
Kurve: N. 16_2*.
Sinus aus Bogen bestimmen: S. 68. 658.
Kreisapproximation: S. 21–33. 59–74.
(Mengoli): S. 129 f.
Kreisquadratur: N. 19*. S. 428.
geometrische: S. 78.
Kreisreihe: S. 14–21.
Kreisteilung (Bogen- u. Flächenteilung): N. 45*. S. 68.
Kugelteilung (Oberflächenteilung): S. 68.
Kurvenbestimmung: S. 159 f.
Logarithmus: S. 578. 672.
Mechanik: S. 494. 515.
Moment- und Schwerpunktbestimmung: S. 68.
optisches (Alhazen): S. 499.
Lösung durch Kegelschnitte: S. 499.
Physik: S. 515.
Reihensummierung: S. 435.
Tangentenproblem: S. 160.
(Debeaune): S. *520*.
inverse Tangentenmethode: S. 435. 567.
transzendente: S. 219. 222. 673.
Winkelprobleme
arithmetisches, geometrisches, harmonisches Mittel: S. 68.
mittlere Proportionale: S. 68.
Teilung: S. 68. 169. 175. 219. 555. 675.
Würfelverdopplung: S. *146*. 484. 497. *497*.
Wurzelziehen: S. 68.
Zykloide
Schwerpunkte von Rotationskörpern: S. 506 f.
problema, *problemata*
certi gradus: S. 578.
circa centra solidorum cycloeidis (Pascal): S. 506.
conicum: S. 176.
cubicum: S. 350. 675.
Delphicum de duplicatione cubi: S. 497.
de quadratura circuli: S. 169.
de sectione angulorum universali, *sectionis anguli universalis*: S. 169. 175.
determinatum: S. 491.
geometriae
Archimedeae: S. 436.
mechanicae: S. 57.
transcendentis: S. 673.
geometricorum: S. 437.
gradus determinati finiti: S. 675.
impossibile: S. 158. 160.
indeterminatum: S. 491.
inversum: S. 567.
mechanicae subtilioris: S. 494.
mechanicum: S. 515.

methodi tangentium inversae: S. 567.
opticum (Alhazen): S. 499.
Pascaliana: S. 507.
physicum: S. 515.
planum: S. 176. 350. 675.
rectilinearis, *rectilineum*: S. 68. 504.
solidum: S. 176. 219. 349 f. 501 f. 555. 675.
surdesolidum, *sursolidum*: S. 176. 219. 350. 555. 675.
tangentium: S. 160.
transcendens: S. 219. 222.
trigonometricum: S. 172. 175.
probleme
curviligne: S. 88 f.
de l'infinitesiême degrez: S. 88.
plan: S. 88.
rectiligne: S. 88 f.
solide: S. 88.
sursolide: S. 88.
progressio
arithmetica: S. 8–12. 15. 22 f. 59. 333. 340. 371. 602. 622. 625.
characterum: S. 174.
geometrica: S. 27. 30. 39. 48–50. 61. 67. 283. 322 bis 324. 326. 330 f. 341. 344. 372. 511. 590 f. 593 f. 596. 600. 610. 622. 625. 669. 672.
harmonica: S. 27. 331. 333. 340. 416. 602. 616. 666.
ordinatarum: S. 98.
paraboloeidum: S. 26.
quantitatum: S. 194.
progression
arithmetique: S. 90.
des fractions triangulaires: S. 90.
des nombres rationaux: S. 89.
des polygones: S. 89.
harmonique: S. 90.
irrationelle: S. 89.
rationelle: S. 89.
reguliere: S. 89.
Proportionale
dritte: S. 218. 554 f. 625. 665.
geometrische: S. 39.
harmonische: S. 39. 602.
mittlere: S. 39. 41. 48. 64 f. 68. 103. 105. 146 f. 219. 298. 484. 549. 555 f. 578. 590. 623–625. 634. 669. 676.
Konstruktion: S. 229.
s. a. *analogia*.
proverbia: S. 431.
punctum
flexus contrarii: S. 139. 191 (Def.). 529 (Def.).
imaginarium: S. 210.
reversionis: S. 139. 191 f (Def.). 357. 529 (Def.). 530.
Pyramide
Volumen: S. 497 f.
Pythagoräer: S. 169.

Quadratrix (Dinostratus): S. 152. 219. *358*. 625.
Quadratur: S. 120. 152. 199 f. 203. 373. 537. 541. 586.
Abhängigkeit von Kreis- bzw. Hyperbelquadratur: S. 38 f. 68. 85 f. 96–99. 104–106. *105*. 273. 281. *281*. 282. 285 f.
Methoden:
(Bertet): S. 321.
(Cavalieri): S. 320 f. 586. 588.
ein- und umbeschriebene Polygone: S. 188. 198 bis 200. 229. 521. 527.
(Fabri): S. 321.
(Fermat): S. 320.
geometrische: S. 89.
(Mengoli): S. 120.
mit unendlichen Reihen: S. 88 f. 566 f. 641.
spezielle: S. 89.
(Wallis): S. 320 f.
s. a. Transmutationsmethode.
von Polygonen: S.169 f.
quadratura
absoluta: S. 200. 388. 537.
analytica: S. 173. 175 f.
universalis: S. 348. 350. 675.
arithmetica: S. 73. 110. 169. 173 f. 178. 200. 228 f. 273. 295. 320. 369. 510 f. 521. 537. 567. 586. 588.
plena: S. 174.
calculatoria: S. 173.
empirica: S. 172 (Def.).
exacta: S. 73. 173. 175.

generalis: S. 165 f. 368. 618. 621. 674. 676.
geometrica: S. 29. 175. 388. 401. 634.
plena: S. 601.
hypothetica: S. 200. 537.
imperfecta: S. 172.
linearis: S. 173. 175. *520*.
mechanica: S. 21. 29 f. 32. 73. 172 f.
numerica: S. 173.
particularis: S. 165 f (Def.).
perfecta: S. 165. 171 f. 175 f.
plena: S. 171 f (Def.). 176.
rationalis: S. 172 f. (Def.).
appropinquans: S. 172.
exacta: S. 172.
specialis: S. 273.
universalis: S. 165 f (Def.). 351. 577.
vera: S. 333.
quadrature: S. 89–91.
exacte: S. 89.
geometrique: S. 89. 91.
quadrisectio: S. 309.
anguli: S. 314 f.
quantitas
assignabilis: S. 255 f.
curvilinea: S. 437.
fictitia: S. 537. 586.
interminata: S. 213. 549.
irrationalis: S. 499.
minor quavis data: S. 138.
negativa: S. 629.
qualibet assignata minor: S. 140.
quantumlibet parva: S. 140.
vera: S. 330. 600.
quinquesectio:
anguli: S. 176. 350. 675.

radix
affecta: S. 48. 597.
cubica: S. 149. 225. 460 f. 627.
falsa: S. 233. 502.
imaginaria: S. 502.
irrationalis: S. 435. 500. 502.
pura: S. 49. 597.
quadratica, aequationis quadraticae: S. 149. 225 f. 275. 500. 556. 561 f. 627. 663.
quadrato-quadratica, aequationis quadrato-quadraticae: S. 224. 274. 502.
rationalis: S. 275.
simplex: S. 275.
surda: S. 50.
vera: S. 502.
ratio
analytica: S. 500.
apagogica: S. 213.
appropinquandi: S. 509.
calculandi: S. 355.
composita: S. 124. 128. 252. 256. 318 f. 579 f. 593. 628–630.
dimidiata: S. 129.
directa: S. 148. 153. 200. 221. 227. 256. 561. 564.
dupla: S. 248. 627.
duplicata: S. 65. 128. 148 f. 225 f. 254. 296–298. 322. 326. 560–562. 568. 588. 592. 627.
finita: S. 248 f. 251.
infinita: S. 623.
infinite parva: S. 622.
infinitesima: S. 623.
multiplicata: S. 147. 153. 221. 225. 229. 231. 256. 563 f. 627 f. 633.
perexigua: S. 374.
probabilis: S. 213. 548.
progressionis: S. 600.
quadrandi: S. 641.
quadrupla: S. 125.
quadruplicata: S. 148 f. 229. 560 f. 568.
quintupla: S. 125.
quintuplicata: S. 229.
reciproca: S. 148 f. 153. 200. 221. 226 f. 537. 561. 564. 664.
sesquialterata: S. 128. 248.
simplex: S. 148 f. 221.
studiorum: S. 430.
subduplicata: S. 148. 203. 225 f. 239. 540. 561 f. 627. 630.
submultiplicata: S. 153. 225. 563. 628.
subquadruplicata: S. 561.
subtriplicata: S. 225. 561 f.
superparticularizata: S. 129 f.
tripla: S. 248. 319. 627. 630.

triplicata: S. 40. 148–150. 203. 225. 229. 319. 540. 560 f. 568. 588. 627.
Rechenmaschine: S. 432. *432*. 488. *488*.
Rechenoperationen: S. 353.
Rechteck
Fläche: S. 3 f. 178–181. 521–523.
ein-, umbeschriebenes: S. 204. 208. 247. 318. 532. 541. 544.
s. a. *rectangulum*.
rectangulum
assignabile: S. 16.
isoparallelum: S. 22. 58. 204. 208. 318. 541.
regula aurea: S. 641.
Reibung: S. 435. 493.
Reihe: N. 22*.
konvergente: N. 3*.
Methode zur Summierung: S. 279 f.
s. a. Kreisreihe.
s. a. Folge. Folgen, spezielle.
Reihenentwicklung
durch fortgesetzte Division: S. 22–24. 28. 58. *58*. 87. 276. 321. 360. 365. 438. 511. 596–598.
Methode von Mercator: S. 58. 87. 438. 510. 566. 596 f. 616. 641 f.
Rektifikation: S. 146. 152. 222. 499. 504 f. 508 f.
Unmöglichkeit: S. 88. 505.
relatio
analytica: S. 144 (Def.). 600.
Cartesiana: S. 498.
geometrica: S. 144 f (Def.). 674.
republica: S. 487.
geometrica: S. 506.
res
civilis: S. 431.
divina: S. 495.
mercatoria: S. 487.
metaphysica: S. 487.
scientiarum: S. 197.
summa: S. 516.
rescissa: S. 5. 24. 28. 31. 54. 528.
resecta: S. 5–8 (Def.). 13–17. *14*. 21–23. 26 f. 30–33. 138. 190. 197 f (Def.). 201. 234. 236. 239 f. 242 f. 245. 385. 535 (Def.). 538 f. 547. 555. 570–572. 618. 620.
resistentia solidorum s. Bruchfestigkeit.
Rollkurven: S. 222.
Rosenkreuzer: S. 484.
Rotationskörper: S. 202. 539.
Royal Society (London) s. Akademien.

sagitta: S. 94. 105. 618 f.
Satz, Sätze
Anzahl der regulären Körper: S. 497. *497*.
Differenz zweier Größen und Differenzen zu einer dritten Größe (prop. V): S. *132*. 133. *133* f. 136 (Prop.). 142. 151 (Prop.). 186 f. 188 (Prop.). 199. 207. 521. 526 (Prop.). 527.
Dreiecksungleichung (prop. IV): S. *132*. 133. *133* f. 135 f (Prop.). 137. 151 (Prop.). 186. 187 (Prop.). 188. 521. 526 (Prop.). 526 f.
endliche/unendliche Größen bei Verhältnissen von Summen (prop. XX): S. 248 (Prop.). 578 (Prop.). 582.
Endlichkeit/Unendlichkeit eines einer Hyperbel einbeschriebenen Rechtecks (prop. XXI): S. *251*. 578 f (Prop.). 582. *582*. 585.
Endlichkeit/Unendlichkeit von Hyperbelflächen (prop. XXII): S. 249 f (Prop.). 255 f. 542. 548. 580 f (Prop.). *582*. 585 f.
Extremwerte
(Ricci): S. 153. *178*. 230. 231 f. 570.
(Sluse): S. 153. *178*. 230. 570.
Fläche der figura angulorum (prop. XIV): S. 202. 217 (Prop.). 397. *520*. 553 f.
Fläche des Komplements der figura segmentorum (prop. X): S. *178*. 208 (Prop.). *266*. 328. 545 (Prop.). 552. 595. 620.
Flächengleichheit von Dreiecken und Rechtecken (prop. I): S. 3 f (Prop.). 6. 132 (Prop.). *132*. 142. 151 (Prop.). 178 (Prop.). 180 (Prop.). 521. 522 (Prop.). 523.
Flächen unter Kurven mit kommensurablen Abszissen und Ordinaten: S. 8 f. 11. *55*.
Grundlegung der Infinitesimalgeometrie (prop. VI): S. *132*. 133. *133*. 137–139 (Prop.). 151 (Prop.) 189–191 (Prop.). 198. 201 f. 205. 215. 229. 234. 240. 245. 328. 521. 527–529 (Prop.). 542. 551. 572. 585.
harmonische Reihe (prop. XXXIII): S. 602 (Prop.). 602. 609.

harmonisches Dreieck (prop. XL): S. 339 (Prop.). 590. 606 f (Prop.).
höhere Parabeln und Hyperbeln:
figura resectarum (prop. XVI): S. 153 f (Prop.). S. *132*. 234 (Prop.). 239 f (Prop.). 245. 570 f (Prop.). 572.
Fläche höherer rationaler Antiparabeln mit Parameter 1 (prop. XXV cor. 2): S. 581. 587. 589 (Kor.). 590. 598. 609. 618.
Fläche höherer rationaler Parabeln (prop. XXV): S. *393*. 394. 398. *520*. 587 (Prop.). 588 f. 596. 620. 632 f. 639.
Fläche höherer rationaler Parabeln mit Parameter 1 (prop. XXV cor. 1): S. 587. 589 (Kor.). 590. 632.
konjugierte Segmentflächen (prop. XVIII): S. 241 f (Prop.). 246 (Prop.). 249 f. 255. 383. *520*. 573 (Prop.). 581. 583. 616. 664.
Konstruktion der Tangente (prop. XV): S. 167 f. (Prop.). *167*. 231 f (Prop.). S. 238 (Prop.). 240. 567 (Prop.). 571.
Ordinate: S. 317 (Prop.).
Ordinate höherer rationaler Parabeln (prop. XXIV): S. 257 (Prop.). 586 f (Prop.). 588. 593. 596.
Potenzregel: S. 256 f (Prop.). 319 (Prop.). 328.
Quadratur (prop. XXIII): S. 253 (Prop.). 318. 537. 584 (Prop.). 588 f.
Quadratur eines Segments (prop. XIX): S. 574 f (Prop.). 584.
Sektor- und Segmentfläche (prop. XVII): S. 240 (Prop.). 245 (Prop.). 572 f.
Isochronismus der Pendelschwingung (Galilei): S. 492 f.
iterierte Integration: S. 34 f.
kommensurable Tangenten des Halbwinkels und zugehörige Kreissegmente: S. 7 f. 13. 16.
Konvergenz einer alternierenden Nullfolge (prop. IL): S. 344 f. (Prop.) 657 (Prop.). 659. 661.
Kreis
Gleichung der figura segmentorum (prop. XXVIII): S. 57 (Prop.). 93 (Prop.). 95. 324 bis 326 (Prop.). *324*. 593 (Prop.). 595–598. 615. 620.
Kreispolygone (Huygens): S. 41. 45.
Moment des Bogens: S. 102 (Prop.).
Proportionalität der Fläche zum Quadrat des Durchmessers: S. 497.
Rektifikation durch Spirale (Archimedes): S. 146 f.
resecta: S. 6 (Prop.). 13. 26.
Segmente berührender Kreise: S. 460.
Transmutationssatz: S. 53 (Prop.). 55.
Unmöglichkeit einer allgemeinen Quadratur (prop. LI): N. 18_1*. S. 175 f. *317*. 348 f (Prop.). *520*. 674 (Prop.).
Kreisreihe
als Differenz zweier harmonischer Reihen (prop. XXXIV): S. 333 (Kor.). 602 (Prop.).
Bogen (prop. XXXI): S. 329 f (Prop.). 331. 599 (Prop.). 658.
Fläche des Komplements der figura segmentorum (prop. XXIX): S. 58 (Prop.). 60 f. 328 (Prop.). 330. *393*. 398. *520*. 546. 595 (Prop.). 598 f. 615. 618. 620. 632 f. 639.
Kreisfläche (prop. XXXII): S. 331 (Prop.). 600 (Prop.). 602.
Kreisfläche und Kreisumfang (prop. XXXV): S. 332. 334 (Kor.). *334*. 338. 343. 603 (Prop.). 605. 612. 614.
Kreisquadrant (prop. XXXVIII): S. 605 (Prop.).
umbeschriebenes und einbeschriebenes Quadrat (prop. XXXVII): S. 605 (Prop.). 605.
Segment (prop. XXX): S. 329 (Prop.). 346. 598 (Prop.). 657.
Logarithmus
Quadratur (prop. XLVI): S. *317*. 388 (Prop.). 395. *520*. 634 (Prop.). 640 f. 645. 654.
Reihe (prop. XLIV): S. *317*. 380 f (Prop.). 393 (Prop.). 394. 590. *590*. 621 (Prop.). 631 (Prop.). 639. 641. *657*. 664.
Reihe für die Umkehrung des Logarithmus (prop. XLVII): S. *317*. 393 (Prop.). *393*. 638 (Prop.). *638*. 664.
Oberfläche von Kugel und Zylinder (Archimedes): S. 103.
Polynomdivision (Sluse): S. *107*.

(Pythagoras): S. 497.
Quadratur der Hyperbel und des Kreises (prop. XLII): S. 342–344 (Prop.) 381. 383. 601. 612 bis 617 (Prop.). 632 f.
Quadratur eines Kegelschnitts (prop. XLIII): S. *317*. *520*. 618 (Prop.). 642. *657*. 670.
Reihe für das Kreissegment (prop. XLVIII cor. 3): S. 655 (Prop.). 656 (Kor.). *657*.
Reihe des sinus complementi (prop. XLVIII cor. 1): S. *393*. *520*. 598. 647 (Prop.). 648 (Prop.). 656 (Kor.). *657*. 661.
Reihe des sinus rectus (prop. XLVIII cor. 2): S. *393*. 397 (Prop.). *402*. *520*. 642 (Prop.). 647. 656 (Kor.). *657*. 661.
Reihe des sinus versus (prop. XLVIII): S. *317*. *393*. *402*. *520*. 551. *643*. 648 (Prop.). 651 (Prop.). 655. *657*. 661.
Reihensummierung: S. 279 f.
Schnittpunkte von Dreiecken mit parallelen Geraden:
Schwerpunkt
Guldin: S. 498. 505.
sinus versus in Halbwinkelgrößen (prop. XXVII): S. 322 (Prop.). *322*. *324*. 327. 592 (Prop.). 593. 619.
Summe der geometrischen Reihe (prop. XXVI): S. 322 (Prop.). 326. 344. 590 (Prop.). 593. 597. 615. 620. 632.
Summe der Reihe mit $a_n = \frac{1}{n^2-1}$ (prop. XLI): S. 341 f (Prop.). 611 (Prop.). 612.
Summe der Reihe mit $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$ (prop. XXXVI): S. 336 (Prop.). 342 f. 604 (Prop.). 605. 612.
Summe der reziproken Dreieckszahlen (prop. XXXIX): S. 337 (Prop.). 342. 606 (Prop.). 611.
Summe von Differenzenfolgen und Differenz der äußeren Folgenglieder (prop. III): S. *132*. 133. *133*. 134 (Prop.). *134*. 151 (Prop.). 185 (Prop.). 186 f. 521. 525 (Prop.). 526.
Summe von Differenzenfolgen verschiedener Anordnung (prop. II): S. *132*. 133. *133*. 134 (Prop.). *134*. 135. *135*. 151 (Prop.). 184 (Prop.). 185 f. 521. 524 (Prop.). 525 f.
Tangens des Doppelwinkels (Pell): S. 70. *70*. 94. *94*.
Tangens des Halbwinkels: S. 6 f. 13. 56 (Prop.). 57. 92 (Prop.). 93. 297.
Transmutationssatz (prop. VII): S. *132*. 133. *133*. 137. 140 (Prop.). 151 (Prop.). 154. 182. 188 f. 197 (Prop.). 201 f. 205. 209. 211. 213. 216. 218. 229. 234. 242 f. 245. 320. 521. 523. 527. 533 f (Prop.). *534*. 537. 542 f. 547 f. 552 f. 555. 567. 573. 585 f.
Differenz zwischen Kurve und figura segmentorum (prop. IX): S. *167*. 168 (Prop.). *178*. 207 f (Prop.). 218. 544 (Prop.).
Fläche der figura segmentorum (prop. VIII): S. 5 (Prop.). *132*. 152 (Cor.). 154. 205 (Prop.). 208 f. 215 f. 543 (Prop.). 544. 546. 552 f. 585.
unendliche Länge der figura segmentorum (prop. XI): S. *178*. 189. 209 (Prop.). *210*. *520*. 545 (Prop.). 546 (Prop.). 555.
trigonometria sine tabulis (prop. L): S. *317*. 346 (Cor.) 346 f. (Prop.) *348*. *520*. 658 (Prop.).
Unendlichkeit der Hyperbelfläche (prop. XLV): S. *317*. 610. 633 (Prop.).
Volumen der Pyramide: S. 497.
Zykloide
Quadratur der retorta (prop. XII): S. *178*. 214 (Prop.). 216. 358 (Prop.). 550 (Prop.). 552 f.
Quadratur eines Segments (prop. XIII): S. *178*. 215 (Prop.). 358 (Prop.). 551 (Prop.).
Schifffahrt
Nautik: S. 435. 491.
Schneeflocken: S. 485.
Scholastiker: S. 428. 430. 484. 503.
s. a. Philosophie.
Schotte: S. 172 f. 351. 439. 488. *488*. 509.
Schraube, archimedische: S. 490.
Schwerpunkt: S. 42. 68. 97 f. 100. 435. 437. 456. 498. 505 f.
s. a. *centrobaryca*.
scientia: S. 197. 428–432. 434. 436. 438. 485–487. 494 f. 497–499. 502 f. 506. 515.
civilis: S. 431.
experimentalis: S. 494.

figurarum: S. 486.
generalis: S. 430.
historiae: S. 494.
mathematica: S. 64.
navigatoria: S. 491.
nova: S. 428. 485. 502.
prima: S. 432.
universalis: S. 432.
vera: S. 429.
secans canonicus: S. 7.
Sechseck: S. 172 f. 216. 552 f.
sectio: S. 36 f. 349. 358. 383. 399. 495.
angularis, *anguli*, *angulorum*: S. 48. 68. 165 f. 171. 219 f. 304. 315. 350. 555. 625. 675.
coni, *conica*: S. 368. 495. 499. 618. 620. 642.
logarithmi: S. 219. 555 f.
rationis: S. 219. 555 f. 625.
s. a. *bisectio. intersectio, intersection. quadrisectio. quinquesectio. subsectio. trisectio.*
sector: S. 157. 201 (Def.). 202. 206 f. 211–213. 538 (Def.). 539. 543 f. 548. 572 f.
Seehandel: S. 428.
segmentum assignabile: S. 21.
Sekans: S. 37–39. 70. 284–286. 297. *304*. 373.
des Doppelwinkels: S. 70.
des Halbwinkels: S. 322. 592 f.
Gleichung: S. 38 f.
Quadratur: S. 285 f. 418.
serie convergente: S. 129.
series
convergens: S. 51 f. 128. 172 f. 298. 351–353 (Def.). 439. 509.
crescens: S. 439. 622.
cubica: S. 25.
decrescens: S. 328 f. 344. 346. 391. 397. 439. 596. 598. 607. 622. 639 f. 657. 666.
descendens: S. 25. 28.
differentiarum: S. 184–186. 524 f. 591.
finita: S. 8.
geometrica, progressionis geometricae: S. 324. 330. 591. 622. 669.
harmonica, progressionis harmonicae: S. 125. 331. 333. 340. 602. 666.
hypercyclorum: S. 128 f.
hypocyclorum: S. 128 f.
infinita: S. 8. 21. 67. 73 f. 111. 328–331. 333. 336 f. 340 f. 347. 354 f. 373. 438 f. 566. 595 f. 600. 604. 606. 609. 611. 618. 621. 641. 663.
integrorum: S. 438.
(numerorum) naturalium: S. 8. 25.
(numerorum) rationalium: S. 14. 21. 73. 128 f. 438. 510. 566. 596.
Pascalianae: S. 609.
perturbata: S. 134.
polygonorum: S. 354.
potestatum: S. 61.
primanorum: S. 25.
pyramidalium: S. 608.
quadrabilis: S. 129.
quadratica: S. 25.
rationalis: S. 641.
reciproca: S. 117.
reciprocorum trigonalium: S. 341. 610 f.
replicata: S. *317*.
secundanorum: S. 25.
substitutrix: S. *317*. 352.
tertianorum: S. 25.
trigonalium: S. 608.
Sinnesorgane: S. 494.
Sinus: S. 5 f. 8. 13–17. *14*. 19. 21 f. 24. 26–28. 31. 39. 44. 53–58. 60–63. 66. 68–71. *70*. 92–95. 100. 103. 105 f. 163. 165. *169*. 172 f. 175 f. 215. 218. *284*. 285. *285*. 322. 329. 374. *402*. 403. *410*. 418. 423. *423*. 425. *425*. *446*. *458*. 459 f. 487. 493. 551–554. 592. 598. 642–658. 661–663. 673.
Approximation: N. 17*. 38*.
Berechnung aus Bogen: S. 418–422.
des Halbwinkels: S. 26 f. 45.
Gleichung: S. 39. 45. 592 f. 647 f. 650 f. 655–657.
Ordinate: S. *285*.
Differenz: S. *285*.
Quadratrix (Stammfunktion)
Ordinate: S. 285. *285*.
Reihe
Kosinus: N. 38*. S. 163. 401. 418–422. 423 f. 451 f. 459. 482. 647 f. 656. 661–664. 673.
Sinus: N. 35*. S. 161–163. *161*. 374. *393*. 397 f. 460. 464. 482. 642–653. 656. 661.
sinus versus: S. 374. 398. 401. 648–656. 661.

s. a. *figura sinuum. linea sinuum. sinus.*
sinus: S. 5 f. 21 f. 26–28. 44. 60 f. 63. 68. 105 f. 165. *169*. 172 f. 175 f. 285. 418. 460. 487. 493.
complementi: S. 39. 61 f. 94. 103. 163. 218. 285. *285*. *402*. *410*. 423. *423*. 425. *425*. *446*. *458*. 459. 554. 647 f. 650. 653. 656. 658. 661–663. 673.
rectus: S. 6. 8. 13–16. *14*. 21 f. 26 f. 44. 53–57. 61 f. 69 f. *70*. 92–94. 100. 103. 592. 642. 646 f. 661 f.
totus: S. 17. 21.
versus: S. 6. 13–16. 19. 21 f. 24. 26 f. 31. 56–58. 60–62. 66. 69–71. *70*. 92–95. 103. 215. *284*. *285*. 322. 329. 374. *402*. 403. *423*. 551 f. 592. 598. 645. 648–651. 653. 655–657. 661 f.
sinus (Kurvenordinate): S. 5 f.
Slusesche Perle (*margarita*): S. 508.
Quadratur: S. 508.
solidum
hyperbolicum acutum: S. 212. 385. 548.
ungulare: S. 398 f. 401.
Sonnenuhr: S. 484.
sophisma: S. 431.
Spanien: S. 433.
spatium
absolute interminatum: S. *178*. 213. 549. 555.
area vel magnitudine infinitum: S. 583.
cissoeidale infinitum: S. 212. 548.
concavum: S. 401.
convexum: S. 401.
cycloeidalis: S. 506.
gradiforme: S. 138. 140–143. 190. 192. 194–196. 198 f. 229. 529–533. 536.
hyperbolicum: S. 12. 210. 282. 343. 386. 388. 506. 614–616. 633 f. 641.
imaginarium: S. 484.
infinite longum: S. 249. 255. 580. 582 f. 585. 589.
infinite parvum: S. 585.
infinitum: S. 209. 211 f. 242 f. 249. 251 f. 255. 284. 546. 548 f. 577. 583 f. 590. 616. 636.
longitudine infinitum: S. 210–212. 218. 242. 250 f. 547. 555. 581. 589. 633 f.
longitudine infinitum, magnitudine tamen finitum : S. 212 f. 548.
mixtilineum: S. 138. 140. 190. 195 f. 529.
gradiforme: S. 139.
rectilineum gradiforme: S. 138. 190. 193. 195. 198. 521. 528. 531. 535 f.
scalare: S. 37. 141. 143.
solidum gradiforme: S. 37.
Sphäroid: S. 498. 508.
Oberfläche: S. 508.
Abhängigkeit von Hyperbel- bzw. Kreisquadratur: S. 508.
sphaeroides
compressum: S. 508.
latum: S. 508.
Spiegel s. Optik.
Spirale: S. 170 f.
Konstruktion: S. 170.
Rektifikation
Zusammenhang mit Parabelrektifikation: S. 498. *498*. 506.
Tangente: S. 146. 498.
zylindrische: S. 490.
s. a. *cochlea. helix.*
spiritus vini: S. 488.
Stein der Weisen: S. 484.
Stoßmittelpunkt: S. 435.
subsectio: S. 27 f. 48.
subtensa: S. 42. 44. 208. 214. 544. 598.
summa rectarum ad quendam axem applicatarum: S. 204 f (Def.). 542 (Def.).
superficies
cylindrica: S. 37.
plana infinita: S. 159.
symbolismus: S. 220. 557. 612. 614.

tabula, tabulae
Alphonsinae: S. 500.
arcuum: S. 379. 440.
astronomica: S. 433.
canonis mathematici: S. 658.
curvarum simplicium, aequationum pro curvis analyticis simplicibus: S. 227. 229. 564. 566.
logarithmorum: S. 31. 369. 372 f. 669.
polygonorum: S. 21. 32.
quadraturarum: S. 320.
Regiomontani: S. 500.
Rhaetici: S. 500.

segmentorum circuli: S. 461.
sinuum: S. 15. 21. 32. 60 f. 172 f. 372.
rectorum: S. 16.
versorum: S. 16.
Tafelwerke
astronomische: S. 433. 500.
Dreieckstabellen (Mengoli): N. 13_1*.
Folgentafeln: S. 339 f.
Integraltafeln: S. 21. 32. 320. 461.
Kurventafeln: S. 148 f. 153. 226 f. 229.
Logarithmentafeln: S. 31. 369. 372 f. 380. 390. 393.
trigonometrische: S. 15. 21 f. 32. 42. 57. 59–61. 68. 161–163. 171–173. 175. 300 f. 303. 347 f. 351. 372 f. 379. 425 f. 429. 437. 440. 461. 493. 512. 514.
Tangens: N. 24*. 25*. 27*. S. 7. 33. 39 f. 63. 69 f. 92–94. 165 f. 174. 284. 303 f. 308–316. *309*. 330 f. 346–350. 373. 375–377. 446. 459. 465. 468. *483*. 512. 592. 658–661. 673–675.
des Doppelwinkels: S. 22. 26. 70. 94. 468.
des Halbwinkels: S. 6 f. 44. 53–58. 60 f. 64–66. 69 bis 71. 92 f. 95. 106. 297. 329. 372. 375. 468. 592 f. 661.
Differenzen: S. 40.
Moment der Fläche: S. 39.
Quadratur: S. 418.
s. a. Kreis, Tangente.
tangens canonicus: S. 7.
Tangentenmethode, Tangentenrechnung: S. 415.
inverse Tangentenmethode: S. 52. 159. 435. 567. 637 f.
Methoden:
(Descartes): S. 230. 504.
(Fermat): S. 230. 504.
(Hudde): S. 230.
(Sluse): S. 224. 230. 398.
2. Debeaunesches Problem: S. 637 f.
Teleskop s. Optik.
τετραγωνισμός, *tetragonismus*: S. 131. 146. 499.
tetragonistica: S. 487.
theorema
admirabile: S. 35.
elegans: S. 506.
famosum: S. 497.
foecundissimum: S. 143. 200. 537.
foecundum et late patens: S. 430.
generale: S. 228.
generalissimum: S. 143. 159. 320. 510. 588.
geometricum: S. 147. 184. 491. 493. 524.
praeclarum: S. 146. 431. 492. 502. 597.
praestantius: S. 196. 533.
pulcherrimum: S. 279.330. 496. 505.
pulchrum: S. 174. 495.
singulare: S. 551.
Toulouse: S. 434.
Traktrix: S. 259. *259*.
Transmutationsmethode: S. 5 f. 53–55. 109. 140 bis 142. 197–201. 151 f. 228 f. 373. 438. 510–512. 521. 533 f. 537. 567. 641.
Trapez: S. 599. 620.
triangulum
arithmeticum: S. 340.
harmonicum: S. 339–341.
trigonometria
canonica: S. 659.
directa: S. 661 f.
geometrica: S. 165. 171.
inversa: S. 661 f.
Trinom: S. 274.
trisectio: S. 625.
anguli: S. 176. 219. 350. 555. 675.
rationis: S. 219. 555.
trochoeides s. Rollkurven.

Uhren: S. 492.
Pendeluhr: S. 492 f. 508 f.
Regulierung: S. 488 f. *488*.
Sonnenuhr: S. 484.
unendlich
(Anzahl): S. 6. 8–11. 14. 16. 23 f. 26. 29 f. 53. 59. 67. 102. 124. 165. 210 f. 220. 228. 325. 512. 537.
(Größe): S. 209. 212 f. (Def.) 243. 249. 251. 385. 545. 549.
(klein): S. 6. 8–10. 15 f. 21. 24. 37. 102. 159. 204. 206. 211. 213. 230. 243. 250–253. 255 f. *255*. 284. 385. 388 f. 399 f. 498. 537.
ungula: S. 384–386. 401. 506.
semiquadrantalis: S. 385.

unitas
constructionis: S. 10. 22. 619.
finite parva: S. 10.
infinite parva: S. 8. 10. 16.

vanitas geometriae: S. 484.
velocitas
aequalis: S. 171.
proportionalis: S. 171.
veritas universa: S. 434.
Verstand: S. 177. 213. 224. 228. 333. 432. 487. 503. 527. 548 f. 586. 600 f.
Vervollkommnung: S. 428. 494–497. 514–518.
veteres: S. 146 f. 196. 212. 224. 226. 430. 437. 485 bis 487. 490 f. 495 f. 499 f. 503 f. 517. 540. 548. 556.
via mirabilis: S. 222.
vires humanae: S. 219.
Vorzeichen: S. 228. 233. 268. 616. 626. 630.
Doppel- und Mehrfachvorzeichen: S. 381. 618. 620.

Wahrscheinlichkeitsrechnung: S. 341. 431. 610.
Weingeist: S. 488.
Westfriesland (Westfrisia): S. 434.
Winkel
Bestimmung aus trigonometrischen Größen: N. 27*. S. 68. 161 f. 171. 287–293. 295–298. 299 f. 347 f. 376 f. 403–409. 426. 446 f. *446*. 451 f. 464–466. 600. 658–664.
Mittelbestimmung: S. 68.
räumlicher: S. 68.
Teilung: S. 48. 60. 68. 171. 173. 175 f. 219 f. *219*. 300–302. 304. 309–316. 348–350. *350*. 377. 467 f. 512. 555–557. 625. 661. 664. 675.
s. a. Kreis, *figura angulorum*. *sectio angularis*.
Wissenschaft: S. 197. 428–432. 434. 436. 438. 485 bis 487. 491. 494 f. 497–499. 502 f. 506. 515.
mathematische: s. Mathematik.
Würfelspiel: S. 341. 435. 610.
Aufteilung des Einsatzes: S. 341.
Würfelverdopplung: S. *146*. 484. 497 f. *497*.
Wurfbewegung: S. 147. 495. 505.
Wurzeln: S. 597. 627 f.
kubische: S. 225.
quadratische: S. 225 f. 556.
Wurzelziehen: S. 21. 32. 48 f. 52. 57. 60. 68. 112. 149. 229. 274 f. 460 f. 512.

Zahl, Zahlen
algebraische: S. 174.
dezimale: S. 32. 440.
endliche: S. 10. 527.
ganze: S. 11. 340 f. 381. 438. 609.
gerade: S. 121. 130. 176. 330. 335. 337. 611.
irrationale: S. 10. 13. 31. 60. 129. 172. 174.
Ludolphsche: S. 32. 131. 173 f. 311. 314. 348.
natürliche: S. 11. 16. 25. 31. 335 f. 339. 607. 609.
negative: S. 233.
Primzahlen: S. 287. 675.
rationale: S. 7 f. 10 f. 13 f. 16. 21. 50. 73. 94. 128 f. 172. 174. 176. 346 f. 438 f. 510. 566. 597.
unendliche: S. 10 f. 102.
ungerade: S. 66 f. 74. 121. 130. 330. 335–337. 611.
s. a. Folgen, spezielle. *fractio*. Größe. *numerus*. *quantitas*.
Zinsrechnung: S. 435.
Zinseszins: S. 341.
Zissoide: S. 55. 95. 499. *499*.
Asymptote: S. 55.
Ordinate: S. 55.
Quadratur: S. 55. *55*. 212. *212*. 499. 508. 548. *548*.
zona: S. 202 (Def.). 206 f. 245 f. 381–383. 386. 388. 400. 539 (Def.). 554. 572–577. 583–585. 616.
conjugata: S. 246–248. 382 f. 573. 583. 616.
directa: S. 246–248. 573. 575.
Zykloide: N. 30*. S. 152. 294. 396–400. *400*. 412. 414. 493. 548. 647.
Evolute: S. 493. 509.
Konstruktion: S. 566.
Quadratur: S. 166 f. *178*. 505 f. 552 f.
(Roberval): S. 506.
(Torricelli): S. 505.
retorta: N. 30*. S. 214. 549 f.
Quadratur: S. *178*. 214 f. 358. 550–553.
Rektifikation
(Wren): S. 438. 507.
Rotationskörper
(Roberval): S. 506.
Schwerpunkt: S. 506.

Schwerpunkt
(Roberval): S. 506.
Segment: N. 30*.
Quadratur: S. 166 f. *178*. 215–217. 359. 550 bis 553.
verkürzte bzw. verlängerte Rektifikation: S. 507.
Zylinder: S. 68. 170. 399. 401. 486. 548.
Huf bzw. Stumpf: S. 212 f. 383–388. 548.
Oberfläche: S. 103.

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS

FUNDSTELLEN

Verzeichnet sind hier die im vorliegenden Band edierten Hand- und Druckschriften, geordnet nach Fundorten und Signaturen.

HANNOVER, *Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek*

LH 35	I 20	Bl. 1–2	N. 49_1
	II 1	Bl. 1+6	N. 19
		Bl. 3–4	N. 49_2
		Bl. 5	N. 41
		Bl. 7–38	N. 51
		Bl. 46	N. 18_1
		Bl. 51–52	N. 39
		Bl. 55–56	N. 15
		Bl. 55–56	N. 16
		Bl. 67+79	N. 13_1
		Bl. 74–75	N. 13_2
		Bl. 83–84	N. 8
		Bl. 85–86	N. 14
		Bl. 87–88	N. 1
		Bl. 91–92	N. 1
		Bl. 99–108	N. 28
		Bl. 107–108	N. 29
		Bl. 107–108	N. 30
		Bl. 107–108	N. 31
		Bl. 109–110	N. 35
		Bl. 111	N. 42
		Bl. 112	N. 36
		Bl. 113–114	N. 43
		Bl. 115	N. 37
		Bl. 115	N. 51
		Bl. 116–117	N. 27
		Bl. 121–122	N. 48
		Bl. 123	N. 24
		Bl. 126	N. 11
		Bl. 127	N. 25
		Bl. 129	N. 47
		Bl. 131–132	N. 23
LH 35	II 1	Bl. 144+159	N. 21
		Bl. 144–159	N. 20
		Bl. 178	N. 46
		Bl. 235	N. 2_3
		Bl. 240–241	N. 1
		Bl. 257–260	N. 4
		Bl. 311	N. 3
		Bl. 316	N. 40
	III A 30	Bl. 7	N. 12
	V 6	Bl. 5	N. 18
		Bl. 9	N. 23
		Bl. 10–11	N. 22
	V 17	Bl. 5–6	N. 33
	VIII 13	Bl. 1–4	N. 49_1
		Bl. 3–4	N. 50
	VIII 30	Bl. 13	N. 25
		Bl. 68	N. 26
		Bl. 71	N. 38
		Bl. 106	N. 17
		Bl. 115	N. 6
	XI 4	Bl. 1–3	N. 7
	XII 1	Bl. 76	N. 2_1
	XIII 1	Bl. 122–123	N. 5
		Bl. 139	N. 2_2
		Bl. 405	N. 9
		Bl. 408–409	N. 10
		Bl. 431–432	N. 32
	XIII 2c	Bl. 152	N. 44
		Bl. 152	N. 45
	XIV 1	Bl. 298–299	N. 34

Cc-2-KONKORDANZ

Verzeichnet sind hier die Nummern der im *Catalogue critique* 2 erfassten Stücke mit Angabe der ihnen entsprechenden Stücke des vorliegenden Bandes. Die ersten zehn hier aufgeführten Schriften wurden im *Catalogue critique* 2 nicht erfasst. Steht hinter einer Cc-2-Nr.: tlw., so heißt dies, dass das bezeichnete Stück im betreffenden Stück des Bandes nicht vollständig abgedruckt ist.

Cc 2, Nr.	N.	Cc 2, Nr.	N.	Cc 2, Nr.	N.	Cc 2, Nr.	N.
—	3	794 A–B	7	1233 C tlw.	21	1429	25
—	9	843	5	1233 D	15	1430	48
—	10	1102	28	1233 E–F	51	1437	23
—	17	1103 A tlw.	30	1234	16_2	1438	23
—	26	1103 A tlw.	31	1236	16_1	1460	27
—	38	1103 B tlw.	29	1240 A–B	36	1461	35
—	43	1103 B tlw.	30	1241	37	1462	34
—	46	1224 A	49_1	1242	23	1472	22
—	47	1224 B	40	1243	23	1485	32
—	50	1224 C	49_2	1244 A–B	23	1486	24
503	2_1	1224 D	49_1	1245 A	18_1	1488 tlw.	33
504	2_2	1224 E	41	1245 B	18_2	1489	28
505	2_3	1224 F–H	39	1246	18_1	1508 A	45
555 A	4	1232	19	1338	28	1508 B	44
563	1	1233 A tlw.	1	1339	28	1517	42
628	11	1233 B	14	1383 B	13_2	1519	6
773_1	8	1233 C tlw.	20	1384	13_1	1541 A	12

Die Entsprechung von Stücknummer und Cc-2-Nummer ist in der Überlieferung des jeweiligen Stücks vermerkt.

ERWÄHNTE LEIBNIZ-HANDSCHRIFTEN

Dieses Verzeichnis erfasst die in den Überlieferungen und Erläuterungen erwähnten nicht edierten Handschriften. Es ist nach Cc-2-Nummern und Handschriftensignaturen geordnet und verweist auf die Seiten des vorliegenden Bandes.

Cc 2, Nr.	LH, Nr.		S.	Cc 2, Nr.	LH, Nr.		S.
842	35 XIII 1	Bl. 122–123	*75.*	1497	35 XV 1	Bl. 10	*144.*
939	35 VIII 30	Bl. 151	*485.*	1547	35 VIII 30	Bl. 13	*295.*
1069	35 XIII 1	Bl. 408–409	*108.*	—	35 II 1	Bl. 32	*423. 520.*
1070	35 XIII 1	Bl. 408–409	*108.*	—	35 XIII 1	Bl. 408–409	*108.*

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN, BERICHTIGUNGEN

1. SIGLEN UND EDITORISCHE ZEICHEN

E, E^1	Erstdruck
E^2 ...	weitere handschriftengestützte Drucke
L	Leibniz, eigenhändig
l	Leibniz, von Schreiberhand
LiH	Leibniz' eigenhändige Bemerkungen in einem Handexemplar
LuO	Leibniz gemeinsam mit Ozanam, eigenhändig
LuT	Leibniz gemeinsam mit Tschirnhaus, eigenhändig
M	Mohr, eigenhändig
T	Tschirnhaus, eigenhändig
[ ]	in der Datierung: erschlossenes Datum, im Text: Ergänzungen des Herausgebers.
[ ]	Ergänzungen von Satzzeichen und Exponenten durch den Herausgeber. Vereinzelt gebraucht Leibniz selbst eckige Klammern (Hinweise darauf im Erläuterungsapparat).
⟨ ⟩	Konjektur schwer lesbarer oder durch Beschädigung des Textzeugen ausgefallener Wörter bzw. Wortteile.
⟨–⟩	nicht entziffertes bzw. durch Beschädigung ausgefallenes Wort; die Anzahl der Striche entspricht der Anzahl der vermuteten Wörter.
Kursivierung	Zitate, Buchtitel, Text in anderer als der Grundsprache des betreffenden Stückes.
S p e r r u n g	Hervorhebungen durch Leibniz.
▭	Umrahmungen durch Leibniz zur Hervorhebung eines Terms oder zur Ausgliederung eines Textabschnittes aus dem Textzusammenhang.
⬭	Umrahmungen durch Leibniz zur Kennzeichnung wegfallender Terme.

2. ABKÜRZUNGEN (allgemein)

a.	auch
a. a. O.	am angegebenen Ort
aeq., aequ.	aequalis, aequatio
Anm.	Anmerkung
Aufl.	Auflage
Ausg.	Ausgabe
Bd(e)	Band (Bände)
Bl.	Blatt
Bog.	Bogen
bzw.	beziehungsweise
ca	circa
cap.	capitulum
cor., coroll.	corollarium
dat.	datiert
def., Def.	definitio, Definition
ders.	derselbe
Diss.	Dissertation
d. J.	der Jüngere
dt.	deutsch
ebd.	ebenda
engl.	englisch
erg.	ergänzt
Erl.	Erläuterung
ersch.	erschienen
f.	folgend
Fig., fig.	Figur, figura
franz.	französisch
gedr.	gedruckt
gestr.	gestrichen

Hrsg. (hrsg.)	Herausgeber (herausgegeben)
i. Allg.	im Allgemeinen
Jh.	Jahrhundert
Kor.	Korollar
l.	linke
lat.	lateinisch
LBr.	HANNOVER, *Leibniz-Bibl.* Leibniz-Briefwechsel
LH	HANNOVER, *Leibniz-Bibl.* Leibniz-Handschriften
lib.	liber
m.	mittlere
Marg.	Marginalie(n)
max.	maximal
Ms.	Manuskript
N., Nr.	Nummer
Nachdr.	Nachdruck
NB.	nota bene
o. O.	ohne Ort
p., pag.	pagina
probl.	problema
prop., Prop.	propositio, Proposition
r.	rechte
r^o	recto
S.	Seite
s.	siehe
s. a.	siehe auch
s. o.	siehe oben
Sp.	Spalte
s. u.	siehe unten
SV.	Schriftenverzeichnis
Tl(e)	Teil(e)
tlw.	teilweise
u. a.	und andere, unter anderem
u. d. T.	unter dem Titel
Übers. (übers.)	Übersetzung (übersetzt)
u. ö.	und öfter
usw.	und so weiter
v.	van, von, vor
Var.	Variante
verb.	verbessert
verm.	vermehrt
vgl.	vergleiche
v^o	verso
vol.	volume
v. u.	von unten
Z.	Zeile
z. B.	zum Beispiel
℞	destilletur, distilletur (noch zu bedenken)

3. ABKÜRZUNGEN (Schriften)

AO = ARCHIMEDES, *Opera omnia: cum commentariis Eutocii*. Hrsg. J. L. Heiberg. 3 Bde. Leipzig 1880 f. 2. Aufl. ebd. 1910–1915; Nachdr.: Stuttgart 1972.

BIRCH, *History* = BIRCH, Th., *The history of the Royal Society*. 4 Bde. London 1756 f.

BW = BOYLE, R., *The works*. Hrsg. M. Hunter. 14 Bde. London 1999 f.

CARDANO, *Opera* = CARDANO, G., *Opera omnia*. 10 Bde. Lyon 1663; Nachdr.: Stuttgart-Bad Cannstatt 1966 (= SV. N. 16,3).

Cc 2 = *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672 – Novembre 1676)*. Hrsg. A. Rivaud u. a. Poitiers 1914–1924; Nachdr.: Hildesheim [u. a.] 1986.

CHILD, *Early mathematical manuscripts* = CHILD, J. M., *The early mathematical Manuscripts of Leibniz*. Chicago [u. a.] 1920; Nachdr.: Mineola 2005.

DGS = *Geometria, a Renato Descartes anno 1637 gallice edita ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten.* 2. Aufl. 2 Tle. Amsterdam 1659–1661 (= SV. N. 36,2).

Divers ouvrages = *Divers ouvrages de mathematique et de physique. Par messieurs de l'Academie Royale des Sciences*. Paris 1693 (= SV. N. 28).

DO = Descartes, R., *Oeuvres.* Hrsg. Ch. Adam u. P. Tannery. 12 Bde. Paris 1879–1910; 2. Aufl. ebd. 1964–1972; Neuaufl. in 11 Bden ebd. 1996.

FO = Fermat, P. de, *Oeuvres*. Hrsg. P. Tannery u. Ch. Henry. 4 Bde. Paris 1891–1922.

GO = Galilei, G., *Opere*. Edizione Nazionale. 20 Bde. Florenz 1890–1909; Nachdr. ebd. 1929 u. 1939 u. ö.

Gerhardt, *Descartes und Pascal* = Gerhardt, C. I., *Desargues und Pascal über die Kegelschnitte*. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Berlin 1892, S. 183 bis 204.

Gerhardt, *Leibniz in London* = Gerhardt, C. I., *Leibniz in London*. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Berlin 1891, S. 157–176.

Hofmann, *Leibniz in Paris* = Hofmann, J. E., *Leibniz in Paris 1672 – 1676: His growth to mathematical maturity*. Cambridge 1974; Nachdr. ebd. 2008.

HO = Huygens, Chr., *Oeuvres complètes*. Hrsg. D. Bierens de Haan, J. Bosscha u. a. 22 Bde. Den Haag 1888–1950.

HOL = Hobbes, Th., *Opera philosophica quae latine scripsit omnia in unum corpus nunc primum collecta*. Hrsg. W. Molesworth. 5 Bde. London 1839–1845; Nachdr.: Aalen 1961; ebd. 1966; Bristol 1999.

KW = Kepler, J., *Gesammelte Werke*. Hrsg. von der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 21 Bde. München 1937–2009.

LMG = *Leibnizens mathematische Schriften.* Hrsg. C. I. Gerhardt. 7 Bde. Berlin, Halle 1849–1863; Nachdr.: Hildesheim 1961 u. 1971.

LQK = Leibniz, G. W., *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis.* Hrsg. E. Knobloch. Göttingen 1993.

Mackensen, *Vorgeschichte* = Mackensen, L. v., *Die Vorgeschichte und die Entstehung der 4-Spezies-Rechenmaschine von Gottfried Wilhelm Leibniz*. Diss. München 1968.

Mersenne, *Correspondance* = Mersenne, M., *Correspondance*. Hrsg. C. de Waard u. a. 16 Bde. Paris 1931–1986.

NC = Newton, I., *The Correspondence.* Hrsg. H. W. Turnbull u. a. 7 Bde. Cambridge 1959–1977.

OC = Oldenburg, H., *The Correspondence.* Hrsg. A. R. Hall u. M. Boas Hall. 13 Bde. Madison [usw.] 1965–1986.

PO = Pascal, Bl., *Oeuvres.* Hrsg. P. Boutroux u. a. 14 Bde. Paris 1904–1914; Nachdr.: Vaduz 1965.

Quadrature arithmétique = Leibniz, G. W., *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole*. Hrsg. M. Parmentier u. E. Knobloch. Paris 2004.

Torricelli, *Opere* = Torricelli, E., *Opere*. Hrsg. G. Loria u. G. Vassura. Faenza 1919–1944.

Tschirnhaus, *Briefe* = *Briefe von Ehrenfried Walther von Tschirnhaus an Henry Oldenburg und Pieter van Gent aus den Jahren 1675 – 1676*. Amsterdam 1990.

Vives, *Opera* = *Joannis Ludovici Vivis Valentini opera omnia*. Hrsg. Gr. Mayáns y Siscar. 8 Bde. Valencia 1782–1790; Nachdr.: London 1964.

VO = Viète, Fr., *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten.* Leiden 1646; Nachdr.: Hildesheim 1970 (= SV. N. 97,9).

Wallis, *Correspondence* = *The correspondence of John Wallis*. Hrsg. C. J. Scriba u. P. Beeley. Oxford 2003 ff. — Im Erscheinen.

WO = Wallis, J., *Opera mathematica*. 3 Bde. Oxford 1693–1699; Nachdr.: Hildesheim 1972.

4. MATHEMATISCHE ZEICHEN

Im Folgenden werden die heute ungebräuchlichen Bezeichnungen erklärt, soweit sie nicht unmittelbar aus dem Kontext folgen bzw. im Einzelnen erklärt sind. Für weitere Einzelheiten vgl. die Einleitung S. XXXI–XXXVII.
Zahlreiche Beispiele und eine tabellarische Übersicht von Leibniz' mathematischen Bezeichnungsweisen gibt F. Cajori, *Leibniz the master builder of mathematical notation* (in: *Isis* 7 (1925) S. 420–429) bzw. F. Cajori, *A history of mathematical notation*, Bd 2 S. 189–196 (La Salle, Ill. 1929 u. ö.).

$\frown$	Multiplikation
$\times$	Überkreuzmultiplikation
$\smile$	Division
$\square$, $\boxed{2}$	Quadrat
cub., $\boxed{3}$	Kubus
aeq., aequ.	gleich
$\sqcap$	gleich
$\sqcap$	größer als
$\sqcap$	kleiner als
$a : b :: c : d$	Proportion
$\vert$	Kürzung eines Bruchs
$\mathfrak{f}$	facit
Platzhalter:	
$*$	ausfallende Terme
...	Terme
:	Terme
Wiederholung:	
..	Faktoren
$\div$	Brüche
Ozanam:	
$a2$, $a3$ ...	a^2, a^3 ...
$\sim$	gleich
Tschirnhaus:	
$\wp$	gleich
$a \sqcap\!\sqcap b \sqcap c \sqcap\!\sqcap d$	Proportion

5. BERICHTIGUNGEN

Zu Band VII, 1:
S. 3 Z. 6: *Nach* legaturus. *erg.* — Gedr.: *LFC* S. 538.

Zu Band VII, 3:

S. 731 Z. 6: *Statt* II *lies* XII

Zu Band VII, 4:

S. 271 Z. 17: *Vor* segmento *erg.* [duplo]
S. 271 Z. 25: *Erg. Lesart zu Z. 17:* duplo *erg. Hrsg.*
S. 300 Z. 23: *Statt* proportionalis *lies* proportionales
S. 344 Z. 5, 10 u. 11: *Statt ABE lies ABC*
S. 594 Z. 4: *Statt LBS lies LSB*
S. 684 Z. 10: *Statt* ducunda *lies* ducenda
S. 692 Z. 20: *Nach* constans *erg.* [c ad]
S. 692 Z. 25: *Erg. Lesart zu Z. 20:* c ad *erg. Hrsg.*
S. 693: *Erg. Erl. zu Z. 10:* tangentem: Richtig wäre productam.

S. 701: *Erg. Erl. zu Z. 15 f.: où ... armes*: Umformuliertes Zitat nach G. A. de La Roque, *La methode royale, facile et historique du blason*, 1671, S. 43.
S. 758: *Erg. Erl. zu Z. 15:* alibi: vgl. N. 16_4 S. 323.
S. 833: *Erg. im Schriftenverzeichnis:* 23a. La Roque, G. A. de, *La methode royale, facile et historique du blason: avec l'origine des armes des plus illustres etats et familles de l'Europe*. Paris 1671: S. *701.*

Zu Band VII, 5:

S. [VII] N. 12 u. S. 113 Z. 1 u. 7: *Statt* usus *lies* usu
S. XXXVI, 4. Z. v. u.: *Statt* 7_3 *lies* 7_2
S. 192 Z. 9: *Statt* rigidiae *lies* rigidae
S. 199, letzte Zeile: *Statt* pars 2 *lies* pars 1
S. 202 Z. 26: *Statt* Q v a d r a t i c e s *lies* Q v a d r a t r i c e s
S. 473 Z. 3: *Statt* possunt *lies* possint
S. 473: *Erg. Erl. zu Z. 11:* ordinatarum: Richtig wäre abscissarum.